高等教育21世纪课程教材

大学物理学

学习指导

DAXUE
WULIXUE
XUEXI ZHIDAO

(第2版)

赵近芳 主编
颜晓红 主审

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是根据教材《大学物理学》上、下册第二版的主要内容，结合大批专任教师的长期教学经验而编写. 全书按教材篇章次序，分为：力学基础（包括相对论、振动与波）、热学、电磁学、波动光学和量子论. 且每章由“基本要求”、“学习指导”、“解题示例”组成，并附有自测题. 内容由浅入深，难度适宜.

本书可作为高等学校非物理专业学生的辅导书或自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学学习指导/赵近芳主编. —2 版. —北京：北京邮电大学出版社，2005

ISBN 7-5635-0709-4

Ⅰ. 大... Ⅱ. 赵... Ⅲ. 物理学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 140979 号

书　　名	大学物理学学习指导
编　　者	赵近芳
责任编辑	李欣一
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部)010-62283578(传真)
E-mail	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京通州皇家印刷厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	17
字　　数	320 千字
版　　次	2006 年 8 月第 2 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0709-4/O·104　　　　定　价：21.00 元

前　言

为了帮助读者更好地掌握教材的主要内容，我们编写了这本辅助教材作为学习指导.

本书是按教材篇章顺序编写的.各篇的每一章由“基本要求”、“学习指导”、“解题示例”3部分组成，每一篇后面附有自测题.

基本要求　向读者指明该章必须掌握的主要内容，反映了该章的重点，可以成为读者判断该章内容的主与次、重点与一般的依据.

学习指导　分“内容提要”与“重点、难点分析”两部分.“内容提要”简要列出了本章的基本内容，有的地方进行了归纳、对比，顺序与教材不一定相同，但知识的系统性加强了.必须说明的是“内容提要”不能代替教材，读者应把阅读、钻研教材内容放在第一位.如果只背内容提要而不看教材，是一定学不好物理的.“重点、难点分析”是编者就基本内容的理解提出的一些看法，作了一定的分析，可能有助于读者.有些问题的讨论略为深入一些，并不属于基本要求，希望读者根据自己的情况自行取舍，汲取有益的部分.

解题示例　主要是选解反映本章内容的习题，有的地方也举少量有特色的题目，想通过例题告诉读者某些知识或方法.但是这些例题并没有完全覆盖教材的内容.做习题只是一种学习手段，是辅助的地位.希望读者做题后再思考、总结，加强对基本内容的理解和掌握，并在学习能力上有所提高.

自测题供读者自行检查学习效果，每套题的完成时间约为120分钟，按闭卷方式检测.

任何指导书都不能代替读者个人的独立思考和刻苦学习，编者只希望本书能对读者的学习起到参考作用.由于时间和水平有限，书中难免出现不妥之处，敬请读者批评指正.

编　者

2005年10月30日

目　　录

力学基础篇

振动和波篇

热学篇

电磁学篇

波动光学篇

量子论篇

力学基础篇

第1章　运动的描述

基本要求

1. 了解描述运动的3个必要条件:参考系(坐标系),恰当的物理模型(质点、刚体),初始条件.

2. 熟练掌握用矢量描述运动的方法,即掌握 $\boldsymbol{r}, \Delta\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}$ 的矢量定义式及其在直角坐标系、自然坐标系的表示式.

3. 掌握用微积分的方法处理运动学中的两类问题.

4. 掌握质点作圆周运动的线量、角量描述,刚体作定轴转动的描述.

5. 理解相对运动的有关概念和基本计算方法.

学习指导

◉ 内容提要

1. 描述物体运动的3个必要条件

(1) 参考系(坐标系)

由于自然界物体的运动是绝对的,只能在相对的意义上讨论运动,因此需要引入参考系.为定量描述物体的运动又必须在参考系上建立坐标系.

(2) 物理模型

真实的物理世界是非常复杂的,在具体处理时必须分析各种因素对所涉及问题的影响,忽略次要因素,突出主要因素,提出理想化模型.质点和刚体是我们在物理学中遇到的最初的两个模型,以后还会遇到许多其他理想化模型.

读者在学习中要着重体会:每一个物理模型是在什么条件下提出的?如何

根据具体问题建立理想化模型？培养这种能力对提高一个人的科学素养是非常重要的.

质点适用的范围是：或者是物体自身的线度 l 远远小于物体运动的空间范围 r；或者是物体作平动. 如果一个物体在运动时，上述两个条件一个也不满足，我们可以把这个物体看成是由许多个都能满足第一个条件的质点所组成的，这就是所谓质点系的模型.

如果在所讨论的问题中，物体的形状及其在空间的方位取向是不能忽略的，而物体的细小形变是可以忽略不计的，则须引入刚体模型. 刚体是各质元之间无相对位移的质点系.

(3) 初始条件

初始条件指开始计时时刻物体的位置和速度(或角位置、角速度)，即运动物体的初始状态. 在建立了物体的运动方程之后，若要想预知未来某个时刻物体的位置及其运动速度，还必须知道在某个已知时刻物体的运动状态，即初始条件.

2. 描述质点运动和运动变化的物理量

(1) 位置矢量

由坐标原点引向质点所在处的有向线段，通常用 $\boldsymbol{r}$ 表示，简称位矢或矢径. 在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \tag{1.2}$$

在平面极坐标系中

$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{r}_0 \tag{1.3}$$

(2) 位移

由起始位置指向终止位置的有向线段，就是位矢的增量，即

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{1.4}$$

位移是矢量，只与始、末位置有关，与质点运动的轨迹及质点在其间往返的次数无关.

路程是质点在空间运动所经历的轨迹的长度，恒为正，用符号 Δs 表示. 路程的大小与质点运动的轨迹形状有关，与质点在其间往返的次数有关. 故在一般情况下

$$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s \tag{1.5}$$

但是在 $\Delta t \to 0$ 时，有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s \tag{1.6}$$

由于矢量的增量既有方向改变又有大小的改变，故应区分 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 Δr 不同，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 与 $\mathrm{d}r$ 不同.

(3) 速度$\boldsymbol{v}$与速率v

平均速度

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.7}$$

平均速率

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.8}$$

因此,平均速度的大小 $|\overline{\boldsymbol{v}}| = \left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right| \neq \frac{\Delta s}{\Delta t}$(平均速率).

质点在 t 时刻的瞬时速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

质点在 t 时刻的速率

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.10}$$

由(1.6)式知

$$|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v \tag{1.11}$$

可见瞬时速度的模就是瞬时速率.

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1.12}$$

式中 $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$,分别称为速度在 x 轴、y 轴、z 轴的分量.

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}_0 \tag{1.13}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}_0$ 是轨道切线方向的单位矢.

位矢 $\boldsymbol{r}$ 和速度$\boldsymbol{v}$ 是描述质点机械运动的状态参量.

(4) 加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.14}$$

加速度是描述质点速度变化率的物理量.

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1.15}$$

式中$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$，分别称为加速度在$x$轴、$y$轴、$z$轴的分量.

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_\mathrm{n} \tag{1.16}$$

式中$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0$，$\boldsymbol{a}_\mathrm{n}=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0$，是加速度$\boldsymbol{a}$在轨道切线方向和法线方向的分量式.

3. 运动学中的两类问题(以直线运动为例)

(1) 已知运动方程求质点的速度、加速度. 这类问题主要是利用求导数的方法. 如已知质点的运动方程为

$$x=x(t)$$

则质点的位移、速度、加速度分别为

$$\Delta x=x_2-x_1;v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.17}$$

(2) 已知质点加速度函数$a=a(x,v,t)$以及初始条件，建立质点的运动方程. 这类问题主要用积分方法.

设初始条件为

$$t=0\text{ 时},v=v_0,x=x_0$$

若$a=a(t)$，则因$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，所以

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a(t)\mathrm{d}t$$

即

$$v=v_0+\int_0^t a(t)\mathrm{d}t \tag{1.18}$$

$$x=x_0+\int_0^t v(t)\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

若$a=a(v)$，则因$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a(v)$，所以

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{a(v)}=\int_0^t\mathrm{d}t \tag{1.20}$$

求出$t=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$，再解出$v=v(t)$代入(1.17)式即可求出运动方程.

若$a=a(x)$，则因$a=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a(x)$，有

$$\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x \tag{1.21}$$

4. 曲线运动中的两类典型

(1) 抛体运动

若以抛出点为原点,水平前进方向为 x 轴正向,向上为 y 轴正向,则

① 运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = v_0 \sin \theta t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

② 速度方程为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = v_0 \sin \theta - g t \end{cases}$$

③ 在最高点时 $v_y = 0$,故达最高点的时间为

$$t_{\mathrm{H}} = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \tag{1.22}$$

所以射高为

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \tag{1.23}$$

飞行总时间 $T = 2t_{\mathrm{H}}$.

水平射程为

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \tag{1.24}$$

④ 轨道方程为

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2} x^2 \tag{1.25}$$

(2) 圆周运动

① 描述圆周运动的两种方法:

线量	角量
$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}s\boldsymbol{\tau}_0$	$\mathrm{d}\theta$
$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}_0 = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0$	$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0 + \dfrac{v^2}{R}\boldsymbol{n}_0 = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau}_0 + \dfrac{v^2}{R}\boldsymbol{n}_0$	$\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ (1.26)

线量与角量的关系:

$$\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\theta$$

$$v = R\omega$$

$$a_\tau = R\beta, a_n = R\omega^2 \tag{1.27}$$

② 匀角加速(即 $\beta =$ 常数)圆周运动:可与匀加速直线运动类比,故有

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \tag{1.28}$$

③ 匀变速率(即 $a_\tau =$ 常数)的曲线运动:以轨道为一维坐标轴,以弧长为坐标,亦可与匀加速直线运动类比而有

$$v = v_0 + a_\tau t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_\tau t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a_\tau(s - s_0) \tag{1.29}$$

④ 匀速率圆周运动(即 $a_\tau = 0$):它在直角坐标系中的运动方程为

$$\begin{cases} x = R\cos \omega t \\ y = R\sin \omega t \end{cases} \tag{1.30}$$

轨道方程为

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.31}$$

5. 刚体定轴转动的描述

(1) 定轴转动的角量描述

刚体在定轴转动时,定义垂直于转轴的平面为转动平面,这时刚体上各质点均在各自的转动平面内作圆心在轴上的圆周运动.

在刚体中任选一转动平面,以轴与转动平面的交点为坐标原点,过原点任引一条射线为极轴,则从原点引向考察质点的位矢 $\boldsymbol{r}_i$ 与极轴的夹角 θ 即为角位置,于是一样可引入角速度 ω 和角加速度 β. 即本书对质点圆周运动的描述(1.26),(1.27),(1.28) 式在刚体的定轴转动中依然成立.

(2) 刚体定轴转动的运动学特点

角量描述的是共性——即所有质点都有相同的角位移、角速度、角加速度;线量描述的是个性——即各质点的线位移、线速度、线加速度与质点到轴的距离成正比.

6. 相对运动的概念

(1) 我们只讨论两个参考系的相对运动是平动而没有转动的情况. 设相对于观察者静止的参考系为 S,相对于 S 系作平动的参考系为 S',则运动物体 A 相对于 S 系和 S' 系的位矢、速度、加速度变换关系分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{AS} &= \boldsymbol{r}_{AS'} + \boldsymbol{r}_{S'S} \\ \boldsymbol{v}_{AS} &= \boldsymbol{v}_{AS'} + \boldsymbol{v}_{S'S} \\ \boldsymbol{a}_{AS} &= \boldsymbol{a}_{AS'} + \boldsymbol{a}_{S'S} \end{aligned} \tag{1.32}$$

(2) 上述变换关系只在低速(即 $v \ll c$) 运动条件下成立. 如果 S' 系相对于 S 系有转动,则(1.32) 式中的速度变换关系亦成立,而加速度变换关系不成立.

◉ 重点、难点分析

1. 关于矢量性

(1) 注意区分矢量 $\boldsymbol{A}$ 的增量的模 $|\Delta\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1|$ 和模的增量 $\Delta A = |\boldsymbol{A}_2| - |\boldsymbol{A}_1|$. 在运动学中要区分:

$$\begin{cases} \text{位矢的增量的模} & |\Delta\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| \\ \text{位矢的模的增量} & \Delta r = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{速度增量的模} & |\Delta\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1| \\ \text{速度模的增量} & \Delta v = |\boldsymbol{v}_2| - |\boldsymbol{v}_1| \end{cases}$$

上述关系可用图 1.1 表示.

图中 $\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1$,表示矢量的增量,故矢量增量的模当然表示为 $|\Delta\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1|$,而 $\Delta A = |\Delta\boldsymbol{A}_2| = |\boldsymbol{A}_2| - |\overrightarrow{Oc}| = |\boldsymbol{A}_2| - |\boldsymbol{A}_1|$,表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模的增量.

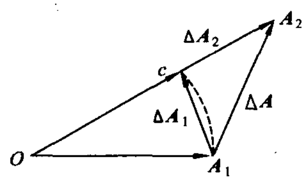


图 1.1

由此可知:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \begin{cases} \left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = v & \text{表示速度的大小;} \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r & \text{表示位矢的模的变化率,它是速度径向分量的大小.} \end{cases}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \begin{cases} \left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| = a & \text{表示加速度的大小;} \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_\tau & \text{表示切向加速度大小.} \end{cases}$$

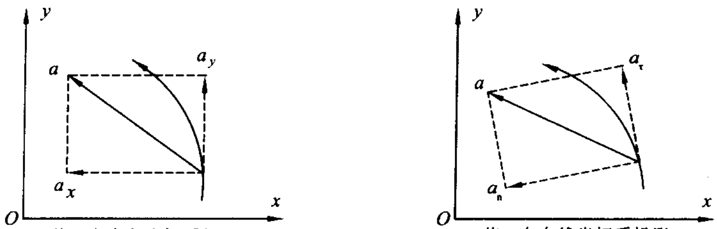
(2) 切忌将矢量与其模连等:例如下面的等式 $\Delta\boldsymbol{r} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} = 4.47\ \mathrm{m}$ 就是一种错误的书写方式.

(3) 用矢量方法来描述物理规律,其优越性在于:具有鲜明的物理意义;简洁的数学形式及对于各种坐标系保持不变的形式. 具体运算时,常将各矢量写成坐标分量式,如一个作平面曲线运动的质点,其加速度 $\boldsymbol{a}$ 可分别表示为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = a_\tau\boldsymbol{\tau}_0 + a_n\boldsymbol{n}_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0$$

即如图 1.2 所示.



将 $\boldsymbol{a}$ 向直角坐标系投影　　　将 $\boldsymbol{a}$ 向自然坐标系投影

图 1.2

2. 关于瞬时性

在中学，读者所遇到的物理量都是恒量，如匀加速度(即 $\boldsymbol{a}=$ 常量)，恒力作用(即 $\boldsymbol{F}=$ 常量). 但在大学物理中我们接触到的基本上是变量，如 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$ 等. 因此，必须应用微积分的知识.

在运动学中，从运动方程求速度、加速度主要是用求导的方法；从速度、加速度和初始条件求运动方程主要是用积分的方法. 当被积函数的变量与积分元的变量不一致时，要通过恒等变换使得两者一致.

例如，一质点的加速度 $a=3-5x$，求其速度表示式.

显然，若只是简单地写成下式：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3-5x$$

$$\mathrm{d}v=(3-5x)\mathrm{d}t$$

是不能完成题目所要求的. 因为等式右边被积函数 $(3-5x)$ 是 x 的函数，而积分变量是 t. 为完成这个积分，须进行下面的恒等变换：

因为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

所以

$$v\mathrm{d}v=(3-5x)\mathrm{d}x$$

若设初始条件为 $x_0=0, v_0=0$，则有

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x(3-5x)\mathrm{d}x$$

积分解得

$$v=\sqrt{6x-5x^2}$$

作定轴转动的刚体同样存在两类问题：即已知刚体定轴转动的运动方程求角速度、角加速度；已知刚体定轴转动的角加速度的函数及初始条件，求运动方程. 对这些知识、能力的要求与质点在直线运动中的要求相同，此处不再重复.

3. 关于相对性

(1.32) 式描述的是同一个运动在两个平动参考系中的运动学量之间的转换关系. 正确运用(1.32) 式的关键是明确每个运动学量与观察者之间的关系，即要区分“牵连”、“相对”、“绝对”等物理量. 例如：$\boldsymbol{r}_{S'S}$ 为牵连位矢，$\boldsymbol{r}_{AS'}$ 为相对位矢，$\boldsymbol{r}_{AS}$ 为绝对位矢.

遵从(1.32) 式适用的条件和范围是正确运用的另一个关键.

4. 自然坐标系

大家不太熟悉，因而是难点之一. 这里的关键是记住下面一组公式并能熟练应用：

$$\begin{cases} v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \\ a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

例如一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = bt - \dfrac{1}{2}ct^2$ 运动，b，c 均为常数，且 $b > \sqrt{Rc}$，则其切向加速度和法向加速度相等所经历的最小时间是多少？

解　由于

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = b - ct,\quad a_\tau = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -c$$

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}$$

故当 $a_\tau = a_\mathrm{n}$ 时，有

$$\frac{(b-ct)^2}{R} = |-c|$$

$$t_{\min} = \frac{b}{c} - \sqrt{\frac{R}{c}}$$

解题示例

例 1.1　质点作平面曲线运动，已知 $x = 3t$ m，$y = 1 - t^2$ m. 求：(1) 质点运动的轨道方程；(2) $t = 3$ s 时的位矢；(3) 第 2 s 内的位移和平均速度；(4) $t = 2$ s 时的速度和加速度；(5) 时刻 t 的切向加速度和法向加速度；(6) $t = 2$ s 时质点所在处轨道的曲率半径.

解　(1) 由运动方程消去 t，得轨道方程为

$$y = 1 - \frac{x^2}{9}$$

(2)$t=3$ s时的位矢 $\boldsymbol{r}(3)=x(3)\boldsymbol{i}+y(3)\boldsymbol{j}=9\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$，大小为 $|\boldsymbol{r}(3)|=\sqrt{81+64}\approx 12$ m，方向由 $\boldsymbol{r}(3)$ 与 x 轴的夹角 $\alpha=\arctan\dfrac{y(3)}{x(3)}=-41°38'$ 表示.

(3) 第 2 s 内的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}=[x(2)-x(1)]\boldsymbol{i}+[y(2)-y(1)]\boldsymbol{j}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$ m，方向与 x 轴成 $\alpha=\arctan\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-45°$. 平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 的大小不能用 $\bar{v}$ 表示，但它的 x,y 分量可表示为 $\bar{v}_x=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$，$\bar{v}_y=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$.

(4) 由 $\boldsymbol{v}=\dfrac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\dfrac{dy}{dt}\boldsymbol{j}=3\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$，当 $t=2$ s 时，有

$$\boldsymbol{v}(2)=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$

大小 $v(2)=\sqrt{9+16}=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向为 $\alpha=\arctan(\dfrac{-4}{3})=-53°8'$.

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-2\boldsymbol{j}$$

即 $\boldsymbol{a}$ 为恒矢量，$a=a_y=-2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，沿 y 轴负方向.

(5) 由质点在 t 时刻的速度 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{9+4t^2}$，得切向加速度 $a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{4t}{\sqrt{9+4t^2}}$，法向加速度 $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\dfrac{6}{\sqrt{9+4t^2}}$.

注意：$\dfrac{dv}{dt}\neq\left|\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|$，因为 $\dfrac{dv}{dt}$ 表示速度大小随时间的变化率，而 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|$ 表示速度对时间变化率的模. 切向加速度 a_τ 是质点的(总)加速度 $\boldsymbol{a}$ 的一部分，即切向分量，其物理意义是描述速度大小的变化；法向加速度 a_n 则描述速度方向的变化.

(6) 由 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，$t=2$ s 时所求的曲率半径为

$$\rho=\frac{|\boldsymbol{v}(2)|^2}{a_n(2)}=\frac{25}{1.2}=20.8\ \mathrm{m}$$

例 1.2 一质点沿 x 轴作直线运动，其加速度为 $a=6t$，$t=2$ s 时，质点以 $v=12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度通过坐标原点，求该点的运动方程.

解
$$v=\int a\,dt+c_1=\int 6t\,dt+c_1=3t^2+c_1$$

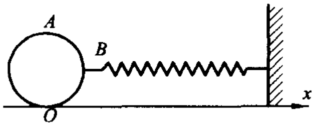
因为 $t=2$ 时，$v=12$，故 $c_1=0$.

又

$$x=\int v\,dt+c_2=\int(3t^2)\,dt+c_2=t^3+c_2$$

因为 $t=2$ 时 $x=0$，故 $c_2=-8$，故

$$x=t^3-8\ \mathrm{m}$$



例 1.3 图

例 1.3 如例 1.3 图所示，一轻弹簧 B 的右端固定，左端与小球 A 连接，自然放置在光滑水平面上. 因受到来自左方的突然打击，使小球获得水平向右的初速度 v_0，此后小球的加速度与它离开初始位置 O 的位移的关系为 $a=-\beta x$，β 为

正常数. 求:(1) 小球速度与位移 x 的函数关系;(2) 小球的运动方程.

解　本题未明确给出初始条件,但初始条件可任意给定. 现取小球在初始位置的时刻为零时刻,O 为坐标原点,则初始条件为:$t=0, x(0)=0, v(0)=v_0$.

(1) 由 $a=-\beta x=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$,即有 $v\mathrm{d}v=-\beta x\mathrm{d}x$,两边积分 $\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=-\beta\int_0^x x\mathrm{d}x$,得 $\dfrac{v^2}{2}-\dfrac{v_0^2}{2}=-\dfrac{1}{2}\beta x^2$,即

$$v=\sqrt{v_0^2-\beta x^2}$$

(2) 由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v_0^2-\beta x^2}}=\mathrm{d}t$,两边积分,得

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v_0^2-\beta x^2}}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

利用积分公式 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}$,得 $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}\arcsin\dfrac{\sqrt{\beta}x}{v_0}=t$, $\arcsin\dfrac{\sqrt{\beta}x}{v_0}=\sqrt{\beta}\,t$,运动方程为 $x=\dfrac{v_0}{\sqrt{\beta}}\sin\sqrt{\beta}\,t$,即小球在 O 点附近作简谐振动.

例 1.4　质点沿半径为 R 的圆周运动,运动方程为 $\theta=7t^2-bt^3$,b 为正常数. 求:(1) 切向加速度和法向加速度;(2) 加速度 $\boldsymbol{a}$;(3) t 为多少时加速度 $\boldsymbol{a}$ 与半径成 $45°$ 角;(4) $a_\tau=a_n$ 时质点转了多少圈?

解　由 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-3Rbt^2$ 得:

(1) $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-6Rbt$, $a_n=\dfrac{v^2}{R}=9Rb^2t^4$;

(2) $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=3Rbt\sqrt{4+9b^2t^6}$,$a$ 与切向的夹角 $\alpha=\arctan\dfrac{a_n}{a_\tau}=\arctan\left(-\dfrac{3bt^3}{2}\right)$;

(3) 令 $a_n=|a_\tau|$,得 $t=\left(\dfrac{2}{3b}\right)^{1/3}$;

(4) 在运动方程 $\theta=7-bt^3$ 中,令 $t^3=\dfrac{2}{3b}$,得 $\theta=\dfrac{19}{3}$,故转过的圈数 $N=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{19}{6\pi}\approx 1$ rev.

例 1.5　火车停止时窗上雨痕向前倾斜 θ_0 角,火车以速率 v_1 前进时窗上雨痕向后倾斜 θ_1 角,火车加快以另一速率 v_2 前进时窗上雨痕向后倾斜 θ_2 角,求 v_1 与 v_2 的比值.

解　设雨对地速度为 $\boldsymbol{v}_0$,则当车以 $\boldsymbol{v}_1$ 前进时,$\boldsymbol{v}_{1雨车}=\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_0+(-\boldsymbol{v}_1)$,当车以 $\boldsymbol{v}_2$ 前进时,$\boldsymbol{v}_{2雨车}=\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_0+(-\boldsymbol{v}_2)$,根据以上两式可作出例 1.5 图. 若以竖直向下为 x 轴正向,火车前进方向为 y 轴正向,则有

$$\begin{cases} v_0\cos\theta_0=v_{1雨车}\cos\theta_1 \\ v_0\sin\theta_0=v_1-v_{1雨车}\sin\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0\cos\theta_0=v_{2雨车}\cos\theta_2 \\ v_0\sin\theta_0=v_2-v_{2雨车}\sin\theta_2 \end{cases}$$