高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

陶金瑞○主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高等数学

主　编　陶金瑞

副主编　王秀萍

参　编　韩启汉　宁进京　安雪梅

　　　　许　栩　胡跃强　闫伟杰

主　审　郭军义　霍凤芹

机械工业出版社

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。本书注重突出内容的实用性，降低了理论推导的难度。全书共八章，主要内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、微分方程、多元函数微积分、无穷级数等内容。部分加有“*”的内容可供相关专业选学。

本书可作为工科类高职高专学校教材，也可作为参加“专升本”考试的学生参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/陶金瑞主编. —北京：机械工业出版社，2006.8

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 7-111-19682-1

Ⅰ.高… Ⅱ.陶… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 087599 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)

策划编辑：宋学敏　责任编辑：李大国　版式设计：霍永明

责任校对：刘志文　封面设计：王伟光　责任印制：李　妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2006年9月第1版第1次印刷

169mm×239mm ·9.75 印张·380 千字

定价：24.00 元

前　　言

根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在深入研究多种同类教材和广泛吸取同行意见的基础上，结合当前高职高专教学的特点，组织了一批具有丰富教学经验的一线教师编写了本书。

本书遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在内容编排上，力求紧密衔接初等数学，从特殊到一般，从具体到抽象，在注重基本概念和基本定理的同时，还介绍了一些它们在实际中的相关应用，使教师易于教，学生便于学。

本书由陶金瑞主编。参加本书编写的人员有：陶金瑞、王秀萍、韩启汉、宁进京、安雪梅、许栩、胡跃强、闫伟杰。南开大学数学科学学院副院长、博士生导师郭军义和河北机电职业技术学院霍凤芹老师审阅了全书稿，并提出了宝贵的意见；河北机电职业技术学院基础课教学部主任郝立宁，对本书的编写工作也给予了大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中难免出现不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　极限与连续

极限是学习微积分的理论基础. 连续是函数的一个重要性态. 连续函数是微积分研究的主要对象. 本章主要讨论函数的极限与函数的连续性.

第一节　初 等 函 数

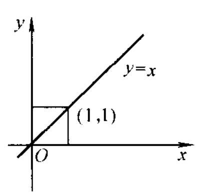
一、基本初等函数

在初等数学中，我们曾学过函数的几个重要性质，如奇偶性、单调性、有界性、周期性. 极限是对我们所学过的函数作进一步探讨，即对函数中变量变化趋势的研究，是函数性质的延伸，因此，我们先来复习一下函数的概念及性质.

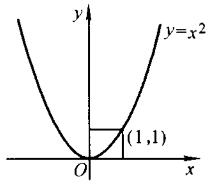
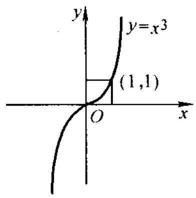
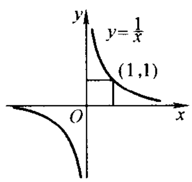
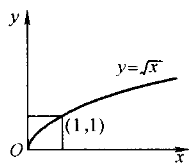
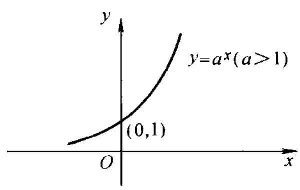
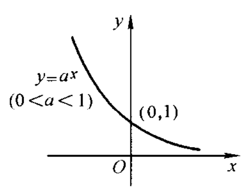
设 D 是一个数集，如果对属于 D 内的每一个数 x，按照某个对应关系 f，y 都有唯一确定的值和它对应，则 y 就称为定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$，x 称为**自变量**，数集 D 称为函数的**定义域**. 当 x 取遍 D 中的一切元素时，与它对应的函数值的集合 M 称为函数的**值域**.

我们已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五类函数统称为基本初等函数. 为了便于应用，将它们的定义域、值域、图像和主要性质列于表 1-1.

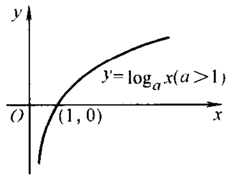
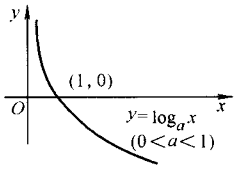
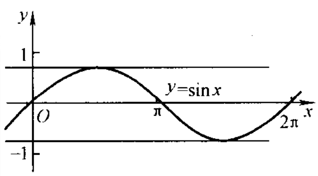
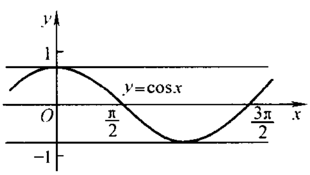
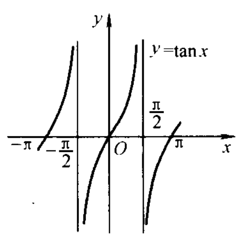
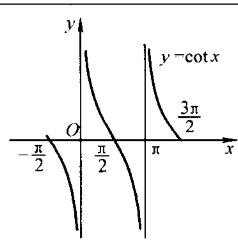
表　1-1

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

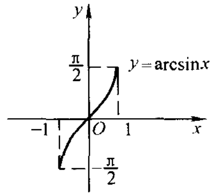
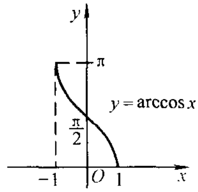
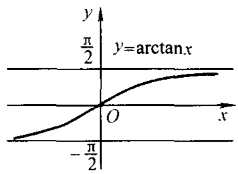
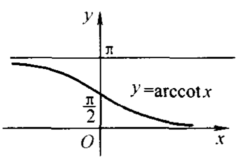
（续）

	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内分别单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

（续）

	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界， 在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界， 在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π， 在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π， 在$(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少

（续）

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

二、复合函数

在实际问题中，我们常常遇到由几个简单函数构成一个较复杂函数的问题．例如，设某企业的收入 R 是产量 q 的函数

$$R=f(q)=3q+7 \tag{1}$$

但企业的产量 q 又是投入成本 l 的函数

$$q=g(l)=l^3+15l-3 \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$R=f[g(l)]=3(l^3+15l-3)+7$$

上式为收入 R 与投入成本 l 之间的关系，即收入 R 为投入成本 l 的函数．下面我们就讨论这类函数．

定义 1　设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或者部分在

$f(u)$的定义域内，此时称 y(通过 u)与 x 的函数关系 $y=f[\varphi(x)]$，是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称为**复合函数**，称 u 为**中间变量**.

例 1 试将下列各函数 y 表示成 x 的函数：

(1) $y=u^2$，$u=x^3-5x+2$；　　(2) $y=e^u$，$u=2x+5$.

解 (1) $y=u^2=(x^3-5x+2)^2$，即 $y=(x^3-5x+2)^2$；

(2) $y=e^u=e^{2x+5}$，即 $y=e^{2x+5}$.

例 2 指出下列函数的复合过程，并求其定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$；　　(2) $y=\ln(2x-5)$；

(3) $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$；　　(4) $y=\lg(2+\sin^2 x)$；

(5) $y=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}\right)^2$.

解 (1) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2-5x+6$ 这两个函数复合而成的. 要使函数 $y=\sqrt{x^2-5x+6}$有意义，需使 $x^2-5x+6\geqslant 0$. 解此不等式，得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 2$，所以函数 $y=\sqrt{x^2-5x+6}$的定义域为$(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$；

(2) $y=\ln(2x-5)$是由 $y=\ln u$，$u=2x-5$ 这两个函数复合而成的. 要使函数 $y=\ln(2x-5)$有意义，需使 $2x-5>0$. 解此不等式，得 $x>\dfrac{5}{2}$，所以函数 $y=\ln(2x-5)$的定义域为$\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$；

(3) $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$是由 $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\dfrac{1}{x}$这三个函数复合而成的. 要使函数 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$有意义，需使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 解此不等式，得 $x\leqslant -1$ 或者 $x\geqslant 1$，所以函数 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$的定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；

(4) $y=\lg(2+\sin^2 x)$是由 $y=\lg u$，$u=2+\sin^2 x$ 这两个函数复合而成的. 要使函数 $y=\lg(2+\sin^2 x)$有意义，需使 $2+\sin^2 x>0$，因此函数 $y=\lg(2+\sin^2 x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$；

(5) $y=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}\right)^2$是由 $y=u^2$，$u=\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}$这两个函数复合而成的. 要使函数 $y=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}\right)^2$有意义，需使 $x^2-2x-3\neq 0$，解得 $x\neq -1$，$x\neq 3$，因此函数 $y=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}\right)^2$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$.

应当指出：

1）并不是任何两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都可以复合成一个函数，例如：$y=\sqrt{u}$，$u=-x^2-1$ 就不能复合成一个复合函数，因为函数 $u=-x^2-1$ 的值域与函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域没有交集，即函数 $u=-x^2-1$ 的所有值都不在函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内.

2）由上述例题可以总结出分解复合函数的规律：前面几层都是基本初等函数，最后一层是基本初等函数或者是基本初等函数与常数的和、差、积、商的形式.

3）研究一个复合函数的复合过程时，要看每个层次的包含关系，各函数间是包含还是平行的关系．例如：$y=(2x+\sin^2x)^3$，我们发现函数 $y=u^3$ 包含 $u=2x+\sin^2x$；而函数 $2x$ 与 $\sin^2x$ 则没有包含关系．因此，从函数整体来看，此复合函数的复合过程只有两步，即 $y=u^3$，$u=2x+\sin^2x$．虽然 $\sin^2x$ 仍是一个复合函数，此时也不再分解.

三、初等函数

定义 2 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的函数，称为**初等函数**．初等函数能用一个式子表示.

例如，$y=\dfrac{(2\sin2x+\tan^2x)^3}{3x-\ln x}$，$y=\sqrt{x}+e^{2x}\cos4x$，$y=2^x+\arctan5x$ 等都是初等函数．对于分段函数，则需认真考察．一般地，分段函数若不能用一个式子表示，该分段函数就不是初等函数.

例如，分段函数 $y=\begin{cases}x & x\geqslant0\\ -x & x<0\end{cases}$ 可表示为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，它是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成的，因此它是一个初等函数.

又如，分段函数 $y=\begin{cases}x+1 & x\geqslant0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ 不能用一个式子表示出来，因此它不是初等函数.

初等函数是常见的函数，它是微积分研究的主要对象.

下面，我们简单介绍在应用中常见的双曲函数.

双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，

双曲正切 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

易见，它们的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，双曲正弦、双曲余弦、双曲正切的图像如图 1-1、图 1-2 所示．可以证明：双曲正弦和双曲正切为奇函数；双曲余弦为偶函数.

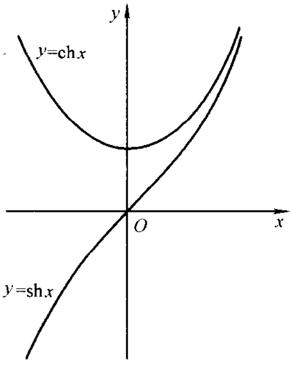


图 1-1

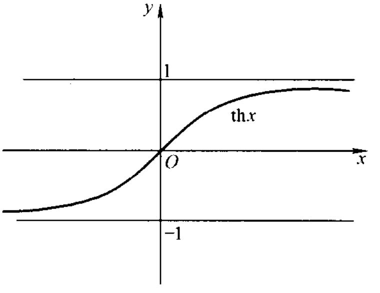


图 1-2

四、建立函数关系举例

运用数学工具解决实际问题时，往往需要先把变量之间的函数关系表示出来，才方便进行计算和分析.

例 3 某罐头厂要生产容积为 $V(\mathrm{cm}^3)$ 的圆柱形罐头盒，将它的表面积表示成底面半径的函数，并确定它的定义域.

解 设圆柱的底面半径为 r，高为 h，表面积为 S.

因为 $V=\pi r^2 h$，于是 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，根据圆柱表面积公式为 $S=2\pi r^2+2\pi rh$，所以有 $S=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}\quad r\in(0,+\infty)$.

例 4 如图 1-3 所示，电源的电压为 E，内阻为 r，负载电阻为 R，试建立输出功率 P 与负载电阻 R 的函数关系式.

解 设电路中的电流强度为 I，由电学知 $P=I^2R$，根据闭合电路的欧姆定律有 $I=\dfrac{E}{R+r}$，代入上式得 P 与 R 的函数关系为

$$P=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2 R\quad(R>0).$$

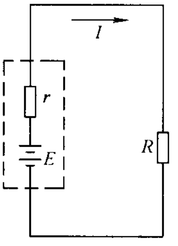


图 1-3

例 5 某运输公司规定一吨货物的运价为：在 a 公里内，每公里 k 元；超过 a 公里，每增加一公里为 $\dfrac{4}{5}k$ 元. 试表示运价 y 和里程 s 之间的函数关系式.

解 当里程在 a 公里内 $(0<s\leqslant a)$ 时，运价 $y=ks$；当里程超过 a 公里 $(s>a)$，则超过的里程为 $(s-a)$ 公里时，此时运价为

$$y = ka + \frac{4}{5}k(s-a)$$

于是
$$y = \begin{cases} ks & 0 \leqslant s \leqslant a \\ ka + \dfrac{4}{5}k(s-a) & s > a \end{cases}$$

这里，y 与 s 的函数关系是用分段函数表示的，函数的定义域为$[0, +\infty)$.

建立实际问题的函数关系，首先应理解题意，分析问题中的常量、变量，选定自变量，根据问题所给的几何特性、物理规律或其他知识建立变量间的等量关系，整理化简得出函数式. 有时还要根据给定条件确定函数式中的常数数值，然后根据题意，写出函数的定义域.

习题 1-1

1. 判断题：

(1) $y = \sin 2x$ 是基本初等函数； ( )

(2) $y = e^{-x}$是基本初等函数； ( )

(3) $y = \arcsin u$, $u = 1 + 2^x$ 的复合函数是 $y = \arcsin(1 + 2^x)$. ( )

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{2x-1}$；　　(2) $y = \log_2(5x-1) + \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$；

(3) $y = \arccos 2x + 3^{4x}$；　　(4) $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}$；

(5) $y = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ 0 & x = 0. \\ 3x + 5 & x > 0 \end{cases}$

3. 判断函数的奇偶性：

(1) $y = 2x^4 - \cos 3x$；　　(2) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$；

(3) $y = 5x^3 + 6x$；　　(4) $y = \sqrt{2x+5}$.

4. 已知$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$，求$f(-x)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$f(a+1)$、$f(f(x))$.

5. 作函数$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$ 的图像，并求$f(-3)$、$f(0)$、$f(a^2+1)$、$f(f(5))$.

6. 将 y 表示为 x 的函数：

(1) $y = \sin u$, $u = x^2 + 5$；　　(2) $y = \sqrt{u}$, $u = x + e^x$；

(3) $y = \log_2 u$, $u = v^3$, $v = \tan x + 5$；　　(4) $y = \arccos u$, $u = \dfrac{1-2x}{1+3x}$.

7. 分析下列函数的复合过程：

(1) $y=(1+x^3)^5$; (2) $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$;

(3) $y=\frac{1}{(1+2x)^3}$; (4) $y=2^{2\sin x}$;

(5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\ln(3x-2)}}$; (6) $y=(1+\arctan x^2)^3$.

8. 拟建一个容积为 V 的长方体水池，如果底为正方形，且其单位面积的造价是四周单位面积造价的 3 倍，试将造价 F 表示成池底面边长 x 的函数，并确定其定义域.

9. 一物体作直线运动，已知阻力 f 的大小与运动速度 v 成正比，且方向相反，当物体以 1m/s 的速度运动时，阻力为 1.96×10^{-2}N，建立阻力与速度之间的函数关系式.

10. 已知单三角脉冲电压，其波形如图 1-4 所示，建立电压 u(V)和时间 t(μs)之间的关系式.

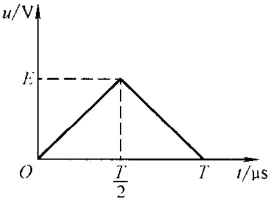


图 1-4

11. 某批发商店按照下列价格表成盒地批发销售某种盒装饮料：

当购货量小于或等于 20 盒时，每盒 2.40 元；当购货量小于或等于 50 盒时，其超过 20 盒的饮料每盒 2.20 元；当购货量小于或等于 100 盒时，其超过 50 盒的饮料每盒 2.00 元；当购货量大于 100 盒时，其超过 100 盒的饮料每盒 1.80 元. 设 y 是总价，x 是销售量，试建立总价与销售量间的函数关系式，并作出它的图像.

第二节　函数的极限

在这一节，我们将从数列或函数的变化趋势来研究极限的概念，通过观察和总结，归纳出极限的描述性概念.

一、数列 $x_n=f(n)$ 的极限

考察下面几个数列，当 n 无限增大时，x_n 数值的变化趋势：

(1) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$;

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$;

(3) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$;

(4) $1,2,4,8,16,\cdots,2^{n-1},\cdots$;

(5) $3,3,3,3,\cdots,3,\cdots$.

为清楚起见，我们把这五个函数的前 4 项分别在轴上表示出来(如图 1-5a、b、c、d、e 所示).

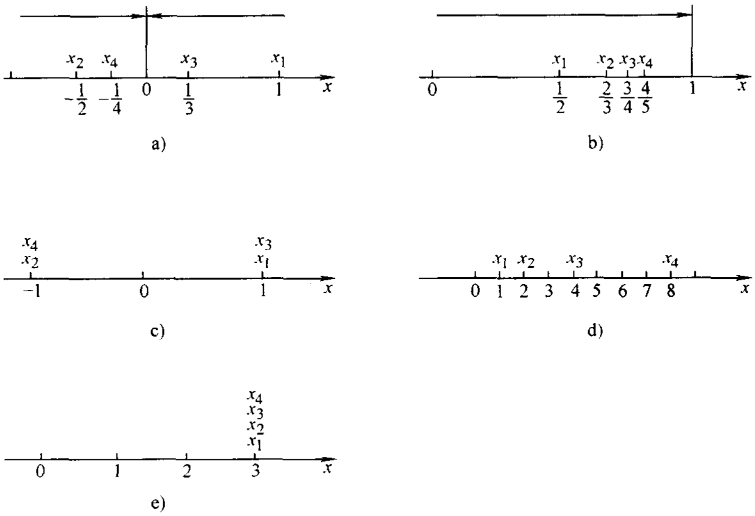


图 1-5

以上五个数列反映出的数列变化趋势，大体分为两类：当 n 无限增大时，一类 x_n 的数值无限接近于某一个常数，如图 1-5a、b、e 所示，当 n 无限增大时，数列 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$无限地靠近点 $x=0$，数列 $x_n=\frac{n}{n+1}$无限靠近点 $x=1$，数列 $x_n=3$ 任何一点都等于点 $x=3$；另一类则不能保持与某个常数无限接近，如图 1-5c、d 所示，数列(3)，当 n 无限增大时，其数值在 $x=1$ 与 $x=-1$ 来回跳动，数列(4)的数值则无限增大，它们都不能保持与某个常数无限接近. 这里主要讨论前一类情况.

定义 1 如果当 n 无限增大(记为 $n\to\infty$)时，数列 x_n 无限接近(或恒等于)一个确定的常数 A，则称 A 为数列 x_n 的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A \quad (当\ n\to\infty\ 时).$$

由定义 1 及图 1-5a、b、e 可知，$n\to\infty$ 时，数列 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的极限为 0，$x_n=\frac{n}{n+1}$的极限为 1，$x_n=3$ 的极限为 3. 它们可分别记为

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\ \lim_{n\to\infty}3=3$$

如果 $n\to\infty$ 时，x_n 不能无限接近一个确定的常数 A，则 x_n 的极限不存在. 例如 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$不存在.

例 1 考察数列的变化趋势，写出它们的极限：