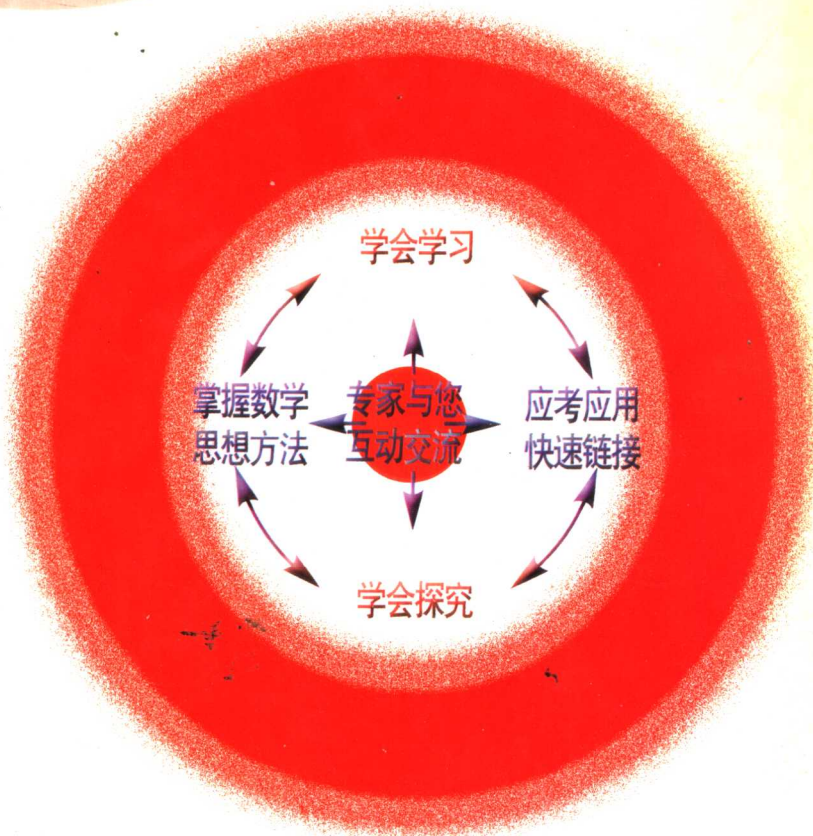


零距离数学交流

(初中卷)

# 学法与解法

罗增儒 编著



LINGJULISHUXUEJIAOLIUXUE

广西教育出版社

(初中卷)

LINGJULISHUXUEJIAOLIUXUEFA YU JIEFA

# 零距离数学交流 学法与解法

罗增儒 编著

广西教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

零距离数学交流. 初中卷: 学法与解法 / 罗增儒编著.  
南宁: 广西教育出版社, 2003. 5  
ISBN 7-5435-3576-9

I. 零… II. 罗… III. 数学课—初中—解题  
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 024769 号

零距离数学交流  
学法与解法(初中卷)

罗增儒 编著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号

邮政编码: 530022 电话: 5850219

本社网址 <http://www.gep.com.cn>

读者电子信箱 [master@gep.com.cn](mailto:master@gep.com.cn)

全国新华书店经销 广西民族印刷厂印刷

\*

开本 890×1240 1/32 5.25 印张 132 千字  
2003 年 5 月第 1 版 2003 年 5 月第 1 次印刷  
印数: 1—8 000 册

ISBN 7-5435-3576-9/G·2732 定价: 7.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与承印厂联系调换



## 内容简介

本书以数学思想方法为主线,首先从感性体验上组织为大学教授与中学生共同学习数学的有趣故事,寓十多种数学思想方法于具体的引导性、反思性学习过程之中;然后从理性把握上正面解读初中数学中七个主要解题方法的基本含义、基本形式、使用步骤与适用范围.丰富的例题涵盖了课本、中考、竞赛三个层面,并着意体现佳题巧解、难题简解、名题多解、陈题新解,具有初中数学知识即可根据自己的兴趣取向,分别从知识能力、方法思路、情感态度等多个维度上获得有益的营养.



## 前 言

本书的主题是谈数学思想方法,分别从数学学习和数学解题两个维度上展开,组织为从感性到理性逐层面提高的两篇.谁也无法教会我们解所有的题,重要的是,通过有限道题的学习去领悟那些能解决无限道题的数学思想方法!

### 1. 从一个“意外”的问题说起

下面是一道很普通的应用题(与鸡兔同笼属同一类型),但涉及一些观念层面上的道理,在与大学生和中学教师的交谈中,大都表示没有认真思考过.

题目:某送货公司有两种车型的车共 28 辆,甲型车可载重 5 吨,乙型车可载重 4 吨,如果各车满载一次可送货 128 吨,问这两种车型各有几辆?

用二元一次方程来处理这个问题,是一个简化的数学建模过程.通常设甲型车有  $x$  辆,乙型车有  $y$  辆,根据“两种车型的车共 28 辆”所提供的等量关系,可得方程

$$x + y = 28. \quad ①$$

再根据“甲型车可载重 5 吨,乙型车可载重 4 吨”,“各车满载一次可送货 128 吨”所提供的等量关系,又得方程

$$5x + 4y = 128. \quad ②$$

然后,将①式两边乘以 4,得

$$4x + 4y = 112. \quad ③$$

② - ③,得



$$x = 16, \quad \text{④}$$

代入①,得

$$y = 12. \quad \text{⑤}$$

所以,甲型车有 16 辆,乙型车有 12 辆.

就这个解答过程,笔者询问大学生或中学教师能提出什么疑问时,均认为很完整了,提不出什么问题来.于是笔者问:方程①反映的是车辆总辆数的一个平衡式,方程②反映的是车辆一次满运货量总吨数的一个平衡式,两者建立时的单位是不一致的,如何理解它们之间的加减运算呢?

对此,被询问者大都感到意外,不能马上作出回答.

从提不出问题到对所提的问题感到意外说明,在日常的教学或学习中,许多人都只停留在数学事实接受的浅层面上,缺少思想方法深层面上的领悟,也缺少领悟的自觉性.本书写作的一个动机,就是试图从初中阶段开始,部分地弥补这方面的缺陷.

## 2. 初中阶段的数学思想方法

这个问题没有“标准答案”.

(1) 通过对初中课本①出现或蕴涵的数学思想方法进行归类统计,认为主要的数学思想有:符号或字母表示数的思想,集合的思想,对应的思想,数形结合的思想,化归的思想,函数与方程的思想等.

主要的解题方法有:分析法,综合法,归纳法,分类讨论法,消元法,图像法,待定系数法,配方法,换元法,反证法等.此外还有一批技巧层次的方法.

(2) 上海朱成杰老师还对初中课本中数学思想方法出现的次数进行量化统计,得出如下频数分布表:

---

① 本书中出现的“初中课本”、“课本”等,在一纲多本的形势下,指初中阶段使用过的教材,并不特指某一本书.





| 数学思想方法 | 代数频数 | 几何频数 | 总频数 |
|--------|------|------|-----|
| 抽象概括   | 69   | 16   | 85  |
| 化 归    | 52   | 22   | 74  |
| 数学模型   | 49   | 59   | 108 |
| 数形结合   | 29   | 4    | 33  |
| 归纳猜想   | 28   | 13   | 41  |
| 分 类    | 16   | 11   | 27  |
| 类 比    | 20   | 6    | 26  |
| 特殊化    | 24   | 21   | 45  |
| 演 绎    | 37   | 66   | 103 |
| 完全归纳法  | 0    | 2    | 2   |
| 反证法    | 0    | 8    | 8   |
| 换元法    | 21   | 0    | 21  |
| 待定系数法  | 9    | 0    | 9   |
| 配方法    | 6    | 0    | 6   |

读者还可根据自己的学习体会进行归类总结,并把类型、方法和范例作为一个整体来积累.类型是骨架,范例是血肉,方法是灵魂,三者缺一不可.

本书围绕着这些基本认识有侧重地展开,着力体现知识与技能,过程与方法,情感、态度、价值观三维目标.当中渗透了笔者对“数学解题论”的研究体会,如通过分析解题过程来学会解题的观点,进行解题过程思维分析的做法,对解题策略的运用和对数学美的阐发等.

### 3. 本书的基本框架





本书从两个维度来谈数学思想方法。

第一个是学习论的维度。精选了初中数学中的一批典型课题,组织为大学教授启引诱导、中学生探索发现的12个探究性学例。叙述上,重在学生数学素质的提高和学习方法的点拨,是师生共同领悟数学思想方法;内容上,既有知识内容的学习案例,又有数学解题的学习案例,既有从肤浅到深刻的反思提高,又有正确与错误的情感碰撞;形式上,突破数学写作的常规,从标题到描写都采用了文学笔法。希望能通过具体形象的学习过程去获取“学会学习”的生动启示。在这一维度上,更注重于学习者的感性体验和各种数学思想方法的综合领悟。

第二个是解题论的维度。较为系统地介绍了初中数学中的主要方法,组织为7个专题讲座,详略不等地解读方法的基本含义、方法的基本形式、方法的使用步骤、方法的适用范围等。当中均有典型例题作支撑,或是通过具体的范例来提炼方法,或是通过具体的范例来巩固方法,希望能在正面的理论学习中深入到掌握与运用的较高层次。在这一维度上,更注重于理性把握和专题领悟。

还要提起的是,本书每一节末所附的“阅读思考”题是正文的有机组成部分,不仅有消化巩固的作用,而且有深化提高的功能。书末所给出的“思考提示”,仅仅是部分思路的提示,可作为“百思不解”时的交流,但无意妨碍读者的发散性思考与创造性解决。

最后指出,本书是拙著《零距离数学交流·体验与探究(高中卷)》的姊妹篇,该书继续推动学生的数学写作,着力组织专家的析评点拨,这就形成了一条拾级登高的新轨迹,即广西教育出版社为中学生铺设的课外阅读新通道,包括:学会学习——掌握数学思想方法——进行初步的探究——自始至终的专家指导。

仅以本书与中学生分享学数学的喜怒哀乐。

罗增儒

2003年3月于陕西师范大学





# 目 录

## 前 言

### 学习篇：聪聪学数学

- 一 浅尝引导性学习 初获理论性提高 ..... (2)
  - 从一道方程说起 .....
- 二 训练观察和记忆 沟通直觉与逻辑 ..... (6)
  - 再议丢番图的墓碑趣题 .....
- 三 从失误走向成功 由检验导致发现 ..... (10)
  - 一波三折的溶液互倒 .....
- 四 身边有数学道理 提炼无年级高低 ..... (16)
  - 从糖水加糖到真分数不等式 .....
- 五 再认识解题过程 能开发解题智慧 ..... (20)
  - 一个几何定理的剖析 .....
- 六 特殊化好寻思路 一般化更显特征 ..... (24)
  - 正方形阴影问题的对称美感知 .....
- 七 透过技巧悟本质 体验过程作推广 ..... (28)
  - 用对应观点看“空瓶兑换” .....
- 八 分析法找新配方 小变形换旧推导 ..... (34)
  - 二次方程求根公式的研究 .....
- 九 结构功能初露美 应用扩展新发芽 ..... (39)
  - 二次方程求根公式的理解 .....





- 十 差异分析显身手 构造方程出奇招  
——猜透命题人的原始意图 ..... (43)
- 十一 正是怪圈回旋处 荡开妙解趣连环  
——负数进入应用题 ..... (47)
- 十二 走街踏夜谈数学 催思入境建模型  
——两个几何命题的情境与发现 ..... (54)

### 解题篇：方法与思路

- 一 构造法  
..... (60)
- 二 差异分析法  
..... (74)
- 三 待定参数法  
..... (80)
- 四 配方法  
..... (87)
- 五 换元法  
..... (97)
- 六 反证法  
..... (104)
- 七 数形结合  
..... (110)

### 阅读思考的提示



# 学习篇：聪聪学数学<sup>①</sup>

这里记录了一个初中学生(聪聪)与大学教授(罗教授)共同学数学的12个故事。真的,这些都只是故事,人物的构成、学习的情节、写作的笔法,都那么富于文学气息,同时还有点哲理。

通常,每一节的标题就是该节的主题,副标题是表达主题的载体。读者可以像看散文或电视连续剧一样看这些故事。如果愿意,你还可以就故事本身或所配置的阅读思考题与作者继续交流——让中学生与大学教授对话,这不失为一个有创意的构思。

<sup>①</sup> 本篇中的原型内容曾在广东省教育厅主办的《第二课堂》杂志上连载,此处作了修订与补充。





## 课堂引导性学习 初获理论性提高

### ——从一道方程说起

聪聪是个活泼好动的初中生,像其他大多数同学一样,小学时有过语文、数学双高分的记录.据说进入初中之后,数学成绩平平,既不拔尖也不落后,课本的内容都能掌握,而遇到稍为灵活变化的题型就束手无策了.

罗老师是师范大学的一位教授,专门研究数学教育,他与聪聪怎么走到一起、共同学数学的,就不太清楚了,而今天是他们学习的第一课却千真万确.

这一天,为了了解聪聪的数学基础,罗教授随手翻开课本<sup>①</sup>,给他出了一道题目:

解方程

$$0.5x = 10.5. \quad \text{①}$$

聪聪立即完成了解答:

$$x = \frac{10.5}{0.5} = \frac{105}{5} = 21.$$

罗教授也立即看出了聪聪的毛病,请他继续解方程

$$0.25x = 10.5,$$

$$0.125x = 10.5.$$

聪聪飞快地列出算式

$$x = \frac{10.5}{0.25} = \frac{1050}{25} = \dots \quad \text{②}$$

① 本书中出现的“课本”,在一纲多本的形势下,指初中阶段使用过的教材,并不特指某一本书.



$$x = \frac{10.5}{0.125} = \frac{10500}{125} = \dots \quad (3)$$

却没有算下去,抬头看了看教授,仿佛说:“题目另有用意。”罗教授笑了笑,既是默认有用意,又是提醒他——尚未猜透。

“淘气的男孩是好的,淘气的女孩是巧的。”聪聪很快就灵机一动,得出

$$x = \frac{10.5}{0.25} = \frac{10.5 \times 4}{0.25 \times 4} = 10.5 \times 4 = 42,$$

$$x = \frac{10.5}{0.125} = \frac{10.5 \times 8}{0.125 \times 8} = 10.5 \times 8 = 84.$$

罗教授:聪聪,你已经冲破了“敌人”的防线,何不直捣“司令部”呢?

聪聪满以为已经取得最后胜利,未料到才是“突破防线”,在喃喃自语:司令部?什么是“司令部”?“司令部”在哪里?

罗教授没有回答他,反而问:“你为什么开头有点犹豫,后来又迅速算出来了呢?”

聪聪:我一看②、③式做多位数除法很麻烦,猜想应有捷径;后来看到 0.5, 0.25, 0.125 分别是  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ , 可以很方便地将分母变成 1, 从而避免了多位数的除法。

罗教授肯定了他的思路,继续问:为什么会出现麻烦的多位数除法呢?题目本身并没有除法,你用除法的目的是什么呢?

聪聪:就是为了把方程  $ax = b (a \neq 0)$  中未知数的系数变成 1。

罗教授:对,为了把未知数的系数变成 1,你用了除法,得出  $x = \frac{b}{a}$ ;为了避免麻烦的多位数除法,你又把分母变为 1,即找一个  $c$ , 使它为  $a$  的倒数,  $c = \frac{1}{a}$ , 从而

$$x = \frac{b}{a} = \frac{b \times c}{a \times c} = b \times c. \quad (4)$$





这两个变成1有什么关系呢?

聪聪:我明白了,在④式里,中间两个式子是多余的.为了把 $ax=b$ 中未知数的系数化成1,除以 $a$ 是一个通用途径,这与乘以 $c$ ( $a$ 的倒数)是一样的,当 $\frac{1}{a}$ 的表达更简单时,乘以 $\frac{1}{a}$ 就是更好的途径.上面的三个方程应该分别乘以2、4、8,得

$$x = 10.5 \times 2 = 21,$$

$$x = 10.5 \times 4 = 42,$$

$$x = 10.5 \times 8 = 84.$$

罗教授:很好,你对解方程的第5步认识已大大深化,那么“去分母、去括号、移项、合并同类项”你又是怎样认识的呢?

聪聪:为了化成 $ax=b$ 的形式.

罗教授:这个形式有什么特点?

聪聪:未知数与已知数分别在方程的两边.

罗教授:怎样才能把未知数与已知数分隔到方程的两边呢?

聪聪:移项.

罗教授:如果已知数与未知数“绑”在一起,你想移未知数时就带上了已知数,你想移已知数时就带上了未知数,这怎么办?

聪聪:我明白了,“去分母、去括号”是“松绑”,把未知数与已知数拆开;“移项、合并同类项”是把未知数与已知数分隔到方程的两边,并将它们分别合并成 $ax=b$ 的形式;最后将未知数的系数化成1,便解出了方程.

罗教授对聪聪的理解能力感到满意,在这短短的对话里,聪聪实际上已经完成了两件非常有意义的工作:

1. 通过对解题过程的回顾与分析,删去了多余的思维回路,开发出解题智慧.

2. 通过对解题实践的总结,达到了对一元一次方程求解步骤的本质领悟,并形成了自己的认识:拆开——分隔——系数化成1.

(1) 拆开,是指将已知数与未知数拆开,其方法是去分母、去括



号.

(2) 分隔,是指将已知数与未知数分隔到方程的两边,其方法是移项、合并同类项,得  $ax = b$ .

(3) 系数化成 1,这就求出  $x = \frac{b}{a}$ ,其方法是除以  $a$  或乘以  $\frac{1}{a}$ ,而用除法还是用乘法,取决于运算的方便简捷.

聪聪也对这次活动感到满意,特别是在数学思考的自尊与自信方面,获得了明显的恢复和微微的激励.



### 阅读思考 1.1

1. 聪聪立即完成第①个方程的求解时,罗教授也立即看出了聪聪的毛病,这个“毛病”是什么呢? 罗教授又是怎样启发聪聪自己去认识与改进的?

2. 聪聪继续完成另外两个方程的求解后,罗教授鼓励他直捣“司令部”,这里说的“直捣司令部”是什么意思呢?

3. 先按程序解方程

$$x - \frac{1}{3} \left[ x - \frac{1}{3}(x-9) \right] = \frac{1}{9}(x-9),$$

然后想一想,还有更简单的解法吗? 根据这个体验,你能从解方程的程序中获得什么理解?

4. 解方程:

$$(1) \frac{4x-1.5}{0.5} - \frac{5x-0.8}{0.2} = \frac{1.2-x}{0.1};$$

$$(2) \frac{3}{4} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) - 8 \right] = \frac{3}{2}x + 1.$$





## 训练观察和记忆 沟通直觉与逻辑

### ——再议丢番图的墓碑趣题

针对聪聪学数学不够灵活的实际情况,罗教授建议他大胆做课本“想一想”栏目<sup>①</sup>中的问题.作为示例,罗教授给出了希腊数学家丢番图的墓碑趣题:

他生命的六分之一是幸福的童年;再活了他寿命的十二分之一,两颊长起了细微的胡须;他结了婚,又度过了一生的七分之一;再过五年,他有了儿子,感到很幸福;可是儿子只活了他父亲全部年龄的一半;儿子死后,他在极度悲痛中度过了四年,也与世长辞了.请回答:

- (1) 他结婚时的年龄;
- (2) 他开始当爸爸的年龄;
- (3) 他儿子死时他的年龄;
- (4) 他去世时的年龄.

聪聪说,这个问题老师讲过,关键是求出丢番图的年龄,设为  $x$ ; 然后,将其表示为生命中 6 个阶段之和,可得方程

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

但是,聪聪已经忘了方程的根是多少.他正要动手解的时候,罗教授阻止了他.

罗教授认为,根据上一次的谈话,聪聪应用解方程的 5 个步骤求出  $x$  应不成问题;对于应用题,他能找到等量关系,列出方程,关键与难点也解决了.罗教授想锻炼他的灵活性,要求他不解方程,估算出根来.

<sup>①</sup> 在初中课本中,有“想一想”栏目,提供一些拓展性的内容.





聪聪有点为难,但还是进行认真的思考.由于短时记忆<sup>①</sup>能力不足,分数加法

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2}$$

的心算怎么也过不去.

罗教授看出来了,启发聪聪说,估算不是准确计算,关键是抓住特征.那么,应该观察哪些数字的特征呢?聪聪沉默.

罗教授决定作小步子启发,问: $x$ 是什么数?

聪聪:未知数.

罗教授意识到提问有点笼统,马上具体化:这也是一个回答,但如果我想问的是,在实数的分类中, $x$ 属于哪一类,你怎么回答?

聪聪:应属于正整数.

罗教授:同样, $\frac{x}{6}, \frac{x}{12}, \frac{x}{7}, \frac{x}{2}$ 分别是什么数?

聪聪:也是正整数.

罗教授:为了保证它们都是正整数, $x$ 与各分母之间应有什么关系?

聪聪:我明白了, $x$ 应该是12与7的公倍数,从最小公倍数 $12 \times 7 = 84$ 开始,乘以2,3……得168,252……

罗教授:按正常情况,人一般能活多少岁?

聪聪:对了,答案是84岁.

聪聪很高兴,因为这一次是他自己找出来的,而不是听老师说的.

罗教授立即将进程推向下一阶段,说:84岁是抓住题目主要特征和生活基本常识估算出来的,你能严格证实它吗?

聪聪:可以,代入原方程验证,符合题意就行了.

正当聪聪要拿笔验算时,罗教授又阻止了他,要他心算完成.

<sup>①</sup> 一般认为,短时记忆最多只能贮存7个左右的信息项目,持续二三十秒钟,一旦超过了这个数目,新的信息进来,就会把部分原有信息赶走.

