新课程标准教材编写组老师编写

博客教育
www.modeblog.com

博客博 2006年考前

黄金版

按教育部新考纲编写/涵盖各大版本

高考总复习

(数学)

高考命题老师编纂
科学准确、权威指导

全面解析考试大纲
高考前瞻、考点明晰

预测 2006 高考热点
综合提炼、要点突出

2006

博客教育考试研究组成果
RESULT OF MODEBLOG EDUCATION'S EXAMINATION RESEARCHING GROUP

远方出版社

新课程标准教材编写组老师编写

博客教育
www.modeblog.com

博客博 2006年考前

黄金版

按教育部新考纲编写/涵盖各大版本

高考总复习

（数学）

高考命题老师编纂
科学准确、权威指导

全面解析考试大纲
高考前瞻、考点明晰

预测2006年高考热点
综合提炼、要点突出

2006

博客教育考试研究组成果
RESULT OF MODEBOLG EDUCATION' S EXAMINATION RESEARCHING GROUP

远方出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高考总复习》·数学 / 廖明秋主编. 呼和浩特:远方出版社,2005
ISBN 7-80723-107-6

I. 高... II. 廖... III. 数学课— 高中 — 升学参考资料
IV.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 134422 号

博客教育
www.modeblog.com
《高考总复习》·数学

总监制:饶少敏

责任编辑: 李燕
美术编辑:张海艳

行销企划 / 北京博客教育投资中心
电话:010-84642585
http://www.modeblog.com
E-mail:modeblog@163.com

主编:廖明秋
出版发行:远方出版社
地址:呼和浩特市乌兰察布东路 666 号
邮编:010010
经销:各地新华书店
印刷:北京市金红发印刷厂
开本:1/16,787 × 1092mm
字数:3800 千字
印张:108 印张
版次:2005 年 11 月第 1 版
印次:2005 年 11 月第 1 次印刷
标准书号:ISBN 7-80723-107-6/G·49
定价:153 元(全 9 册)本册定价:17 元

Preface
前言

《高考总复习》丛书是由新课标教材编写组老师根据新考纲的特点而编纂。丛书突出三大主科的基础性，强化其他学科的渗透性，聚焦跨学科的综合性，具有贴近教改、针对性强，理念超前、操作性强，材料新颖等特点。

丛书按专题结构全书，每个专题首先提纲挈领，并设置四个板块，总领该专题主要内容。即，“知识网络”用图表勾画出知识点之间的关系，“知识要点聚焦”点出关键概念，“高考要求概述”指明考纲要求，“高考前瞻”预测考试热点。

专题下的重点和难点内容，在每节中加以阐释。每节设置七个栏目，即“大纲要求”、“知识要点”、“方法大观”、“失误剖析”、“思维拓展”、“经典回放”、“试题预测”。在吃透新考纲的基础上，对各个知识点进行全面系统地梳理和讲解，把握重点，突破难点。对各个考点的解题思路、解题技巧进行整体把握，注重一题多解，思维拓展，突出方法与规律的归纳与点拨。针对学习中易出现的问题，深入剖析典型错误的原因。对往届高考题或模拟题进行精讲精析，同时分析和预测高考命题趋向和考试热点，然后通过预测题的练习，迅速提升考生的应试能力。

我们相信，这套丛书能为处于紧张复习过程中的各位考生节省大量时间和精力，帮助他们迅速提高考试成绩。由于编写时间紧迫和水平所限，书中难免存在一些不足和问题，欢迎广大师生批评指正，以便再版时完善。

《高考总复习》丛书 编辑部

2005 年 11 月

目录

专题一　集合与简易逻辑

专题二　函数

专题三　数列

专题四　三角函数

专题五　平面向量

专题六　不等式

专题七　直线和圆的方程

专题八　圆锥曲线

专题九　直线、平面、简单几何体

专题十　排列组合和概率

专题十一　概率与统计

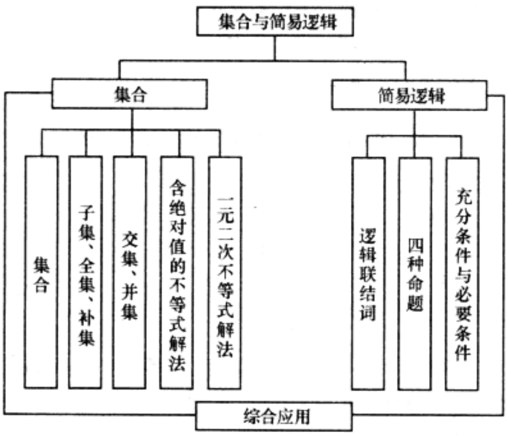
专题十二　极限

专题十三　导数

专题十四　复数

专题一　集合与简易逻辑

知识网络



知识要点聚集

集合、子集、交集、并集、补集的概念
空集、全集的意义
属于、包含、相等的意义
逻辑联结词“或”、“且”、“非”的意义
四种命题及相互关系
充要条件

高考要求概述

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念. 了解空集和全集的意义. 了解属于、包含、相等关系的意义. 掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

2. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义. 理解四种命题及其相互关系. 掌握充要条件的意义.

高考前瞻

本专题包括二个相关联又相对独立的内容:集合、简易逻辑,这两个内容都是中学数学的基础.

考试热点之一是集合,主要考查以下两方面:一是对集合基本概念的认识和理解的水平,如集合的表示方法、元素与集合之间的关系、集合与集合之间的关系,集合的运算,二是考查对集合知识的应用水平,如求不等式和不等式的解集,列不等式或不等式组,用解集解决相关问题.

考点一　集合的概念与运算

大纲要求

集合的相关概念,集合的表示与集合间的关系与运算.

知识要点

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念;掌握集合术语和符号.

2. 弄清和理解集合中元素的属性,能够将符号语言、文字语言、图形语言进行相互转化.

方法大观

对于集合问题,要确定属于哪一类集合(数集、点集或某类图形),然后再确定处理方法. 下面结合具体例题加以说明.

方法一　分类讨论思想:

【例 1】 设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$, $B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,

(1) 若 $B\subseteq A$,求 a 的值;

(2) 若 $A\subseteq B$,求 a 的值.

【解析】 $A=\{0,-4\}$,

(1)$\because B\subseteq A$， $\therefore B=A$ 或 $B\subsetneq A$.

若 $0\in B$,则 $a^2-1=0$ 解得 $a=\pm1$.

当 $a=1$ 时,$B=\{x|x^2+4x=0\}=A$;

当 $a=-1$ 时,$B=\{0\}\subsetneq A$.

若 $-4\in B$,则 $a^2-8a+7=0$ 解得 $a=7$ 或 $a=1$.

当 $a=7$ 时,$B=\{x|x^2+16x+48=0\}=\{-12,-4\}\not\subseteq A$.

若 $B=\emptyset$,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a-1)^2<0$,

解得 $a<-1$.

综上所述得 $a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

(2)$\because A\subseteq B$,$\therefore A=B$ 或 $A\subseteq B$.

$\because A=\{0,-4\}$,

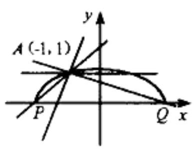
而 B 中最多有两个元素.

$\therefore A=B$,解得 $a=1$.

方法二 数形结合思想:

【例2】 已知集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases},\theta\in[0,\pi]\right\}$,$B=\{(x,y)|y=kx+k+1\}$,若 $A\cap B$ 含有两个元素,则 $k\in$______.

【解析】 集合 A 表示的点集是上半个椭圆,而集合 B 表示的点集是过定点$(-1,1)$的直线,如图:



将直线 $y=kx+k+1$ 代入方程

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

得 $(4k^2+1)x^2+8k(k+1)x+4(k+1)^2-4=0$

$\Delta>0$ 则 $k<0$ 或 $k>\frac{2}{3}$,

又 $P(-1,0)$,$Q(1,0)$ 且 $R_{AP}=1$,$R_{AQ}=-\frac{1}{3}$.

由图可知当$\frac{2}{3}<k\leqslant1$ 或 $-\frac{1}{3}\leqslant k<0$,直线与曲线有两个交点.

故 k 的取值范围:$k\in\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right]$

失误剖析

【例1】 已知 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$,$B=\{x|x^2+4x+p<0\}$,若 $A\cup B=A$,试研究实数 p 的取值范围.

【错解】 由于 $A\cup B=A$,可知 $B\subseteq A$.

所以必须 $-2+\sqrt{4-p}\leqslant-1$,解得:$3\leqslant p<4$;

所以 p 的范围是$[3,4)$

【错因】 理解条件 $A\cup B=A$ 是解题的关键.要注意考虑:B 为非空集合或空集两种情形.

【正解】 由 $A\cup B=A$,可知 $B\subseteq A$.

当 $B=\emptyset$ 时,对于二次三项式 x^2+4x+p 当 $\Delta=4^2-4p\leqslant0$,即 $p\geqslant4$,满足题意;

当 $B\neq\emptyset$ 即 $p<4$ 时,要满足 $B\subseteq A$,必须 $-2+\sqrt{4-p}\leqslant-1$,解得:$3\leqslant p<4$;

综上所述,p 的取值范围是 $p\geqslant3$.

试题预测

【预测1】 已知集合 $A=\{0,2,3\}$,$B=\{x|x=a\cdot b,a、b\in A\}$,则 B 的子集个数是(　　).

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 15

【预测2】 若 $a>b>0$,集合 $M=\left\{x|b<x<\frac{a+b}{2}\right\}$,$N=\{x|\sqrt{ab}<x<a\}$,则 $M\cap N$ 表示的集合为(　　).

A. $\{x|b<x<\sqrt{ab}\}$

B. $\{x|b<x<a\}$

C. $\left\{x|\sqrt{ab}<x<\frac{a+b}{2}\right\}$

D. $\left\{x|\frac{a+b}{2}<x<a\right\}$

【预测3】 两个集合 A 与 B 之差记作"A/B",定义为:$A/B=\{x|x\in A$,且 $x\notin B\}$,如果集合 $A=\{x|\log_2x<1,x\in\mathbf{R}\}$,集合 $B=\{x||x-2|<1,x\in\mathbf{R}\}$,那么 A/B 等于(　　).

A. $\{x|x\leqslant1\}$　　B. $\{x|x\geqslant3\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|0<x\leqslant1\}$

【预测4】 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x>1\}$,$P=\{x|x^2>1\}$,则下列关系中正确的是(　　).

A. $M=P$　　B. $P\subsetneq M$

C. $M\subsetneq P$　　D. $C_UM\cap P=\emptyset$

【预测5】 设全集 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x|0<x<\frac{5}{2}\}$,$B=\{x|x\geqslant\frac{2}{3}$或 $x\leqslant-\frac{1}{2}\}$,则 $C_UA=$____,$C_UB=$____.$C_UA\cap C_UB=$______.

【预测6】 设 A、B 分别是二次方程:$2x^2+px+q=0$ 与 $6x^2+(2-p)x+5+q=0$ 的解集,且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$,求集合 A、B.

考点二　绝对值不等式及一元二次不等式的解法

大纲要求

1. 掌握含有绝对值不等式的解法.
2. 掌握一元二次不等式的解法.
3. 掌握可化为一元二次不等式与不等式组的解法.
4. 能运用一元二次不等式的有关知识解决实际问题.

知识要点

1. 一元二次不等式的解集，一元二次方程，对应的二次函数三者之间的关系.

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根			
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集			
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集			

2. 几个重要结论

(1)不等式$\dfrac{x-a}{x-b}>0$　$(a<b)$的解集是$\{x|x<a$ 或 $x>b\}$；

(2)不等式$\dfrac{x-a}{x-b}<0$　$(a<b)$的解集是$\{x|a<x<b\}$；

(3)不等式 $ax^2+bx+c>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的条件是$\begin{cases}a=b=0\\c>0\end{cases}$或$\begin{cases}a>0\\\Delta=b^2-4ac<0\end{cases}$；

方法大观

一、含绝对值不等式的解法

方法一：平方法

所谓平方法是指对绝对值不等式两边平方以去除绝对值符号，避免讨论的一种方法.

方法二：零点分段法

所谓"零点分段法"是指：设数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是分别使含有$|x-x_1|,|x-x_2|,\cdots,|x-x_n|$的代数式中相应的一个绝对值为零，称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应绝对值的零点，零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 将数轴分为 $n+1$ 段，利用绝对值的意义化去绝对值符号，从而得到代数式在各段上的简化式，从而化为不含绝对值的不等式组来解. 这种方法就叫做"零点分段法"，通常适用于含有两个以上的绝对值符号的不等式.

方法三：定义法

即根据绝对值的定义解不等式.

【例3】　解下列不等式：

(1)$|\dfrac{1}{3}x|\leqslant5$；

(2)$|2x-3|<2$.

【解析】　(1)定义法去绝对值.

因一个数的绝对值，它表示这个点离开原点的距离，则原不等式可化为 $-5\leqslant\dfrac{1}{3}x\leqslant5$，

所以　$-15\leqslant x\leqslant15$.

(2)分段讨论法去绝对值.

①当 $2x-3\geqslant0$ 即 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$时　$|2x-3|=2x-3$，从而

$2x-3<2$　解得 $x<\dfrac{5}{2}$，

所以　$\dfrac{3}{2}\leqslant x<\dfrac{5}{2}$；

②当 $2x-3<0$ 即 $x<\dfrac{3}{2}$时，$|2x-3|=-(2x-3)$，从而 $-(2x-3)<2$

解得 $x>\dfrac{1}{2}$，

所以　$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$.

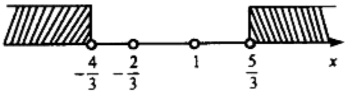
由①②可得原不等式的解集为$\{x|\dfrac{1}{2}<x\dfrac{5}{2}\}$

方法四：数形结合法

【例4】　解不等式$|x+\dfrac{2}{3}|+|x-1|>3$.

【解析】　原不等式表示数轴上一点到 $-\dfrac{2}{3}$及 1 的距离和大于 3，而 $-\dfrac{4}{3}$及$\dfrac{5}{3}$到 $-\dfrac{1}{3}$与 1 的距离之和是 3，由下图可知 $-\dfrac{4}{3}$左方的点与$\dfrac{5}{3}$右方的点符合不等式.

$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x|x<-\dfrac{4}{3}$或 $x>\dfrac{5}{3}\}$



二、一元二次不等式的解法

方法一:分类讨论法

【例5】 解关于 x 的不等式 $ax^2-2\geqslant 2x-ax(a\in\mathbf{R})$.

【解析】 由于不等式中最高次幂系数为 a,$(a\in\mathbf{R})$,因而它可能为零,也可能大于零或小于零. 因此,需要对 a 进行分类讨论.

原不等式变形为 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant 0$,

①$a=0$ 时,$x\leqslant -1$;

②$a\neq 0$ 时,不等式即为 $(ax-2)(x+1)\geqslant 0$.

当 $a>0$ 时,$x\geqslant\frac{2}{a}$ 或 $x\leqslant -1$,

由于 $\frac{2}{a}-(-1)=\frac{a+2}{a}$.

于是,当 $-2<a<0$ 时,$\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$.

当 $a=-2$ 时,$x=-1$,当 $a<-2$ 时,$-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}$.

综上所述,$a=0$ 时,$x\leqslant -1$;

$a>0$ 时,$x\geqslant\frac{2}{a}$ 或 $x\leqslant -1$;

$-2<a<0$ 时,$\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$;

$a=-2$ 时,$x=-1$;$a<-2$ 时,$-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}$.

注意:对于含字母参数的不等式要分类讨论解决,分类时要掌握好分类标准,做到不重不漏,对特殊的情况要特殊考虑.

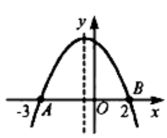
方法二:运用数形结合法解决不等式问题

【例6】 已知函数 $f(x)=ax^2+(b-8)x-a-ab$,当 $x\in(-3,2)$ 时 $f(x)>0$;当 $x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ 时 $f(x)<0$.

(1)求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内的值域.

(2)c 为何值,$ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

【解析】 由题意知 $f(x)$ 的图像是开口向下,交 x 轴于两点 $A(-3,0)$ 和 $B(2,0)$ 的抛物线,对称轴 $x=-\frac{1}{2}$(如右图),



那么 $x=-3$ 和 $x=2$ 时,$y=0$.

代入原式 $\begin{cases}0=a(-3)^2+(b-8)\times(-3)-a-ab,\\0=ax2^2+(b-8)\times 2-a-ab,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=0,\\b=8.\end{cases}$(舍) 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=5.\end{cases}$ $\therefore f(x)=-3x^2-3x+18$.

(1)由图可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内单调递减.

$\therefore y_{\min}=f(1)=12$;$y_{\max}=f(0)=18$,值域为 $[12,18]$.

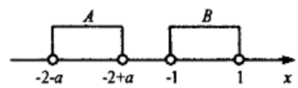
(2)令 $g(x)=-3x^2+5x+c\leqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

即 $\Delta\leqslant 0$ $\therefore c\leqslant -\frac{25}{12}$.

失误剖析

【例1】 设集合 $A=\{x\,|\,|x+2|<a\}$,$B=\{x\,|\,\frac{x^2+4|x|}{x^2+4}<1\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

【错解】 由已知,当 $a>0$ 时,$A=\{x\,|-2-a<x<-2+a\}$,$B=\{x\,|\,x^2+4|x|<x^2+4\}=\{x\,|\,|x|<1\}=\{x\,|-1<x<1\}$.(如下图)



$\because A\cap B=\varnothing$

$\therefore\begin{cases}-2+a\leqslant -1\\a>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2-a\geqslant 1\\a>0.\end{cases}$

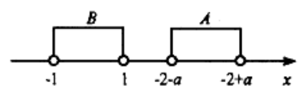
解之得 $0<a\leqslant 1$

【错因】 其实当 $A=\varnothing$ 时,$A\cap B=\varnothing$ 也成立,

而上面的解法中没有考虑.

【正解】 (1)当 $A=\varnothing$ 即 $a\leqslant 0$ 时 $A\cap B=\varnothing$ 成立;

(2)当 $A\neq\varnothing$ 时,此时 $a>0$,$A=\{x\,|-2-a<x<-2+a\}$,$B=\{x\,|-1<x<1\}$(如下图)



$\because A\cap B=\varnothing$,

$\therefore\begin{cases}-2+a\leqslant -1\\a>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2-a\geqslant 1\\a>0.\end{cases}$

解之得 $0<a\leqslant 1$.

故所求符合条件的 a 的取值范围是 $a\leqslant 1$.

【例2】 若不等式 $\frac{x^2-8x+20}{mx^2-mx-1}<0$ 对一切 x 恒成立,求实数 m 的范围.

【错解】 由 $x^2-8x+20=(x-4)^2+4>0$ 知要使原不等式成立,则 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立. 所以

$\begin{cases}m<0\\\Delta=m^2+4m<0\end{cases}$ 解之得 $-4<m<0$.

【剖析】 上述解题过程中只考虑到 mx^2-mx-1 为二次式的情况. 其实它非二次式时也可能小于零恒成立.

【正解】 $\because x^2-8x+20=(x-4)^2+4>0$ 恒成立,$\therefore$ 要使原不等式恒成立,只须 $mx^2-mx-1<0$. 恒成立.

①当 $m=0$ 时,$mx^2-mx-1<0$ 恒成立;

②当 $m\neq0$ 时，$\begin{cases}m<0\\ \Delta=m^2+4m<0,\end{cases}$

解之得 $-4<m<0$.

综合①、②得，$-4<m\leq0$.

试题预测

【预测1】 若不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）.

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-2,2]$

C. $(-2,2]$　　D. $(-\infty,2)$

【预测2】 已知二次函数 $f(x)=4x^2-2(P-2)x-2P^2-P+1$，若在区间 $[-1,1]$ 内至少存在一个实数 C，使 $f(C)>0$，则实数 P 的取值范围是（　　）.

A. $(-\frac{1}{2},1)$　　B. $(-3,-\frac{1}{2})$

C. $(-3,\frac{3}{2})$　　D. $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

【预测3】 不等式 $\frac{1}{x-1}\geqslant\frac{1}{x^2-1}$ 的解集为（　　）.

A. $(1,+\infty)$　　B. $[0,1)\cup(1,+\infty)$

C. $[0,+\infty)$　　D. $(-1,0]\cup(1+\infty)$

【预测4】 若不等式 $|x-4|+|3-x|<a$ 的解集为空集，则实数 a 的取值范围是______.

【预测5】 已知不等式 $x^2+mx+n>0$ 的解集是 $x<-1$ 或 $x>2$，则 $m=$______，$n=$______.

【预测6】 解不等式 $\frac{x^2+2x-8}{x+3}\leqslant0$.

考点三　逻辑与联结词

大纲要求

命题的基本知识，四种命题及其相互关系，充要条件的意义.

知识要点

1. 逻辑联结词

(1)命题：可以判断真假的语句叫做命题.

(2)逻辑联结词："或"、"且"、"非"这些词叫做逻辑联结词.

或：两个简单命题至少一个成立；

且：两个简单命题都成立；

非：对一个命题的否定.

(3)简单命题与复合命题：不含逻辑联结词的命题叫简单命题；由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

(4)真值表：表示命题真假的表叫做真值表.

复合命题的真假可通过下面的真值表来加以判定：

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

2. 四种命题

(1)四种命题

一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定. 于是四种命题的形式为：

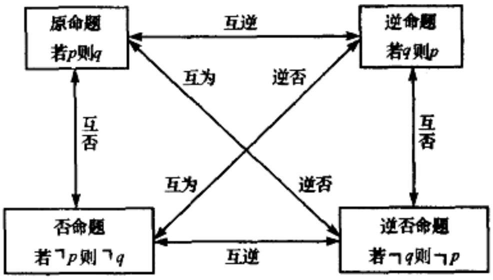
原命题：若 p 则 q；

逆命题：若 q 则 p；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

(2)四种命题的关系



3. 充分条件与必要条件

(1)充分条件、必要条件和充要条件

①充分条件

如果 A 成立，那么 B 成立，则条件 A 是 B 成立的充分条件.

②必要条件

如果 A 成立，那么 B 成立，这时 B 是 A 的必然结果，则条件 B 是 A 成立的必要条件.

(2)充要条件

如果 A 既是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件，则 A 是 B 成立的充要条件，与此同时，B 也一定是 A 成立的充要条件，所以我们称 A、B 为充要条件.

(3)充要条件的判断

我们常用推出符号“$\Rightarrow$”来判断两个命题之间的充要条件.

①若 $A\Rightarrow B$ 成立,则 A 是 B 成立的充分条件,B 是 A 成立的必要条件.

②若 $A\Rightarrow B$,且 $B\nRightarrow A$,则 A 是 B 成立的充分而不必要条件,B 是 A 成立的必要而不充分条件.

③若 $A\Leftrightarrow B$ 成立,则 A、B 互为充要条件.

方法大观

一、利用真假表判断命题真假

【例 1】 判断下列命题的真假:

(1)命题“在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB>AC$,则 $\angle C>\angle B$”的逆命题;

(2)命题“若 $ab=0$,则 $a\neq0$ 且 $b\neq0$”的否命题;

(3)命题“若 $a\neq0$ 且 $b\neq0$,则 $ab\neq0$”的逆否命题;

(4)命题“若 $a\neq0$ 或 $b\neq0$,则 $a^2+b^2>0$”的逆否命题.

【解析】 命题(1)中,“在 $\triangle ABC$ 中”是大前提,写逆命题时应该保留;命题(4)中,“若 $a\neq0$ 或 $b\neq0$”的反面是“$a=0$ 且 $b=0$”.

(1)逆命题是:“在 $\triangle ABC$ 中,若 $\angle C>\angle B$,则 $AB>AC$”,它是真命题;

(2)否命题是:“若 $ab\neq0$,则 $a=0$ 或 $b=0$”,它是假命题;

(3)逆否命题是:“若 $ab=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$”,它是真命题;

(4)逆否命题是:“若 $a^2+b^2\leqslant0$,则 $a=0$ 且 $b=0$”,它是真命题.

二、四种命题关系的判定

方法一:定义法

【例 2】 设 $p:x=1$ 是二次方程 $ax^2-2bx+c=0$ 的一个根;$q:a+c=2b$,则 p 是 q 的( ).

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 即非充分也非必要条件

【解析】 若 p 成立$\Rightarrow a-2b+c=0\Rightarrow 2b=a+c$. 所以 $p\Rightarrow q$ 成立;

若 q 成立$\Rightarrow 2b=a+c$,方程变为 $(x-1)(ax-c)=0$,$x=1$ 是方程 $ax^2-2bx+c=0$ 的一个根. 即 $q\Rightarrow p$ 成立.

所以 p 是 q 的充要条件. 故选 C.

方法二:原命题与其逆否命题等价

【例 3】 (2005 · 湖北)若条件 $p:|x+1|\leqslant4$,条件 $q:x^2<5x-6$,则$\neg p$ 是$\neg q$ 的( ).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要的条件

【解析】 $p:|x+1|\leqslant4\Leftrightarrow-5\leqslant x\leqslant3$

$q:x^2<5x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6<0$ 即 $2<x<3$

显然 $q\Rightarrow p$ 但 $p\nRightarrow q$,故 q 是 p 的充分非必要条件,故$\neg p$ 是$\neg q$ 的充分非必要条件.

注意:利用原命题与逆命题等价,转化判断 p 是 q 的什么条件即可.

方法三:反证法

【例 4】 (2005 · 北京)已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,$a,b\in\mathbf{R}$,对命题“若 $a+b\geqslant0$,则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$”

(1)写出逆命题,判断其真假,并证明你的结论.

(2)写出其逆否命题,并证明你的结论.

【解析】 写出原函数的逆命题,逆否命题后运用函数单调性定义,对于 $x_1>x_2$ 时,比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

逆命题:已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上增函数,$a,b\in\mathbf{R}$.“若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant0$”.

假设 $a+b<0$,则 $a<-b$,$b<-a$. 因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,则 $f(a)<f(-b)$,$f(b)<f(-a)$,所以 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,与条件矛盾,所以逆命题为真.

逆否命题:若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,则 $a+b<0$.

下面用反证法给出证明:

假设 $a+b\geqslant0$ 则 $a\geqslant-b$ 且 $b\geqslant-a$;

又 $f(x)$ 为增函数,$\therefore f(a)\geqslant f(-b)$ $f(b)\geqslant f(-a)$;

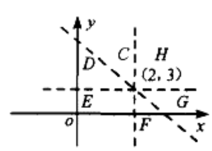
两式相加:$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

这与题设条件 $f(a)+f(b)<f(a)+f(-b)$ 矛盾,故假设不成立.

$\therefore$ $a+b<0$

方法四:集合法

【例 5】 已知条件 p 是“$x\neq3$ 且 $y\neq2$”,条件 q 是“$x+y\neq5$”,试判断 p 是 q 的什么条件?



【解析】 记条件 q、p 对应的集合分别为 P、Q,则 $P=\{(x,y)|x\neq3,y\neq2\}$;$Q=\{(x,y)|x+y\neq5\}$.

$\because P\cup Q=C\cup D\cup E\cup F\cup G\cup H$(其中 C、D、E、F、G、H 表示图中各区域上的点集).

$\therefore P\cap Q\neq P$ 且 $P\cap Q\neq Q$

$\therefore P\subsetneqq Q$ 且 $Q\subsetneqq P$

故 P 既不是 Q 的充分条件,也非 q 的必要条件.

三、充要条件的探求方法

【例6】 对任意实数 a,b,c,给出下列命题:

①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件;

②"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件;

③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件;

④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.

其中真命题的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】 ②④正确,①③错误,故选 B.

失误剖析

【例1】 p 或 q 为真命题是 p 且 q 为真命题的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【错解】 选 A.

【错因】 p 或 q 为真 $\nRightarrow P$ 且 q 为真 $\Rightarrow p$ 或 q 为真,但由于对命题的条件与结论分辨不清,导致错选 A.

【正解】 选 B.

试题预测

【预测1】 用反证法证明命题:若整数系数一元二次方程:$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有有理数根,那么 a、b、c 中至少有一个是偶数,下列假设中正确的是(　　).

A. 假设 a、b、c 都是偶数

B. 假设 a、b、c 都不是偶数

C. 假设 a、b、c 至多有一个是偶数

D. 假设 a、b、c 至多有两个是偶数

【预测2】 与命题"$m\in M$,则 $n\notin M$"等价的命题是(　　).

A. 若 $m\in M$,则 $n\notin M$

B. 若 $n\notin M$,则 $n\in M$

C. 若 $m\notin M$,则 $n\in M$

D. 若 $n\in M$,则 $m\notin M$

【预测3】 给出下面四个命题:①"直线 a、b 为异面直线"的充分非必要条件是"直线 a、b 不相交";②"直线 l 垂直于平面 α 内所有直线"的充要条件是"$l\perp$平面 α";③"直线 $a\perp b$"的充分非必要条件是"a 垂直于 b 在平面 α 内的射影";④"直线 α∥平面 β"的必要非充分条件是"直线 a 至少平行于平面 β 内的一条直线". 其中正确命题的个数是(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

【预测4】 设 A、B 两点的坐标分别为 $A(-\sqrt{2},0)$、$B(\sqrt{2},0)$,条件甲:A、B、C 三点构成以 C 为直角顶点的三角形;条件乙:点 C 的坐标是方程 $x^2+y^2=2$ 的解,则甲是乙的______条件.

【预测5】 已知真命题"$a\geqslant b\Rightarrow c>d$"和"$a<b\Rightarrow e\leqslant f$"则"$c\leqslant d$"是"$e\leqslant f$"的______条件.

【预测6】 设 P:关于 x 的不等式 $a^x>1$ 的解集是 $\{x|x<0\}$,Q:函数 $y=\lg(ax^2-x+a)$的定义域为 $\mathbf{R}$,如果 P 和 Q 有且仅有一个正确,求 a 的取值范围.

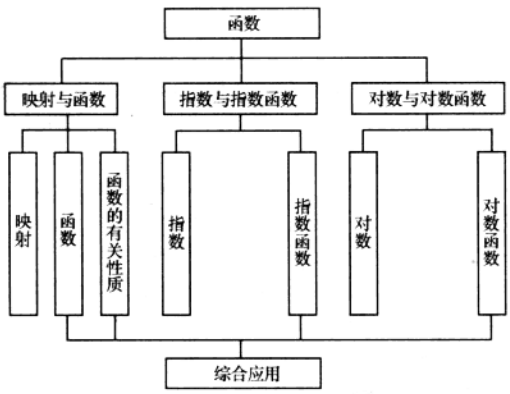
【预测7】 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α,β.

证明:$|\alpha|<2$ 且 $|\beta|<2$ 是 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$ 的充要条件,要求先证充分性.

【预测8】 设命题 p:函数 $f(x)=\lg\left(ax^2-x+\frac{1}{16}a\right)$的定义域为 $\mathbf{R}$;命题 q:不等式 $\sqrt{2x+1}<1+ax$ 对一切正实数均成立,如果命题 p 或 q 为真命题,命题 p 且 q 为假命题,求实数 a 的取值范围.

专题二　函数

知识网络



知识要点聚焦

映射、函数的概念

函数单调性、奇偶性的概念

反函数

指数函数,对数函数

高考要求概述

1. 了解映射的概念,理解函数的概念.

2. 了解函数单调性、奇偶性的概念,掌握判断一些简单的函数单调性、奇偶性的方法.

3. 了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系,会求一些简单函数的反函数.

4. 理解分数指数幂的概念,掌握有理指数幂的运算性质. 掌握指数函数的概念、图像和性质.

5. 理解对数的概念,掌握对数的运算性质. 掌握对数函数的概念、图像和性质.

6. 能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

高考前瞻

函数是高中数学中极为重要的内容,函数的观点和方法贯穿高中代数的全过程,同时应用于几何问题,纵观近年来的高考试题,在选择、填空、解答三种题型中每年都有试题,主要考查的内容有:函数的概念和性质,函数的图像.

高考的热点之一是考查函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、反函数及函数图像.

高考的热点之二是利用函数、方程、不等式的相互关系,对具体问题具体分析,最终解决问题.

高考的热点之三是应用题.

考点一　函数的定义及性质

大纲要求

1. 了解映射的概念,理解函数的概念.

2. 了解函数单调性奇偶性的概念,掌握判断一些简单函数单调性和奇偶性的方法.

3. 了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系,会求一些简单函数的反函数.

4. 理解分数指数的概念,掌握有理指数幂的运算性质;掌握指数函数的概念、图像和性质.

5. 理解对数的概念,掌握对数的运算性质;掌握对数函数的概念、图像和性质.

6. 能够运用函数的性质、指数函数、对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

知识要点

1. 映射的概念

(1)映射

设A、B是两个集合,如果按照某种对应法则f,对于集合A中的任何一个元素,在集合B中都有惟一的元素和它对应,则这样的对应(包括集合A、B以及A到B的对应法则f)叫做从集合A到集合B的映射,记作:$f:A\to B$

(2)像与原像

如果给定一个从集合A到集合B的映射,那么,和A中的元素a对应的B中的元素b叫做a的像,a叫做b的原像.

(3)一一映射

设A、B是两个集合,$f:A\to B$是A到B的映射,如果在这个映射下,对于集合A中的不同元素,在集合B中有不同的像,而且B中的每一个元素都有原像,那么这个映射叫做A到B上的一一映射.

2. 函数

(1)函数的定义

(2)构成函数概念的三要素

(3)函数的表示方法

表示函数的方法,常用有解析法、列表法、图像法三种.

3. 函数的解析式

函数的解析式就是用数学运算符号和括号把数和表示数的字母连结而成的式子. 解析式亦称"解析表达式"或"表达式",简称"式".

4. 求函数定义域的主要依据

(1)分式的分母不得为零.

(2)偶次方根的被开方数不小于零,零取零次方没有意义.

(3)对数函数的真数必须大于零.

(4)指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于1.

5. 函数的值域

(1)函数的值域的定义

在函数$y=f(x)$中,与自变量x的值对应的y的值叫做函数值,函数值的集合叫做函数的值域.

(2)确定函数的值域的原则

6. 函数的奇偶性的概念和性质

(1)定义:设$y=f(x)$,$x\in A$,如果对于任意$x\in A$,都有$f(-x)=f(x)$,则称函数$y=f(x)$为偶函数. 如果对于任意$x\in A$,都有$f(-x)=-f(x)$,则称函数$y=f(x)$为奇函数,如果函数$f=f(x)$是偶函数或奇函数,则称函数$y=f(x)$具有奇偶性.

(2)性质:①函数具有奇偶性的必要条件是其定义域关于原点对称. ②函数$y=f(x)$是偶函数$\Leftrightarrow y=f(x)$的图像关于y轴对称,函数$y=f(x)$是奇函数$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$的图像关于原点对称. ③奇函数$f(x)$在$x=0$处有定义,必有$f(0)=0$. ④偶函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上的单调性相反;奇函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上的单调性相同. ⑤定义在R上的任意函数$y=f(x)$均可表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

7. 函数的周期性的概念及性质

(1)定义:设函数$y=f(x)$,$x\in D$,如存在非零常数T,使得对任何$x\in D$都有$f(x+T)=f(x)$,则函数$f(x)$为周期函数,T为$y=f(x)$的一个周期.

若在所有的周期中存在一个最小的正数,则这个最小正数叫做最小周期.

(2)性质:若$f(x)$的周期为T,则$nT(n\in\mathbf{Z})$也是函数$y=f(x)$的周期.

8. 函数单调性

(1)函数的单调性是函数又一重要性质,给定区间D上函数$f(x)$,若对于任意的$x_1,x_2\in D$. 当$x_1<x_2$时都有$f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$)则$f(x)$是区间D上的增(减)函数. 区间D为$f(x)$的增(减)区间.

(2)必须了解单调性是与"区间"紧密相关的概念,一个函数在不同的区间上可以有不同的单调性.

(3)函数的单调性在比较大小、求函数最值方面都有广泛的应用.

(4)讨论复合函数单调性的依据是:设$y=f(t)$,$t=g(x)$,$x\in[a,b]$,$t\in[m,n]$都是单调函数,则$y=f[g(x)]$也是单调函数,并且当外层函数$f(t)$在$[m,n]$上为增函数时,复合函数$y=f[g(x)]$与内层函数$g(x)$在$[a,b]$上有相同的增减性,当外层函数$f(t)$在$[a,b]$上为减函数时,复合函数$y=f[g(x)]$与内层函数$g(x)$在$[m,n]$上有相反的增减性.

9. 函数的图像

(1)要准确记忆一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数、三角函数等各种基本初等函数的图像.

(2)函数图像的作法三种. 一是描点法,二是图像的变换法,三是利用函数性质作图.

方法大观

一、映射及函数概念的理解

【例1】 下列哪一个对应法则f是从集合P到集合S的一个映射(　　).

A. $P=\{$有理数$\}$,$S=\{$数轴上的点$\}$,对应法则f:有理数$\to$数轴上的点;

B. $P=\{$数轴上的点$\}$,$S=\{$有理数$\}$,对应法则f:数轴上的点$\to$有理数;

C. $x\in p=\mathbf{R}$,$y\in S=\mathbf{R}^+$,对应法则$f:x\to y|x|$;

D. $x\in P=C_{\mathbf{R}}\mathbf{R}^+$,$y\in=\mathbf{R}^+$,对应法则$f:x\to y=x^2$.

【解析】 对于B,当数轴上的点对应的数为$\sqrt{2}$时,

$\sqrt{2}\notin S$;对于 C,当 $x=0$ 时,$|0|=0\notin S$;对于 D,当 $x=0$ 时,$0^2=0\notin S$;A 符合映射的定义,所以选 A.

注意:根据映射的定义,这里只要判断对于集合 P 中的每一个元素,按照对应法则 f,则否在集合 S 中都有唯一的元素与之对应.

二、求解函数解析式的常用方法

方法一:定义法

由已知条件 $f[g(x)]=F(x)$,可将 $F(x)$ 改写成 $g(x)$ 的表达式,然后以 x 代 $g(x)$,便得 $f(x)$ 的表达式.常需"凑配".

【例 2】 已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$,求 $f(x)$ 的解析式;

【解析】 $\because x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}-1)=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]$,

$\therefore f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]$,$\therefore f(x)=x(x^2-3)=x^3-3x$.

$\because$ 当 $x\neq0$ 时,$x+\frac{1}{x}\geqslant2$ 或 $x+\frac{1}{x}\leqslant-2$,$\therefore f(x)=x^3-3x(x\leqslant-2$ 或 $x\geqslant2)$.

方法二:变量代换法

由已知条件 $f[g(x)]=F(x)$,可令 $t=g(x)$,然后反解出 $x=g^{-1}(t)$.代入 $F(x)$ 即可得 $f(t)$ 的表达式.

【例 3】 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求 $f(x)$ 的解析式;

【解析】 题目中的"f"这种对应法则,需要从题目给定的条件中找出来,即求出 f 及其定义域.

设 $t=\sqrt{x}+1\geqslant1$,则 $\sqrt{x}=t-1$,

$\therefore x=(t-1)^2$.

$\therefore f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1\quad(t\geqslant1)$.

$\therefore f(x)=x^2-1\quad(x\geqslant1)$.

方法三:待定系数法

有时题目给出函数特征,求函数的解析式,可用待定系数法,比如函数是二次函数,可设为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,其中 a、b、c 是待定系数,根据题设条件,列出方程组,解出 a、b、c 即可.

【例 4】 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$,且图像在 y 轴上的截距为 1,被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$,求 $f(x)$ 的解析式.

【解析】 解法一:设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.由 $f(x-2)=f(-x-2)$

得 $4a-b=0$①;又 $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$,

所以 $b^2-4ac=8a^2$②;

又已知 $c=1$③,由①、②、③解得 $b=2$,$a=\frac{1}{2}$,$c=1$,

所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

解法二:$f(x-2)=f(-x-2)$ 故 $y=f(x)$ 的图像有对称轴 $x=-2$,可设 $y=a(x+2)^2+k$(余略),

解法三:因为 $y=f(x)$ 的图像有对称轴 $x=-2$,又 $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$,

所以 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点为 $(-2-\sqrt{2},0)$,$(-2+\sqrt{2},-0)$.

故可设 $f(x)=a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$.

因为 $f(0)=1$

所以 $a=\frac{1}{2}$(余略).

注意:三种方法均是用待定系数法求二次函数的解析式,可以看到充分挖掘题目的隐含条件及充分利用图形的直观性,是简化运算的有效手段.

其他方法:

【例 5】 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数,$g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像关于直线 $x-1=0$ 对称,且当 $x\in[2,3]$ 时,$g(x)=2a\cdot(x-2)-4(x-2)^3(a\in\mathbf{R})$.求函数 $f(x)$ 的解析式.

【解析】 考虑到函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称,且已知 $g(x)$ 的函数解析式,因此考虑先得出两个函数的关系,再利用已知函数 $g(x)$ 的解析式,求出 $f(x)$ 的解析式.

$\because f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称,

$\therefore f(x)=g(2-x)$,

故 $f(x)=\begin{cases}-2ax+4x^3 & x\in[-1,0]\\ 2ax-4x^3 & x\in[0,1]\end{cases}$

注意:本题在将解析几何中图形对称性与函数概念、性质及定义域等内容交汇点命题,解题时要注意知识的间的联系、转化和综合运用.

三、求解函数定义域

(1)分式的分母不得为零.

(2)偶次方根的被开方数不小于零,零取零次方没有意义.

(3)对数函数的真数必须大于零.

(4)指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于 1.

如果函数是由一些基本函数通过四则运算而得到的,那么它们的定义域是各基本函数定义域的交集.

【例 6】 (2005·江苏)函数 $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x^2-3x)}$ 的定义域为______.

【解析】 $\begin{cases}4x^2-3x>0\\4x^2-3x\leqslant1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\text{ 或 }x>\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant1\end{cases}$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant0$ 或 $\frac{3}{4}<x\leqslant1$

$\therefore$ 函数的定义域为$[-\frac{1}{4},0]\cup(\frac{3}{4},1]$

四、求解函数的值域

方法一:利用基本函数求值域法

有的函数的结构并不复杂,可以通过基本函数的值域及不等式的性质直接观察出函数的值域,如函数$y=\frac{1}{2+x^2}$的值域为$\left\{y\left|0<y\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}$

方法二:利用函数的单调性求值域

通过确定函数在定义域内(或某个定义域的子集上)的单调性求出函数值域的方法为单调性法.考虑用单调性法求值域常见的有$y=ax+b+\sqrt{dx+e}$(a,b,d,e均为常数,且$ad\neq0$),看a与d是否同号,若同号用单调性求值域,若异号则用换元法求值域;还有的在利用重要不等式求值域失效(等号不满足)的情况下,可采用单调性求值域,但需熟悉下列结论:函数$y=x+\frac{k}{x}$($x>0,k>0$),$x\in(0,\sqrt{k}]$,函数递减,$x\in[\sqrt{k},+\infty)$,函数递增.

方法三:判别式法求值域

把函数转化成关于x的二次方程$F(x,y)=0$,通过方程有实根,判别式$\Delta\geqslant0$,从而求得原函数的值域.形如$y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$($a_1,a_2$不同时为0)的函数的值域常用此法求得.

【例7】 (2005·北京)已知函数$f(x)=\log_3\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,2]$,求$m$、$n$的值.

【解析】 $u=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.值域由题设知应为$[1,9]$.

由$u=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}(u>0)$,

得$(u-m)x^2-8x+(u-n)=0$.

$\because x\in\mathbf{R}$,且设$u-m\neq0$,

$\therefore \Delta=(-8)^2-4(u-m)(u-n)\geqslant0$.

即$u^2-(m+n)u+(mn-16)\leqslant0$.

关于u的一元二次方程$u^2-(m+n)u+(mn-16)=0$的两根为1和9,由韦达定理.

得$\begin{cases}m+n=1+9,\\mn-16=1\times9.\end{cases}$ 解得$m=n=5$.

若$u-m\neq0$,即 $u=m=5$时,应对$x=0$,符合条件,

$\therefore m=n=5$为所求.

注意:本题的解法体现了等价转化的数学思想,它是解决数学综合题的桥梁,利用判别式求值域,其定义域应没有限制,且分子、分母中不能有公因式.

方法四:配方法

二次函数或转化为形如$F(x)=a[f^2(x)+bf(x)+c]$类的函数的值域问题,均可用配方法,而后面的函数要注意$f(x)$的范围.

【例8】 研究函数$y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$的值域.

【解析】 $\because 0\leqslant x\leqslant1,y>0$.

$$\therefore y=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^2}=\sqrt{1+2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}},$$

$\therefore$ 当$x=\frac{1}{2}$时,y取最大值$\sqrt{2}$;当$x=0$或1时,y取最小值1,故值域为$[1,\sqrt{2}]$.

注意:观察函数的解析式$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$的结构特征及数量之间的内在联系,不难发现,由于有$x+(1-x)=1$因此可以考虑将表达式两边分别平方,将自变量x放到同一个根号之下来处理.

方法五:反函数法

用函数和它的反函数的定义域和值域的关系,通过求反函数的定义域而得到原函数的值域.形如$y=\frac{cx+d}{ax+b}$($a\neq0$)的函数值域可用此法.

【例9】 求函数$y=\frac{\sin x}{2-\cos x}$的值域.

【解析】 将原函数化为$\sin x+y\cos x=2y$,

即$\sqrt{1+y^2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\cos x\right)=2y$.

令$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ 且$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$,

$\therefore \sin(x+\varphi)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}$,$\left|\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\right|\leqslant1$,平方得$3y^2\leqslant1$,

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故所求的值域为$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

注意:求函数的值域,实质是求因变量y的取值集合,也就是y的取值范围,因而求值域(或最值)问题的关键在于寻求y所满足的不等式,解之即可.

方法六:换元法

运用代数或三角代换,将所给函数转化成值域容易确定的另一函数,从而求得原函数的值域.形如:$y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$(a,b,c,d均为常数,且$ac\neq0$)的函数常用此法求值域.

【例10】 求函数$f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{12-2x}$的值域.

【解析】 $\because(x-1)+(6-x)=5$,$\therefore\left(\sqrt{\frac{x-1}{5}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{6-x}{5}}\right)^2=1$.