教材动态全解

主编／田祥高

高二数学

（上）

东北师范大学出版社

教材
动态全解

主 编／田祥高

高二数学

（上）

东北师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

教材动态全解．高二数学（上）/田祥高主编．—长春：东北师范大学出版社，2004.5
ISBN 7-5602-3777-0

Ⅰ.教… Ⅱ.田… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第023756号

□责任编辑：任桂芬 □封面设计：魏国强
□责任校对：宋茂歆 □责任印制：栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街5268号（130024）
销售热线：0431—5695744 5688170
传真：0431—5695734
网址：http://www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春新华印刷厂印装
长春市吉林大路35号（130031）
2004年5月第1版 2004年5月第1次印刷
幅面尺寸：148 mm×210 mm 印张：11.25 字数：455千
印数：00 001—10 000册

定价：14.50元

前 言

《教材动态全解》丛书是适应全国中高考命题形式多样化改革需要的初高中各年级同步课堂教学的配套用书。

《教材动态全解》丛书是针对目前国内各省市地区教材版本选择纷繁复杂的局面配备的教辅用书，囊括人教版、北师大版、华东师大版、语文版、苏版等国家教育部教材审定委员会审查通过的教材版本，覆盖初高中各个年级不同学科，且根据各版本教材各自的规律和特点编写。

《教材动态全解》丛书吸收欧美发达国家“活性动态”教辅版式的精髓，紧密结合我国现阶段课堂教学改革的国情，根据不同学科教材的特点和课堂改革的需要，是“教材动态”全解型和名师“课堂动态”实录型优秀图书。这套丛书具有以下突出特点：

一、全面丰富实用

全书知识点分布全面，不遗漏一个忽略点，不放弃一个疑似点，真正体现信息量大，内容丰富，题量充足。全书对教材中的重点、难点、疑点进行逐词、逐句、逐段透彻解读。精编例题，对每一个知识点、易错点、易忽略点、易混淆点、疑似点进行一一对一剖析。点点对应例题，题题揭示规律。

二、体例设置灵活

全书在大栏目统一的基础上，小栏目的设置由编者根据教材内容需要作动态变化。精选全国著名中学师生互动，突破疑难点的精彩课堂实录，突出教师教法的灵活性和学生学法的灵活性。

三、创设互动情境

全书体例版式独特新颖、教育理念前瞻性强，引导学生不断创设问题情境，激励学生注重参与教学过程。书中原创大量新颖的与生产生活实际相结合的探究性问题，培养学生在探究过程中发现知识，并运用知识解决实际问题的能力。

四、分析解读透彻

从书对《课程标准》和现行《考试大纲》研究透彻，对名师的教法和优秀学生的学法研究透彻，对各年级学生的认知水平和储备不同学科知识研究透彻，对单元学习目标和章节训练习题难易度研究透彻，对重点、难点、疑点突破方法研究透彻，对各种题型及其同类变式的解题方法、技巧、规律、误区研究透彻，对培养学生能力升级的步骤和途径研究透彻。

五、适用对象全面

从书在策划初始即考虑到全国各地区教材版本使用复杂的现状，对目前国内各省市地区可能使用的教材版本均有所涉及，因此，从书适合全国各地重点中学和普通中学各类学生使用，适用对象全面。

本丛书虽然从策划到编写，再到出版，精心设计，认真操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

第一编辑室

2004 年 5 月

目　录

第六章　不等式

6.1 不等式的性质

教材内容全解

一、不等式的基本性质(重点)

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$；$a=b \Leftrightarrow a-b=0$；$a<b \Leftrightarrow a-b<0$.

注意:不等式的基本性质的作用在于:

(1)归:不等式的基本性质把两个实数的大小关系转化为两个实数的差的符号的确定,而利用实数的四则运算的符号法则,非负实数的有关性质等有关知识可以帮助我们顺利地确定其符号,因而不等式的基本性质起到了化生为熟的作用;

(2)依据:不等式的基本性质是比较大小、不等式性质的证明、不等式的证明、解不等式的主要依据.

例1　已知 $a>b>0$,比较$\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$与$\frac{a-b}{a+b}$的大小.

解析　由不等式的基本性质可知,先作差,作差后其符号还不能确定,怎么办?这就需要对代数式进行恒等变形,使它能利用符号法则来确定其符号.

解　$\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}-\frac{a-b}{a+b}$

$=(a-b)\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3}-\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}\right)$

$=\frac{2ab(a-b)}{a^3+b^3}$.

$\because a>b>0$,

$\therefore a-b>0$,

$\therefore \frac{2ab(a-b)}{a^3+b^3}>0$,

$\therefore \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}-\frac{a-b}{a+b}>0$,即$\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}>\frac{a-b}{a+b}$.

特别提示

作差后,化为积商有利于符号的确定.

同类变式 已知 $x\in\mathbf{R}$，$m\in\mathbf{R}$，比较 x^2+x+1 与 $-2m^2+2mx$ 的大小.

解析 在这里，作差后无法进行因式分解而转化为积的形式，怎么办？注意到在这里有两个字母 x 和 m，因此我们要对它们进行配方，把它们转化为非负实数之和，从而确定其符号.

解 $\because x^2+x+1-(-2m^2+2mx)$

$=x^2-(2m-1)x+2m^2+1$

$=\left(x-\frac{2m-1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(2m-1)^2+2m^2+1$

$=\left(x-m+\frac{1}{2}\right)^2+m^2+m+\frac{3}{4}$

$=\left(x-m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$.

$\therefore x^2+x+1>-2m^2+2mx$.

解题技巧

用不等式的基本性质比较大小的步骤是：作差⟶变形⟶判断符号⟶下结论.

其中变形要有利于符号的确定，例如变形为积商形式、非负实数之和（仍为非负实数）等.

二、不等式的性质（重点）

1. 对称性

定理 1：$a>b\Rightarrow b<a$；$b<a\Rightarrow a>b$.

2. 传递性

定理 2：若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

解题规律

由教材上对这两个性质的证明可知：证明不等式时，应先把条件中的不等关系转化为某些代数式的符号规律；再对待证的不等式作差变形，使之利用已知的代数式的符号，从而确定作差变形后的代数式的符号，进而完成证明. 这种证明不等式的方法我们称为比差法.

例2 已知 $x\in\mathbf{R}$，试比较 $2x^2-3x+3$ 与 $\frac{2}{2^x+2^{-x}}$ 的大小.

解析 如果作差、变形，由于“x”既在底数上，又在指数上，因而无法进行因式分解，那么如何进行才好呢？我们应该想办法找到一个中间数，以它作媒介来传递，因而分别求出两个函数 $y=2x^2-3x+3$ 与 $y=\frac{2}{2^x+2^{-x}}$ 的最值就是自然而然的事.

解 $\because 2x^2-3x+3=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geqslant\frac{15}{8}$，

$2^x+2^{-x}=\left(\sqrt{2^x}-\sqrt{2^{-x}}\right)^2+2\geqslant 2$，

$\therefore \frac{2}{2^x+2^{-x}}\leqslant 1$.

又 $\because \frac{15}{8}>1$，

警示误区

只有同向不等式才具有传递性.

$\therefore\ 2x^2-3x+3>\dfrac{2}{2^x+2^{-x}}$.

同类变式　设实数 a,b,c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，则 a、b、c 的大小关系是______.

解析　由题设的第二个等式可以比较 b 与 c 的大小.因而只需要比较 a 与 b，a 与 c 的大小，我们只要由题设两个等式分别消去 c 和 b，就可以比较出大小.

解　$\because\ c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$.

$\therefore\ c\geqslant b$.

又 $\because\ b=\dfrac{1}{2}[(b+c)-(c-b)]=\dfrac{1}{2}[(6-4a+3a^2)-(4-4a+a^2)]=a^2+1$.

$\therefore\ b-a=a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$.

$\therefore\ b>a$.

$\therefore\ c\geqslant b>a$.

3. 加法的单调性

定理 3：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

推论：若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$.

注意：有了不等式的加法单调性，不等式的移项法则也就有了理论依据.因而不等式就可以像方程一样地变形、化简.

例3　命题"若 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$"及其逆命题是否为真命题？若为真命题，则证明它；若为假命题，请举一反例.

解　命题"若 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$"为真命题，其证明如下：

$\because\ a>b$，$c<d$，

$\therefore\ a-b>0$，$d-c>0$，

$\therefore\ (a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)>0$.

$\therefore\ a-c>b-d$.

特别提示

只有同向不等式才具有相加性；而异向不等式只具有相减性.

其逆命题"若 $a-c>b-d$，则 $a>b$，$c<d$"为假命题.举例：$6-4>4-3$，但 $6>4$ 而 $4>3$.

同类变式　命题"若 $a>b>0$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$"是否为真命题？并证明你的结论.它的逆命题是否为真命题？如果不为真命题，则由"$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$"可得到 a 与 b 的大小关系如何？

解析　对于原命题由特例可知它为真命题，因而考虑用比差法进行证明.对于逆命题，由特例可知它不一定成立.

解　命题"若 $a>b>0$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$"是真命题，其证明如下：

$\because\ a>b>0$，

$\therefore\ a-b>0$，$ab>0$，

$\therefore \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}>0$,

$\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

令 $a=-2$, $b=-3$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,但 $b<a<0$. 故它的逆命题是假命题.

由 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}>0$ 知:

当 $a-b>0$ 时,则 $ab>0$,即 a 与 b 同号, $\therefore a>b>0$ 或 $b<a<0$;

当 $a-b<0$ 时,则 $ab<0$,即 a 与 b 异号, $\therefore a<0<b$.

故 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow a>b>0$ 或 $b<a<0$ 或 $a<0<b$.

4. 乘法的单调性(难点、重点)

定理4:①若 $a>b$ 且 $c>0$,则 $ac>bc$;②若 $a>b$ 且 $c<0$,则 $ac<bc$.

推论1:若 $a>b>0$ 且 $c>d>0$,则 $ac>bd$.

推论2:$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$($n\in \mathbf{N}$ 且 $n>1$).

定理5:$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in \mathbf{N}$ 且 $n>1$).

例4　下面命题中,假命题的序号是______.

① 若 $a>b$,$c>d$,则 $ac>bd$.

② 若 $a>b$,$n=2k-1(k\in \mathbf{N}^*)$,则 $a^n>b^n$.

③ 若 $a>b>0$,$c>d>0$,则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

④ 若 $a>b$,$n\in \mathbf{N}$ 且 $n\geq 2$,则 $a^n>b^n$ 且 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

解析　要判定命题为真命题,则必须经过严密的推理论证才行;而要判定命题为假命题,则只需要举一反例即可,举例时可用"特殊值"法取特例值.

解　①是假命题. 例如取 $a=-1$,$b=-2$,$c=-1$,$d=-3$,则 a,b,c,d 满足条件"$a>b$,$c>d$",但 $ac=1<6=bd$.

②是真命题. ∵ 当 $a>b\geq 0$ 时,则 $a^n>b^n$;当 $a\geq 0>b$ 时,则 $a^n\geq 0$,$b^n<0$,$\therefore a^n>b^n$;当 $b<a<0$ 时,则 $-b>-a>0$. $\therefore (-b)^n>(-a)^n$. 又 $n=2k+1(k\in \mathbf{N}^*)$,$\therefore (-b)^n=-b^n$,$(-a)^n=-a^n$. $\therefore -b^n>-a^n$,即 $a^n>b^n$. 故 $a^n>b^n$ 恒成立.

③是真命题. ∵ $c>d>0$,$\therefore \frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$.

又 $a>b>0$,$\therefore \frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

警示误区
在应用定理4和定理5时,一定要注意它们的前提条件是"都是正数".

④是假命题. 例如取 $a=-1$,$b=-2$,$n=2$,则 a,b,n 满足条件"$a>b$,$n\in \mathbf{N}$ 且 $n\geq 2$",但 $a^n=(-1)^2=1<b^n=(-2)^2=4$,而 $\sqrt{-1}$ 与 $\sqrt{-2}$ 均无意义.

故应填①④.

同类变式 （全国高考题）若 a,b 是任意实数，且 $a>b$，则 （ ）

A. $a^2>b^2$ B. $\frac{b}{a}<1$ C. $\lg(a-b)>0$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

解 解法一：由不等式性质知 A，B 不正确，而 $a-b$ 不一定大于 1，因而 C 也不正确，而函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 递减．又 $a>b$，∴ $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，故选 D.

解法二：（特例排除法）取 $a=1,b=-1$ 可排除 A；取 $a=-1,b=-2$ 可排除 B；取 $a=1,b=\frac{1}{2}$ 可排除 C. 故选 D.

解题规律

在不等式变形时，必须做到“有理有据”，也就是依据某个不等式性质进行变形（满足性质中所有条件，才有相关的结论），切忌随意操作.

三、对不等关系的进一步理解（难点）

例5 若二次函数 $f(x)$ 的图像过原点，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$3\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围.

某同学解答这道题的过程如下：

∵ $f(x)$ 的图像过原点，∴ $c=0$，故设 $f(x)=ax^2+bx$.

由 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$ 及 $3\leqslant f(1)\leqslant 4$ 得 $1\leqslant a-b\leqslant 2$，$3\leqslant a+b\leqslant 4$，

∴ $4\leqslant 2a\leqslant 6$，即 $2\leqslant a\leqslant 3$，即 $8\leqslant 4a\leqslant 12$.

又 $-2\leqslant b-a\leqslant -1$，∴ $1\leqslant 2b\leqslant 3$，∴ $-3\leqslant -2b\leqslant -1$，

∴ $5\leqslant f(-2)=4a-2b\leqslant 11$.

故 $f(-2)$ 的取值范围是 $[5,11]$.

该同学的解答是否正确？如果错，错在哪里？并给出正确的解答.

解 该同学的解答是错误的，如 $f(-2)=5$ 就不能成立.

这是因为若 $f(-2)=5$，则 $-2b$ 和 $4a$ 必须均取最小值 -3 和 8，

即 $a=2,b=\frac{3}{2}$. 而此时 $a-b=\frac{1}{2}<1$. 这与“$1\leqslant a-b\leqslant 2$”矛盾.

究其原因是：一方面这里“$\leqslant$”隐含着“所有的”；另一方面满足“$1\leqslant a-b\leqslant 2$”且“$3\leqslant a-b\leqslant 4$”的 a 与 b 之间有一个制约关系，因此 a 与 $-b$ 不一定能同时取得最大值和最小值. 其正确的解答如下：

∵ 函数 $y=f(x)$ 的图像过原点，

∴ $c=0$，故设 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$.

设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$，则 $4a-2b=(m+n)a-(m-n)b$.

∴ $\begin{cases}m+n=4,\\ m-n=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\ n=1.\end{cases}$

∴ $f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

∵ $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，∴ $3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$.

又 $3\leqslant f(1)\leqslant 4$，∴ $6\leqslant f(-2)=3f(-1)+f(1)\leqslant 10$.

故 $f(-2)$的取值范围是$[6,10]$.

同类变式 设 $2<a<3$，$-4<b<-3$，求 $a+b$，$a-b$，$\frac{a}{b}$，ab，$\frac{b^2}{a}$的取值范围.

解 $\because$ $2<a<3$，$-4<b<-3$，$\therefore$ $-2<a+b<0$.

由$-4<b<-3$ 知 $3<-b<4$，$\therefore$ $5<a-b<7$.

由 $3<-b<4$ 知$\frac{1}{4}<\frac{1}{-b}<\frac{1}{3}$，$\therefore$ $\frac{2}{4}<\frac{a}{-b}<1$，即$-1<\frac{a}{b}<-\frac{1}{2}$.

$\because$ $3<-b<4$，$\therefore$ $6<a(-b)<12$，$\therefore$ $-12<ab<-6$.

由 $3<-b<4$ 知 $9<(-b)^2<16$，又$\frac{1}{3}<\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，$\therefore$ $3<\frac{b^2}{a}<8$.

解题方法指导

一、不等式的性质与函数的联系

一方面，不等式的许多性质具有"函数"的背景，如"$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n\ (n\in \mathbf{N}^*)$"，其实就是幂函数 $y=x^n$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上的单调性；另一方面，不等式也是研究函数性质的有力工具.

例6 研究函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 的单调性，并证明你的结论.

解析 由于在这里既要判断 $f(x)$的单调性，又要证明它，因此用定义来判断和证明是明智之举.

解 设 $x_1>x_2$，则 $x_1-x_2>0$，

$$
\begin{aligned}
&f(x_1)-f(x_2)\\
&=\sqrt{x_1^2+1}-x_1-\left(\sqrt{x_2^2+1}-x_2\right)\\
&=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}+x_2-x_1\\
&=\frac{(x_1^2+1)-(x_2^2+1)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-(x_1-x_2)\\
&=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-1\right).
\end{aligned}
$$

又 $\sqrt{x_1^2+1}>|x_1|\geqslant x_1$，同理 $\sqrt{x_2^2+1}>x_2$.

$\therefore$ $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>x_1+x_2$，

即$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$，

即$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-1<0$，

$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore$ $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.