



教材 动态全解

主编 / 田祥高

高二数学

(上)

东北师范大学出版社

教材 动态全解

主 编 / 田祥高

高二数学

(上)

东北师范大学出版社

.....
图书在版编目 (CIP) 数据

教材动态全解. 高二数学(上)/田祥高主编. —长春:
东北师范大学出版社, 2004. 5
ISBN 7 - 5602 - 3777 - 0

I. 教... II. 田... III. 数学课—高中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 023756 号
.....

责任编辑: 任桂菊 封面设计: 魏国强
责任校对: 宋茂歆 责任印制: 栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号 (130024)
销售热线: 0431—5695744 5688170
传真: 0431—5695734

网址: <http://www.nenup.com>

电子信件: sdchs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

长春新华印刷厂印装

长春市吉林大路 35 号 (130031)

2004 年 5 月第 1 版 2004 年 5 月第 1 次印刷

幅面尺寸: 148 mm×210 mm 印张: 11.25 字数: 455 千

印数: 00 001--10 000 册

定价: 14.50 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换



前 言

《教材动态全解》丛书是适应全国中高考命题形式多样化改革需要的初高中各年级同步课堂教学的配套用书。

《教材动态全解》丛书是针对目前国内各省市地区教材版本选择纷繁复杂的局面配备的教辅用书，囊括人教版、北师大版、华东师大版、语文版、苏版等国家教育部教材审定委员会审查通过的教材版本，覆盖初高中各个年级不同学科，且根据各版本教材各自的规律和特点编写。

《教材动态全解》丛书吸收欧美发达国家“活性动态”教辅版式的精髓，紧密结合我国现阶段课堂教学改革的国情，根据不同学科教材的特点和课堂改革的需要，是“教材动态”全解型和名师“课堂动态”实录型优秀图书。这套丛书具有以下突出特点：

一、全面丰富实用

全书知识点分布全面，不遗漏一个忽略点，不放弃一个疑似点，真正体现信息量大，内容丰富，题量充足。全书对教材中的重点、难点、疑点进行逐词、逐句、逐段透彻解读。精编例题，对每一个知识点、易错点、易忽略点、易混淆点、疑似点进行一对一剖析。点对点例题，题题揭示规律。

二、体例设置灵活

全书在大栏目统一的基础上，小栏目的设置由编者根据教材内容需要作动态变化。精选全国著名中学师生互动，突破疑难点的精彩课堂实录，突出教师教法的灵活性和学生学法的灵活性。

三、创设互动情境

全书体例版式独特新颖、教育理念前瞻性强，引导学生不断创设问题情境，激励学生注重参与教学过程。书中原创大量新颖的与生产生活实际相结合的探究性问题，培养学生在探究过程中发现知识，并运用知识解决实际问题的能力。

四、分析解读透彻

从书对《课程标准》和现行《考试大纲》研究透彻，对名师的教法和优秀学生的学法研究透彻，对各年级学生的认知水平和储备不同学科知识研究透彻，对单元学习目标和章节训练习题难易度研究透彻，对重点、难点、疑点突破方法研究透彻，对各种题型及其同类变式的解题方法、技巧、规律、误区研究透彻，对培养学生能力升级的步骤和途径研究透彻。

五、适用对象全面

从书在策划初始即考虑到全国各地教材版本使用复杂的现状，对目前国内各省市地区可能使用的教材版本均有所涉及，因此，丛书适合全国各地重点中学和普通中学各类学生使用，适用对象全面。

本丛书虽然从策划到编写，再到出版，精心设计，认真操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

第一编辑室

2004年5月

目 录

第六章 不等式	1	6.3 不等式的证明	28
6.1 不等式的性质	1	教材内容全解	28
教材内容全解	1	一、比较法(重点)	28
一、不等式的基本性质(重点)	1	二、综合法(重点、难点)	30
二、不等式的性质(重点)	2	三、分析法(重点、难点)	31
三、对不等关系的进一步理解		四、三种证明方法的选择	
(难点)	5	(难点)	32
解题方法指导	6	五、不等式证明在实际问题中的	
一、不等式的性质与函数的联系	6	应用(重点、难点)	34
二、比商法	7	潜能开发广角	35
三、利用不等式的性质解决实际		一、反证法	35
问题	7	二、换元法	35
基础能力训练	8	三、放缩法	37
综合能力训练	9	四、判别式法	39
标答与点拨	10	五、构造法	39
6.2 算术平均数与几何平均数	13	六、数形结合法	40
教材内容全解	13	基础能力训练	41
一、基本定理(重点)	13	综合能力训练	42
二、均值定理的变形公式		标答与点拨	42
(重点)	13	6.4 不等式的解法举例	47
三、应用均值定理证明不等式		教材内容全解	47
(重点、难点)	14	一、一元一次不等式	47
四、用均值定理求函数的最大值		二、一元二次不等式(重点)	48
或最小值(重点、难点)	15	三、含有绝对值的不等式	
五、应用均值定理解决实际问题		(重点)	49
(重点、难点)	17	四、一元高次不等式(重点、	
探究学习	18	难点)	51
基础能力训练	24	五、分式不等式(重点、	
综合能力训练	25	难点)	52
标答与点拨	25	延伸拓展	53

一、无理不等式	53	(重点)	99
二、指数、对数不等式	55	六、用斜率知识解决三点共线 问题	100
基础能力训练	57	潜能开发广角	100
综合能力训练	59	、坐标法	100
标答与点拨	59	一、综合运用直线的倾斜角与斜 率的知识	101
6.5 含有绝对值的不等式	62	二、利用斜率公式解决代数 问题	102
教材内容全解	62	四、利用直线的倾斜角和斜率 解决实际问题	102
一、含有绝对值的不等式的性质 (重点)	62	基础能力训练	103
二、含有绝对值的不等式的证明 (重点、难点)	62	综合能力训练	104
潜能开发广角	64	标答与点拨	105
基础能力训练	65	7.2 直线方程	107
综合能力训练	66	教材内容全解	107
标答与点拨	67	一、点斜式(重点)	107
专题 不等式的应用	70	二、斜截式(重点)	108
一、不等式在学科内的应用	70	三、两点式(重点)	109
二、不等式在实际问题中的 应用	80	四、截距式(重点、难点)	110
单元总结与测评	83	五、一般式(重点、难点)	111
高考信息要求	83	六、直线方程的不同形式间的 互化(重点)	112
热点考题剖析	83	七、直线方程各种形式的灵活 运用(难点)	113
综合能力测评	91	潜能开发广角	114
标答与点拨	92	一、最值问题	114
第七章 直线和圆的方程	95	二、直线与二元二次方程	116
7.1 直线的倾斜角和斜率	95	基础能力训练	117
教材内容全解	95	综合能力训练	118
一、直线的方程与方程的直线 (重点)	95	标答与点拨	118
二、直线的倾斜角(重点、 难点)	96	7.3 两条直线的位置关系	121
三、直线的斜率(重点、 难点)	97	教材内容全解	121
四、斜率公式(重点、难点)	98	一、两条直线平行(重点)	121
五、求直线的斜率的方法		二、两条直线垂直(重点)	122
		三、 l_1 到 l_2 的角	123

四、点到直线的角的公式(重点、 难点)	123	教材内容全解	151
五、夹角及夹角公式(重点) ...	124	一、曲线的方程与方程的曲线 (重点、难点)	151
六、交点(重点)	126	二、如何利用曲线和方程的定义 解题(重点)	152
七、两条直线的位置关系 (难点)	126	三、解析几何的基本思想方法 (重点)	153
八、点到直线的距离(重点、 难点)	127	四、用直接法求曲线方程(重点、 难点)	154
九、两条平行直线间的距离 (难点)	128	五、如何建立恰当的直角坐标系 (重点、难点)	156
潜能开发广角	129	六、用待定系数法求曲线方程 (重点、难点)	158
一、对称问题	129	七、求两曲线的交点(重点) ...	158
二、直线系方程	134	八、弦长公式	159
基础能力训练	136	解题方法拓展	160
综合能力训练	137	一、用转代法求曲线方程	160
标答与点拨	137	二、用参数法求曲线方程	161
7.4 简单的线性规划	140	基础能力训练	162
教材内容全解	140	综合能力训练	163
一、二元一次不等式表示平面 区域(重点、难点)	140	标答与点拨	163
二、线性规划问题(重点)	141	7.6 圆的方程	167
三、线性规划问题的图解法 (重点)	142	教材内容全解	167
四、线性规划的应用问题 (难点)	143	一、圆的标准方程(重点)	167
五、如何解答线性规划中的最优整数 解的问题(重点、难点) ...	144	二、圆的一般方程(重点、 难点)	168
潜能开发广角	145	三、如何求圆的方程(重点、 难点)	169
一、含绝对值的不等式表示的平面 区域的作法	145	四、点与圆的位置关系	170
二、利用不等式表示的区域解决其 他问题	146	五、直线与圆的位置关系 (重点)	171
基础能力训练	147	六、如何解决直线与圆相切的 问题(重点)	172
综合能力训练	148	七、圆与圆的位置关系(重点、 难点)	173
标答与点拨	148	八、两圆的公切线方程	175
7.5 曲线和方程	151		

九、圆的参数方程·····	175	五、用定义法求椭圆的标准 方程(重点、难点)·····	215
十、曲线的参数方程·····	177	六、用转代法求椭圆的标准 方程(重点)·····	216
十一、参数方程的应用·····	178	七、用参数法求椭圆的标准 方程(难点)·····	217
十二、与圆有关的轨迹问题 (难点)·····	179	潜能开发广角·····	218
潜能开发广角·····	180	一、椭圆定义的运用·····	218
基础能力训练·····	183	二、直线与圆锥曲线的位置 关系·····	220
综合能力训练·····	185	基础能力训练·····	221
标答与点拨·····	186	综合能力训练·····	222
专题 利用数形结合的思想方法		标答与点拨·····	223
解题 ·····	190	8.2 椭圆的简单几何性质 ·····	227
一、利用数形结合解决函数 问题·····	190	教材内容全解·····	227
二、利用数形结合解决三角 问题·····	191	一、椭圆的简单几何性质 (重点)·····	227
三、利用数形结合解决不等式 问题·····	193	二、利用方程研究曲线的几何性质 (重点)·····	229
四、利用数形结合解决集合 问题·····	193	三、椭圆的离心率的求法 (重点)·····	230
五、利用数形结合解决几何 问题·····	194	四、根据椭圆的几何性质求椭圆 的方程(重点)·····	231
单元总结与测评 ·····	195	五、椭圆的第二定义(重点)·····	232
高考信息要求·····	195	六、运用椭圆的第二定义解题 (重点)·····	233
热点考题剖析·····	196	七、椭圆的两种定义的综合运用 (重点)·····	235
综合能力测评·····	208	八、准线与椭圆的标准方程 (重点)·····	236
标答与点拨·····	209	九、椭圆的焦半径公式 (重点)·····	237
第八章 圆锥曲线方程 ·····	212	十、椭圆的参数方程(重点、 难点)·····	238
8.1 椭圆及其标准方程 ·····	212	潜能开发广角·····	240
教材内容全解·····	212	一、综合方法·····	240
一、椭圆的定义(重点)·····	212		
二、椭圆的标准方程(重点)·····	213		
三、根据椭圆的标准方程确定 椭圆的焦点位置(重点)·····	214		
四、用待定系数法求椭圆的 标准方程(重点)·····	215		

二、实际应用	243	(重点)	274
基础能力训练	245	六、直线与双曲线的位置关系	
综合能力训练	247	(重点、难点)	275
标答与点拨	247	七、直线与双曲线的综合问题	
8.3 双曲线及其标准方程	251	(重点、难点)	275
教材内容全解	251	探究学习	276
一、双曲线的定义(重点、		点与双曲线的位置关系	276
难点)	251	二、非常规的双曲线问题	277
二、双曲线的标准方程		二、双曲线的证明问题	278
(重点)	252	基础能力训练	278
三、根据双曲线的标准方程确定双		综合能力训练	280
曲线焦点的位置(重点、		标答与点拨	281
难点)	253	8.5 抛物线及其标准方程	285
四、用待定系数法求双曲线的		教材内容全解	285
标准方程(重点)	254	一、抛物线的定义(重点)	285
五、用定义法求双曲线的方程		二、抛物线的标准方程	
(重点)	255	(重点)	286
六、椭圆与双曲线	256	三、抛物线定义的运用	287
潜能开发广角	257	四、抛物线的焦点弦(重点)	289
一、综合方法	257	五、直线与抛物线的位置关系	
二、双曲线在实际问题中的		(重点)	290
应用	262	六、抛物线的最值问题	
基础能力训练	264	(难点)	291
综合能力训练	265	探究学习	292
标答与点拨	266	基础能力训练	294
8.4 双曲线的简单几何性质	269	综合能力训练	295
教材内容全解	269	标答与点拨	296
一、双曲线的简单几何性质		8.6 抛物线的简单几何性质	301
(重点)	269	教材内容全解	301
二、根据双曲线的几何性质求		一、抛物线的简单几何性质	
双曲线的方程(重点)	271	(重点)	301
三、双曲线系以及共轭双曲线		二、“非标准状态”下的抛物	
(重点、难点)	272	线方程(难点)	302
四、双曲线的第二定义(重点、		三、抛物线的焦点弦(重点)	304
难点)	273	四、圆锥曲线(重点、难点)	305
五、与双曲线的准线有关的问题		潜能开发广角	307

一、探究学习	307	三、利用重要不等式求最值	322
二、延伸拓展 抛物线在代数中 的应用	309	四、转化为二次函数求最值	322
基础能力训练	310	五、转化为三角函数求最值	323
综合能力训练	312	六、利用几何图形的直观性求 最值	324
标答与点拨	312	七、利用变量的取值范围求 最值	325
专题一 简化解析几何运算的若干 途径	317	八、利用圆锥曲线的性质求 最值	325
一、回归定义	317	单元总结与测评	326
二、挖掘几何属性	318	高考信息要求	326
三、设而不求	319	热点考题剖析	326
四、价值观念	320	综合能力测评	340
专题二 圆锥曲线的最值问题	321	标答与点拨	342
一、转化为斜率求最值	321		
二、转化为截距求最值	322		

第六章

不等式

6.1 不等式的性质



教材内容全解

一、不等式的基本性质(重点)

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0; a = b \Leftrightarrow a - b = 0; a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

注意:不等式的基本性质的作用在于:

(1)归:不等式的基本性质把两个实数的大小关系转化为两个实数的差的符号的确定,而利用实数的四则运算的符号法则,非负实数的有关性质等有关知识可以帮助我们顺利地确定其符号,因而不等式的基本性质起到了化生为熟的作用;

(2)依据:不等式的基本性质是比较大小、不等式性质的证明、不等式的证明、解不等式的主要依据.

例1 已知 $a > b > 0$, 比较 $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}$ 与 $\frac{a - b}{a + b}$ 的大小.

解析 由不等式的基本性质可知,先作差,作差后其符号还不能确定,怎么办?这就需要代数式进行恒等变形,使它能利用符号法则来确定其符号.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} - \frac{a - b}{a + b} \\ &= (a - b) \left(\frac{a^2 - ab - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 - ab - b^2}{a^2 - b^2} \right) \\ &= \frac{2ab(a - b)}{a^3 + b^3}, \\ & \because a > b > 0, \\ & \therefore a - b > 0, \\ & \therefore \frac{2ab(a - b)}{a^3 + b^3} > 0, \\ & \therefore \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} - \frac{a - b}{a + b} > 0, \text{ 即 } \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} > \frac{a - b}{a + b}. \end{aligned}$$

特别提示

作差后,化为积商有利于符号的确定.

同类变式 已知 $x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{R}$, 比较 $x^2 + x + 1$ 与 $-2m^2 + 2mx$ 的大小.

解析 在这里, 作差后无法进行因式分解而转化为积的形式, 怎么办? 注意到在这里有两个字母 x 和 m , 因此我们要对它们进行配方, 把它们转化为非负实数之和, 从而确定其符号.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \because x^2 + x + 1 - (-2m^2 + 2mx) \\ &= x^2 - (2m-1)x + 2m^2 + 1 \\ &= \left(x - \frac{2m-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(2m-1)^2 + 2m^2 + 1 \\ &= \left(x - m + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2 + m + \frac{3}{4} \\ &= \left(x - m + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0. \\ \therefore x^2 + x + 1 &\geq -2m^2 + 2mx. \end{aligned}$$

二、不等式的性质(重点)

1. 对称性

定理 1: $a > b \Rightarrow b < a; b < a \Rightarrow a > b$.

2. 传递性

定理 2: 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$.

解题规律

由教材上对这两个性质的证明可知: 证明不等式时, 应先把条件中的不等关系转化为某些代数式的符号规律; 再对待证的不等式作差变形, 使之利用已知的代数式的符号, 从而确定作差变形后的代数式的符号, 进而完成证明. 这种证明不等式的方法我们称为比较法.

例 2 已知 $x \in \mathbf{R}$, 试比较 $2x^2 - 3x + 3$ 与 $\frac{2}{2^x + 2^{-x}}$ 的大小.

解析 如果作差、变形, 由于“ x ”既在底数上, 又在指数上, 因而无法进行因式分解, 那么如何进行才好呢? 我们应该想办法找到一个中间数, 以它作媒介来传递, 因而分别求出两个函数 $y = 2x^2 - 3x + 3$ 与 $y = \frac{2}{2^x + 2^{-x}}$ 的最值就是自然而然的事.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \because 2x^2 - 3x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{15}{8} \geq \frac{15}{8}, \\ 2^x + 2^{-x} &= (\sqrt{2^x} - \sqrt{2^{-x}})^2 + 2 \geq 2, \\ \therefore \frac{2}{2^x + 2^{-x}} &\leq 1. \\ \text{又} \because \frac{15}{8} &> 1, \end{aligned}$$

解题技巧

用不等式的基本性质比较大小的步骤是: 作差 \rightarrow 变形 \rightarrow 判断符号 \rightarrow 下结论.

其中变形要有利于符号的确定, 例如变形为积商形式、非负实数之和(仍为非负实数)等.

警示误区

只有同向不等式才具有传递性.

$$\therefore 2x^2 - 3x + 3 > \frac{2}{2^x + 2^{-x}}.$$

同类变式 设实数 a, b, c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$, $c-b=4-4a+a^2$, 则 a, b, c 的大小关系是_____.

解析 由题设的第二个等式可以比较 b 与 c 的大小, 因而只需要比较 a 与 b , a 与 c 的大小, 我们只要由题设两个等式分别消去 c 和 b , 就可以比较出大小.

$$\text{解 } \because c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2 \geq 0,$$

$$\therefore c \geq b.$$

$$\text{又 } \because b = \frac{1}{2}[(b+c) - (c-b)] = \frac{1}{2}[(6-4a+3a^2) - (4-4a+a^2)] = a^2 + 1,$$

$$\therefore b-a = a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

$$\therefore b > a,$$

$$\therefore c \geq b > a.$$

3. 加法的单调性

定理 3: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

推论: 若 $a > b, c > d$, 则 $a + c > b + d$.

注意: 有了不等式的加法单调性, 不等式的移项法则也就有了理论依据, 因而不等式就可以像方程一样地变形、化简.

例 3 命题“若 $a > b, c < d$, 则 $a - c > b - d$ ”及其逆命题是否为真命题? 若为真命题, 则证明它; 若为假命题, 请举一反例.

解 命题“若 $a > b, c < d$, 则 $a - c > b - d$ ”为真命题, 其证明如下:

$$\because a > b, c < d,$$

$$\therefore a - b > 0, d - c > 0,$$

$$\therefore (a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c) > 0,$$

$$\therefore a - c > b - d.$$

特别提示

只有同向不等式才具有相加性; 而异向不等式只具有相减性.

其逆命题“若 $a - c > b - d$, 则 $a > b, c < d$ ”为假命题. 举例: $6 - 4 > 4 - 3$, 但 $6 > 4$ 而 $4 > 3$.

同类变式 命题“若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”是否为真命题? 并证明你的结论. 它的逆命题是否为真命题? 如果不为真命题, 则由“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”可得到 a 与 b 的大小关系如何?

解析 对于原命题由特例可知它为真命题, 因而考虑用比差法进行证明. 对于逆命题, 由特例可知它不一定成立.

解 命题“若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”是真命题, 其证明如下:

$$\because a > b > 0,$$

$$\therefore a - b > 0, ab > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

令 $a = -2$, $b = -3$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 但 $b < a < 0$. 故它的逆命题是假命题.

由 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0$ 知:

当 $a-b > 0$ 时, 则 $ab > 0$, 即 a 与 b 同号, $\therefore a > b > 0$ 或 $b < a < 0$;

当 $a-b < 0$ 时, 则 $ab < 0$, 即 a 与 b 异号, $\therefore a < 0 < b$.

故 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow a > b > 0$ 或 $b < a < 0$ 或 $a < 0 < b$.

4. 乘法的单调性(难点、重点)

定理 4: ①若 $a > b$ 且 $c > 0$, 则 $ac > bc$; ②若 $a > b$ 且 $c < 0$, 则 $ac < bc$.

推论 1: 若 $a > b > 0$ 且 $c > d > 0$, 则 $ac > bd$.

推论 2: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ ($n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$).

定理 5: $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$).

例 4 下面命题中, 假命题的序号是_____.

① 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$.

② 若 $a > b, n = 2k-1$ ($k \in \mathbb{N}^+$), 则 $a^n > b^n$.

③ 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

④ 若 $a > b, n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$, 则 $a^n > b^n$ 且 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

解析 要判定命题为真命题, 则必须经过严密的推理论证才行; 而要判定命题为假命题, 则只需要举一反例即可, 举例时可用“特殊值”法取特例值.

解 ①是假命题. 例如取 $a = -1, b = -2, c = -1, d = -3$, 则 a, b, c, d 满足条件“ $a > b, c > d$ ”, 但 $ac = 1 < 6 = bd$.

②是真命题. \because 当 $a > b \geq 0$ 时, 则 $a^n > b^n$; 当 $a \geq 0 > b$ 时, 则 $a^n \geq 0, b^n < 0$, $\therefore a^n > b^n$; 当 $b < a < 0$ 时, 则 $-b > -a > 0$, $\therefore (-b)^n > (-a)^n$, 又 $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}^+$), $\therefore (-b)^n = -b^n, (-a)^n = -a^n$, $\therefore -b^n > -a^n$, 即 $a^n > b^n$, 故 $a^n > b^n$ 恒成立.

③是真命题. $\because c > d > 0, \therefore \frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0$,

又 $a > b > 0, \therefore \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

④是假命题. 例如取 $a = -1, b = -2, n = 2$, 则 a, b, n 满足条件“ $a > b, n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$ ”, 但 $a^n = (-1)^2 = 1 < b^n = (-2)^2 = 4$, 而 $\sqrt{-1}$ 与 $\sqrt{-2}$ 均无意义.

故应填①④.

警示误区
在应用定理 4 和定理 5 时, 一定要注意它们的前提条件“ a, b 是正数”.

同类变式 (全国高考题)若 a, b 是任意实数,且 $a > b$, 则

()

A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{b}{a} < 1$ C. $\lg(a-b) > 0$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

解 解法一:由不等式性质知 A, B 不正确,而 $a-b$ 不一定大于 1, 因而 C 也不正确,而函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 递减,又 $a > b$, \therefore

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b, \text{ 故选 D.}$$

解法二:(特例排除法)取 $a=1, b=-1$ 可排除 A; 取 $a=-1, b=-2$ 可排除 B; 取 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 可排除 C. 故选 D.

解题规律

在不等式变形时,必须做到“有理有据”,也就是依据某个不等式性质进行变形(满足性质中所有条件,才有相关的结论),切忌随意操作.

三、对不等关系的进一步理解(难点)

例5 若二次函数 $f(x)$ 的图像过原点,且 $1 \leq f(-1) \leq 2, 3 \leq f(1) \leq 4$, 求 $f(-2)$ 的取值范围.

某同学解答这道题的过程如下:

$\because f(x)$ 的图像过原点, $\therefore c=0$, 故设 $f(x)=ax^2+bx$.

由 $1 \leq f(-1) \leq 2$ 及 $3 \leq f(1) \leq 4$ 得 $1 \leq a-b \leq 2, 3 \leq a+b \leq 4$.

$\therefore 4 \leq 2a \leq 6$, 即 $2 \leq a \leq 3$, 即 $8 \leq 4a \leq 12$.

又 $-2 \leq b-a \leq -1$, $\therefore 1 \leq 2b \leq 3$, $\therefore -3 \leq -2b \leq -1$.

$\therefore 5 \leq f(-2) = 4a - 2b \leq 11$.

故 $f(-2)$ 的取值范围是 $[5, 11]$.

该同学的解答是否正确? 如果错, 错在哪里? 并给出正确的解答.

解 该同学的解答是错误的, 如 $f(-2) = 7$ 就不能成立.

这是因为若 $f(-2) = 5$, 则 $-2b$ 和 $4a$ 必须均取最小值 -3 和 8 .

即 $a=2, b=\frac{3}{2}$. 而此时 $a-b=\frac{1}{2} < 1$. 这与“ $1 \leq a-b \leq 2$ ”矛盾.

究其原因是:一方面这里“ \leq ”隐含着“所有的”;另一方面满足“ $1 \leq a-b \leq 2$ ”且“ $3 \leq a+b \leq 4$ ”的 a 与 b 之间有一个制约关系, 因此 a 与 $-b$ 不一定能同时取得最大值和最小值. 其正确的解答如下:

\because 函数 $y=f(x)$ 的图像过原点,

$\therefore c=0$, 故设 $f(x)=ax^2+bx(a \neq 0)$.

设 $f(-2) = mf(-1) + nf(1)$, 则 $4a - 2b = (m+n)a + (m-n)b$.

$$\therefore \begin{cases} m+n=4, \\ m-n=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=3, \\ n=1. \end{cases}$$

$\therefore f(-2) = 3f(-1) + f(1)$.

$\because 1 \leq f(-1) \leq 2, \therefore 3 \leq 3f(-1) \leq 6$,

又 $3 \leq f(1) \leq 4, \therefore 6 \leq f(-2) = 3f(-1) + f(1) \leq 10$.

故 $f(-2)$ 的取值范围是 $[6, 10]$.

同类变式 设 $2 < a < 3, -4 < b < -3$, 求 $a+b, a-b, \frac{a}{b}, ab, \frac{b^2}{a}$ 的取值范围.

解 $\because 2 < a < 3, -4 < b < -3, \therefore -2 < a+b < 0$.

由 $-4 < b < -3$ 知 $3 < -b < 4, \therefore 5 < a-b < 7$.

由 $3 < -b < 4$ 知 $\frac{1}{4} < \frac{1}{-b} < \frac{1}{3}, \therefore \frac{2}{4} < \frac{a}{-b} < 1$, 即 $-1 < \frac{a}{b} < -\frac{1}{2}$.

$\because 3 < -b < 4, \therefore 6 < a(-b) < 12, \therefore -12 < ab < -6$.

由 $3 < -b < 4$ 知 $9 < (-b)^2 < 16$, 又 $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{2}, \therefore 3 < \frac{b^2}{a} < 8$.



解题方法指导

一、不等式的性质与函数的联系

一方面, 不等式的许多性质具有“函数”的背景, 如“ $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}^+)$ ”, 其实就是幂函数 $y = x^n$ 在 \mathbf{R}^+ 上的单调性; 另一方面, 不等式也是研究函数性质的有力工具.

例6 研究函数 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ 的单调性, 并证明你的结论.

解析 由于在这里既要判断 $f(x)$ 的单调性, 又要证明它, 因此用定义来判断和证明是明智之举.

解 设 $x_1 > x_2$, 则 $x_1 - x_2 > 0$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1^2+1} - x_1 - (\sqrt{x_2^2+1} - x_2) \\ &= \sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1} + x_2 - x_1 \\ &= \frac{(x_1^2+1) - (x_2^2+1)}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} - (x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

又 $\sqrt{x_1^2+1} > |x_1| > x_1$, 同理 $\sqrt{x_2^2+1} > x_2$,

$$\therefore \sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1} > x_1 + x_2,$$

$$\text{即 } \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} < 1,$$

$$\text{即 } \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} - 1 < 0,$$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是减函数.