路路通名校
系列丛书

2006年

高考热点聚焦

数学

shuxue

主编：林绍龙

西南师范大学出版社

路路通名校

系列丛书

2006年

高考热点聚焦

数学

主　　编　林绍龙
副 主 编　钟及龙

本册主编　袁友明
参编人员　袁友明　慕泽刚　陈　云　廖　勤　邓国军
　　　　　陈玉兵　肖依华　肖　辉　杨联伦　周志良
　　　　　周志泉　隆国贵　赖天禄

GAOKAORED IANJUJIAO

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2006年高考热点聚焦丛书.数学/林绍龙主编；
袁友明本册主编.—重庆：西南师范大学出版社，2006.2
ISBN 7-5621-3546-0

Ⅰ.2… Ⅱ.①林…②袁… Ⅲ.数学课—
高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第011108号

2006年高考热点聚焦·数学

丛书主编：林绍龙　本册主编：袁友明

责任编辑：伯古娟
封面设计：谭　玺

出　版：西南师范大学出版社出版、发行
　　　　重庆·北碚　邮编：400715
　　　　www.xscbs.com
印　刷：重庆师范大学印刷厂
开　本：787mm×1092mm　1/16
印　张：7
字　数：198千字
版　次：2006年2月第1版
印　次：2006年2月第1次印刷
书　号：ISBN 7-5621-3546-0/G·2242

定　价：9.60元

前言

《高考热点聚焦》丛书由多年从事高考复习研究的教研员和从事高考复习教学工作的一线骨干教师担纲编写，并由研究员级教师(正高)、中学特级教师把关审定而成。编著者根据多年对高考复习和对学生应考实际的研究，针对学生在第一阶段复习后经常出现的疑难问题，同时结合高考的重点、难点、热点问题来设置专题，专题所选材料完全按照大纲的要求编写，能给学生的高考复习提供指点迷津的高效帮助。

该丛书贯穿了高考改革精神，荟萃了名师宝贵经验，熔炼了教学前沿成果，汇集了高考最新题型，从而凸现出清晰的高考热点导向，精当的重点突破脉络，高效的学习策略，实用的解题技巧，新颖的题型设计，综合的能力训练等特点。

丛书分《语文》、《数学》、《英语》、《理科综合》、《文科综合》五册，供高2006级学生后期复习使用。

编　者

2006年2月

目　　录

专题一　集合、简易逻辑题型分析与预测

一、高考命题特点及预测

集合是近代数学中最基本的概念之一.集合观点渗透于中学数学内容的各个方面,是高考中必考的知识点,集合部分考查的知识点主要是集合的基本概念,子集、交集、并集、补集的定义,近几年的考题偏重于交、并、补的运算.

高考对逻辑部分仅是对基本内容的考查,一般难度不大,主要涉及以下几个方面:①正确地使用逻辑联结词"或"、"且"、"非",会判断复合命题的真假;②已知四种命题中的一种,求其他三种,并会判断真假;③会一些较简单的充要条件的判断,并会用充要条件的知识解决一些与其他知识相关的问题.

高考中涉及该部分知识的考题难度一般属于中偏下水平,一般出现一个选择题或一个填空题,分值在 5~10 分.考生在考试时要有信心,注意细心.

二、范例精析

(一)选择题部分

例 1　('05 苍南中学摸底考试)下列集合中恰有 2 个元素的是(　　)

A. $\{x^2-x=0\}$　　B. $\{y|y^2-y=0\}$

C. $\{x|y=x^2-x\}$　　D. $\{y|y=x^2-x\}$

[解]本题主要考查对集合的表示方法中的描述法的理解.对于描述法,"|"左边表示集合的一般元素,"|"右边是元素的特征,而 A 不是集合的正确表示,C、D 中元素有无数个.方程 $y^2-y=0$ 的解为 $y=0$ 或 $y=1$,符合题意,故选 B.

[注]$A=\{x|y=f(x)\}$、$B=\{y|y=f(x)\}$、$C=\{(x,y)|y=f(x)\}$ 的另一种理解方法为:A 表示函数 $y=f(x)$ 的定义域,B 表示函数 $y=f(x)$ 的值域,C 表示函数 $y=f(x)$ 的图像上的点集.

例 2　('05 吉林实验中学模拟)设集合

$M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,

$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,则(　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $N\subsetneqq M$　　D. $M\cap N=\phi$

[解法一]　(观察归纳)取 $k\in\mathbf{Z}$,可得

$M=\{\cdots\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4},\cdots\}$,

$N=\{\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{5}{4},\frac{6}{4},\frac{7}{4},\frac{8}{4},\frac{9}{4},\cdots\}$,

可得 $M\subsetneqq N$,故选 B.

[解法二]　$M:\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}$,

$N:\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,$2k+1$ 是奇数,$k+2$ 是整数,故选 B.

例 3　('05 镇江调研)不等式 $\frac{x-2}{3-x}\geqslant0$ 的解集是(　　)

A. $(2,3)$　　B. $[2,3)$

C. $(-\infty,2]$　　D. $(3,+\infty)$

[解法一]　(解不等式)

$\frac{x-2}{3-x}\geqslant0\Rightarrow\frac{x-2}{x-3}\leqslant0\Rightarrow2\leqslant x<3$,故选 B.

[解法二](排除法)观察答案,选取特值检验,排除错误答案.令 $x=2$,原不等式成立,排除 A,D;令 $x=0$,原不等式不成立,排除 C,故选 B.

[注]特值法是选择题中常用的一种方法.恰当使用好特值法,能大大提高正确率.

例 4 （'05 北京卷）“$m=\frac{1}{2}$”是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的（　　）

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

[解]若 $m=\frac{1}{2}$，直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 分别为 $\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y+1=0$ 和 $-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}y-3=0$，此时两直线也垂直，所以“$m=\frac{1}{2}$”是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的充分条件；但是，当 $m=-2$ 时，直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 分别为 $y=\frac{1}{6}$ 和 $x=-\frac{3}{4}$，两直线也垂直，所以“$m=\frac{1}{2}$”不是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的必要条件. 故选 B.

[注]直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充分必要条件是 $A_1A_2+B_2B_1=0$.

例 5 （'05 泉州）“若 p，则 q”为真命题，下列说法一定正确的是（　　）

A. $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分条件

B. $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要条件

C. $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充要条件

D. $\neg p$ 是 $\neg q$ 的既不充分也不必要条件

[解]“若 p，则 q”的等价命题是其逆否命题，所以“若 $\neg q$，则 $\neg p$”为真命题，所以 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要条件，故选 B.

[方法归纳总结]

集合、简易逻辑、四种命题的选择题部分的试题难度是中等及中偏下. 在解答时，要正确理解题意，用好选择题的基本方法（如赋值法、验证法、排除法、数形结合法等），对于解不等式的选择题，常用排除法. 在复习过程中，注意相关概念要清楚，推理要正确.

(二)填空题部分

例 6 （'05 北京市西城区抽样）

设集合 $A=\{(x,y)\mid x=a,a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+y^2=1\}$，若 $A\cap B=\phi$，则实数 a 的取值范围是________.

[解法一]　代 $x=a$ 入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $\frac{a^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y^2=1-\frac{a^2}{4}$，由 $A\cap B=\phi$ 得 $1-\frac{a^2}{4}<0\Rightarrow a<-2$ 或 $a>2$.

[解法二]　（数形结合）$A=\{(x,y)\mid x=a,a\in\mathbf{R}\}$ 表示平行于 y 轴的直线；$B=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+y^2=1\}$ 表示焦点在 x 轴，中心在原点，长半轴长为 2，短半轴长为 1 的椭圆. 要使 $A\cap B=\phi$，即直线与椭圆无交点，有 $a<-2$ 或 $a>2$.

例 7 （'04 重庆）已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. p 是 q 成立的________条件.

[解]用“$\Rightarrow$”找 p 与 q 的关系：$p\Rightarrow r\Rightarrow s\Rightarrow q$，故 p 是 q 成立的充分不必要条件.

例 8 （'04 江苏）二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(x\in\mathbf{R})$ 的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是________.

[解法一]　联立方程组求 a,b,c 的值，然后解不等式.

当 $x=-1$ 时，$y=-4$；

当 $x=1$ 时，$y=-6$；

当 $x=0$ 时，$y=-6$；

得 $a=1,b=-1,c=-6$，

$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x^2-x-6>0 \Rightarrow x<-2$ 或 $x>3$.

故填$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

[解法二] 利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质,由表格可得,①当 $x=-2$ 和 $x=3$ 时,$y=0$;②当 $x<0$ 时函数值减小,当 $x>1$ 时,函数值增大,所以 $a>0$. 由 $ax^2+bx+c>0$ 解得 $x<-2$ 或 $x>3$.

故填$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

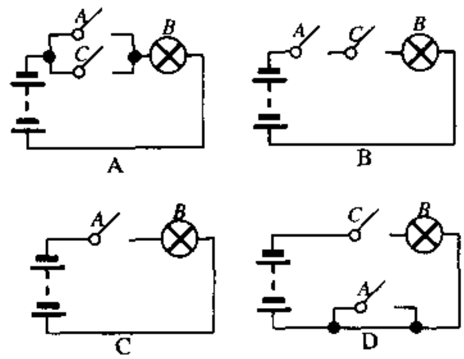
[方法归纳总结]

集合、简易逻辑、四种命题的填空题部分的试题难度是中等及中偏下. 解答时,一般使用直接法,有些题还可以利用数形结合解答更为直观.

三、能力训练

(一)选择题

1. ('05 江苏卷)设集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{2,3,4\}$,则$(A\cap B)\cup C=$(　　)
   A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2,4\}$
   C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$
2. ('05 潍坊高三统考)已知集合 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\left\{x \mid y=\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right\}$, $C_uA=$(　　)
   A. $\{x \mid 0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x \mid x<0$ 或 $x\geqslant 1\}$
   C. $\{x \mid x\geqslant 1\}$　　D. $\{x \mid x<0\}$
3. ('05 黑龙江省西北部地区重点中学二模)已知集合 $A=\{y \mid y=\log_2 x, x>1\}$, $B=\{y \mid y=(\frac{1}{2})^x, x>1\}$,则 $A\cap B$ 等于(　　)
   A. $\{y \mid 0<y<\frac{1}{2}\}$　　B. $\{y \mid 0<y<1\}$
   C. $\{y \mid \frac{1}{2}<y<1\}$　　D. ϕ
4. ('05 湖北卷)设 P,Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a\in P, b\in Q\}$ 若 $P=\{0,2,5\}$, $Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　)
   A. 9　　B. 8
   C. 7　　D. 6
5. ('05 人大附中摸底考试)
   已知集合 $A=\{x \mid x^2-x-2>0\}$,集合 $B=\{x \mid |x-a|<3\}$,若 $A\cup B=\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是(　　)
   A. $[1,2]$　　B. $(1,2)$
   C. $[-1,2]$　　D. $(-2,1)$
6. ('05 福建卷)已知 $p: |2x-3|<1$, $q: x(x-3)<0$,则 p 是 q 的(　　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
7. ('05 呼和浩特二摸)"p 且 q 是真命题"是"p 或 q 是真命题"的(　　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
8. ('05 江西卷)"$a=b$"是"直线 $y=x+2$ 与圆 $(x-a)^2+(y+b)^2=2$ 相切"的(　　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
9. ('05 福建卷)已知直线 m,n 与平面 α,β,给出下列三个命题:
   ①若 $m/\!/\alpha, n/\!/\alpha, m/\!/n$;
   ②若 $m/\!/\alpha, n\perp\alpha, n\perp m$;
   ③若 $m\perp\alpha, m/\!/\beta, \alpha\perp\beta$.
   其中真命题的个数是(　　)
   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3
10. ['05 咸阳(理科)]在下列电路图中,表示开关 A 闭合是灯泡 B 亮的必要但不充分条件的线路图是(　　)



(二)填空题

11. ('05 上海向明中学模拟)设集合 $A=\{1,a\}$，集合 $B=\{a,a^2\}$，且 $A=B$，则 $a=$________.

12. ('05 上海市十校)
若集合 $A=\{x||x-2|<3$，集合 $B=\left\{x|\frac{x-3}{x}>0\right\}$，则 $A\cap B=$__________.

13. ('04 山东、山西、河南、河北、江西、安徽)不等式 $|x+2|\geqslant|x|$ 的解集是__________.

14. ['04 上海(理科)]
设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$. 若 $A\cap B=2$，则 $A\cup B=$____.

15. ['04 湖北(理科)]设 A,B 为两个集合，下列四个命题：
①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$对任意 $x\in A,x\notin B$；
②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\phi$；
③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\supseteq B$；
④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$.
其中真命题的序号是__________.(把符合要求的命题序号都填上)

专题二　函数题型分析与预测

一、高考命题特点及预测

纵观近几年高考中的函数变化，可以看出：在重点知识反复考查的指导下，构造题目出现了三大特点：抽象化、综合化、人为化.

重点知识：单调性、对称性、奇偶性、周期性年年考不回避.

抽象化：过去多用具体函数通过计算检验性质的正确性. 现在多是给出抽象函数，必须通过逻辑推理才能得到结论. 重庆地区也在向这方面发展.

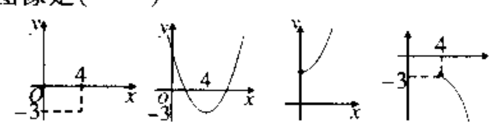
人为化：过去主要用函数考查学生的数学建模能力，现在由于概率、线性规划等新内容应用的必然性，函数只有改用人为构造的抽象形式.

综合化：受知识相互渗透的影响.

二、范例精析

(一)选择题部分

例1　('05 海淀区)设函数 $f(x)=4+\sqrt{2(3+x)}\,(x\geq -3)$，则其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像是(　　)



A　　　B　　　C　　　D

[解法一] 因为 $f(x)=4+\sqrt{2(3+x)}\,(x\geq -3)$，所以 $f^{-1}(x)$ 的值域是 $y\geq -3$，于是排除 C,D；又因为 $f(x)$ 为增函数而 B 不具备单调性被排除，所以只有选 A.

[解法二] 因为 $f(x)=4+\sqrt{2(3+x)}\,(x\geq -3)$ 图像的段点为 $P(-3,4)$，所以 $f^{-1}(x)$ 的图像过点 $Q(4,-3)$，于是排除 C；又因为 $f(x)$ 为增函数故又排除 B,D. 所以选 A.

例2　(上海)若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$，则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是(　　)

A. 单调递减无最小

B. 单调递减有最小

C. 单调递增无最大

D. 单调递增有最大

[解] 因为 $g(x)=2^x$ 为增函数，既无最大值也无最小值，又 $g(x)=2^x>0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减且既无最大值也无最小值. 所以选 A.

例3　('05 浙江)设函数 $f(x)$ 是偶函数，且对于任意正实数 x 满足 $f(2+x)=-2f(2-x)$. 若 $f(-1)=4$，那么 $f(-3)$ 的值是(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 8　　D. -8

[解]
$$\begin{aligned}f(3)&=f(2+1)\\&=2f(2-1)\\&=2f(1)\\&=2f(-1)\\&=2\times 4\\&=8\end{aligned}$$

例4　('05 浙江)已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-1$，那么不等式 $f(x)<\dfrac{1}{2}$ 的解集是(　　)

A. $\{x|0<x<\dfrac{3}{2}\}$

B. $\{x|-\dfrac{1}{2}<x<0\}$

C. $\{x|-\dfrac{1}{2}<x<0 \text{ 或 } 0<x<\dfrac{3}{2}\}$

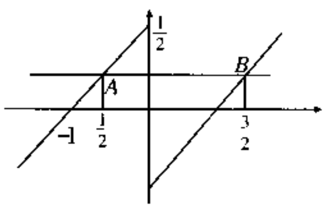
D. $\{x|x<-\dfrac{1}{2} \text{ 或 } 0\leq x<\dfrac{3}{2}\}$

[**解**]因为 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以当 $x<0$ 时，点 $M(x,y)$ 在 $y=f(x)$ 上，则关于(0,0)的对称点 $N(-x,-y)$ 也在 $y=f(x)$ 上. 代入得 $-y=-x-1$，即是 $y=x+1$. 当 $x=0$ 时由奇函数的性质可知 $f(0)=0$，所以 $f(x)=\begin{cases}x-1(x>0)\\0(x=0)\\x+1(x<0)\end{cases}$.

由 $\begin{cases}y=x+1\\y=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；

由 $\begin{cases}y=x-1\\y=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$，

如下图所示，因为原不等式为 $f(x)<\frac{1}{2}$，故选 D.



[**注**]本题也可以先求出当 $x<0$ 时的 $f(x)$ 的表达式后分类解不等式.

例 5 （'05 海淀）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{3}{4},0)$ 对称，且满足 $f(x)=-f(x+\frac{3}{2})$，$f(-1)=1$，$f(0)=-2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,005)$ 的值是（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

[**分析**]由函数的抽象性及其所求和式的不可逐项计算性可以看出只能寻找和式的规律. 从 $f(x)=-f(x+\frac{3}{2})$ 得 $f(x)$ 是一个周期为 3 的函数，于是应求出一个周期内的函数值之和. 条件中告诉了两个，余下一个应当由函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{3}{4},0)$ 对称获得.

[**解**]因为 $f(x)=-f(x+\frac{3}{2})$，

$f(x+3)=-f(x+\frac{3}{2})=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是周期为 3 的函数.

$$\begin{aligned}f(1)&=-f(1+\frac{3}{2})\\&=-f(\frac{5}{2}-3)\\&=-f(-\frac{1}{2})\\&=f[-\frac{3}{4}\times2-(-\frac{1}{2})]\\&=f(-1)=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(2)&=f(3-1)\\&=f(-1)\\&=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(3)&=f(3-3)\\&=f(0)\\&=-2.\end{aligned}$$

所以一个周期内的函数值之和为

$f(3k)+f(3k+1)+f(3k+2)=0.\ (k\in\mathbf{Z})$

故 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,005)$

$=f(1)=1.$

例 6 （'05 重庆）

对 $x\in\mathbf{R}$，若二次函数 $f(x)=ax^2+2bx+c$ $(b>a)$ 的值恒为非负数，则 $M=\frac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值是（　　）

A. $3+2\sqrt{3}$　　B. $3-2\sqrt{3}$

C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

[**解**]由 $M=\frac{a+b+c}{b-a}$ 得：

$c=M(b-a)-(a+b)$，

故 $f(x)=ax^2+2bx+M(b-a)-(a+b)$，

且函数值恒为非负数. 有：

$\Delta=4b^2-4a[m(b-a)-(a+b)]\leqslant0$

其中 $b>a>0$，

即是 $m\geqslant\frac{b+ab+a}{a(b-a)}=(\frac{b}{a}-1)+3+\frac{3}{\frac{b}{a}-1}\geqslant$ $3+2\sqrt{3}$,故选择 A.

例 7 (渝东)函数 $f(x)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x+a|-a}$ 是奇函数的充要条件是( )

A. $-1\leqslant a<0$ 或 $0<a\leqslant 1$

B. $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$

C. $a>0$

D. $a<0$

[**解**]由 $f(-x)=-f(x)$ 有

$|-x+a|-a=a-|x+a|\Leftrightarrow|x+a|+|x-a|=2a$,

所以 $-|a|\leqslant x\leqslant|a|$,

设 $-a,a,x$ 在数轴上的对应点分别为 A,B,C,由于 C 在 A 与 B 之间,所以从距离的观点可知

$|x+a|+|x-a|=2a\geqslant 0\Leftrightarrow a>0$,选 C.

例 8 (黄冈)一种程序语言中,对实数 x,y $(y>0)$ 定义新运算:$x*y=\lg[(2y)^x+2]-\lg y^x$;等式右边的是通常的加、乘运算.已知 $x*2=\lg 3$,则 $x=$( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

[**解**]因为 $x*y=\lg[(2y)^x+2]-\lg y^x$,

故由 $x*2=\lg 3$ 可得到:

$\lg(4^x+2)=\lg 2^x=\lg 3$

$\lg(4^x+2)=\lg(3\cdot 2^x)$

$4^x+2=3\cdot 2^x$

$4^x-3\cdot 2^x+2=0$

$(2^x-2)(2^x-1)=0$

解方程得 $x=1$ 或 $x=0$.

若 $x=0$ 得:

$x*y=\lg[(2y)^x+2]-\lg y^x=\lg 3$

与 $x*2=\lg 3$ 不相吻合. 选 B.

例 9 ('05 浙江)

$x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*$,定义

$E_x^n=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$,

例如:

$E_{-4}^4=(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)=24$,

则 $f(x)=x\cdot E_{x-2}^5$ 的奇偶性为( )

A. 是偶函数不是奇函数

B. 是奇函数不是偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 非奇非偶函数

[**解**]$f(x)$

$=xE_{x-2}^5$

$=x(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$,

所以

$f(-x)=(-x)^2(-x-2)(-x-1)(-x+1)\cdot(-x+2)=f(x)$,

为偶函数,选择 A.

例 10 ('05 上海)设 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$,且 $y=f(x+a)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x+b)$. 若 $a=-1,b=2\ 006$,则 $f(2\ 005)-f(2\ 004)=$______.

A. 2 004　　B. 2 005

C. 2 006　　D. 2 007

[**解**]因为 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$,所以将 $y=f^{-1}(x+b)$ 反解为 $x+b=f(y)$,改写为 $y=f(x)-b$.

又因为 $y=f(x+a)$ 的反函数为

$y=f^{-1}(x+b)$,得到

$f(x)-b=f(x+a)\Rightarrow f(x)-f(x+a)=b$.

将 $a=-1,b=2\ 006$ 代入得

$f(x)-f(x-1)=2\ 006$,

令 $x=2\ 005$ 得

$f(2\ 005)-f(2\ 004)=2\ 006$. 应当选 C.

[方法归纳总结]

如果解一道题目只需概念的转换,不需计算就可以完成,就本题而言,是首选方法,也是提高解题速度的最佳方法,更是解题的最高境界. 数形结合是解选择题的首选方法,是提高解题速度的最佳方法. 排除法更是解选择题的常用方法.

函数的单调性是函数四大性质之首,历届高考反复考不回避,近年更是上升为考简单的复合函数单调性. 函数的奇、偶及其周期、对称性质的应用、几何性质的应用,是高

考必须具备的知识，近年更是上升为奇、偶性外加抽象函数与抽象思维.

一元二次函数是函数部分的核心，可以以它为载体考查高中的各个知识点. 因为是基础所以显得特别重要.

证明一个等式成立与否的一种方法是代数论证，另一种方法就是几何论证.

数学知识将随着社会的发展而发展，许多运算定义、符号都将会为了适应发展而改变. 这种改变也将反映到高考中来.

随着知识的相互渗透，数学的块与块之间必将相互渗透. 为了适应发展，这种渗透也将反映到高考中来.

前几年主要考查的是学生的正向思维能力，现在发展到考查学生的逆向思维能力. 例 10 是借助反函数的概念培养学生的逆向思维能力.

(二)填空题部分

例 11 （'04 北京四中）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且 $f(x+1)[1-f(x)]=1+f(x)$. 若 $f(1)=3$，则 $f(2)=$________，$f(2\,005)=$________.

[解]将 $f(1)=3$ 代入已知式，

解出 $f(2)=-2$，

由 $f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 得

$f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x+4)=f(x)$ 得

$T=4$，故 $f(2\,005)=f(1)=3$.

例 12 （'05 北京）若函数 $y=\lg(4-a\cdot 2^x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\leqslant 1\}$，则实数 a 的取值范围是________.

[解] $\begin{cases}x\leqslant 1\\ 4-a\cdot 2^x>0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x\leqslant 1\\ a<2^{2-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 1\\ a<2\end{cases}$

$\Rightarrow a<2$

例 13 （'05 湖北）函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in\mathbf{R}^+$，且 C 为正常数. 对于任意的 $x_1\in D$，存在 $x_2\in D$，使 $\sqrt{f(x_1)f(x_2)}=C$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上的均值为 C. 试依据上述定义，写出均值为 9 的函数的例子：________.

[解](1) $f(x)=9x\Rightarrow x_2=\dfrac{1}{x_1}\Rightarrow$

$D=\{$非零实数$\}$但不符合 $y\in\mathbf{R}^+$.

(2) $f(x)=9a^x\Rightarrow x_1+x_2=0\Rightarrow D=\mathbf{R}$.

(3) $f(x)=9b^{\log_a x}\Rightarrow x_2=\dfrac{1}{x_1}\Rightarrow D=\{$正实数$\}$.

例 14 （'05 江苏）

已知 a,b 为常数，若 $f(x)=x^2+4x+3$ 且 $f(ax+b)=x^2+10x+24$，则 $5a-b=$________.

[解]由题意 $(ax+b)^2+4(ax+b)+3=x^2+10x+24$，

可得 $\begin{cases}a^2=1\\ 2ab+4a=10,\\ b^2+4b=24\end{cases}$

$a=1,b=3\Rightarrow 5a-b=2$.

例 15 （'05 湖南）设函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,2)$ 对称，且存在反函数 $f^{-1}(x)$，若 $f(4)=0$，则 $f^{-1}(4)=$________.

[解]因为点 $(4,0)$ 关于 $(1,2)$ 的对称点为 $(-2,4)$ 在 $f(x)$ 的图像上，故点 $(4,-2)$ 必在其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像上，得 $f^{-1}(4)=-2$.

例 16 （'05 福建）把下面不完整的命题补充完整，并使之成为真命题.

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 与 $g(x)$ 的图像关于______对称，则 $g(x)=$______.

[解]若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 与 $g(x)$ 的图像关于 $y=x$ 对称，则 $g(x)=2^{x-3}$.

还可以有：(1)若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图像与 $g(x)$ 的图像关于 $x=m$ 对称，则函数 $g(x)=3+\log_2(2m-x)$.

(2)若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图像与 $g(x)$ 的图像关于 $y=n$ 对称，则函数 $g(x)=2n-3-\log_2 x$.

(3)若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图像与 $g(x)$

的图像关于点(a,b)对称,则函数 $g(x)=2b-3-\log_2(2a-x)$.

[**方法归纳总结**]

开放题型常常分为各种知识板块分类讨论,但是其模式是不变的. 一般一题只需要一个知识板块作答,但是我们在准备时必须复习好各个知识板块. 待定系数法和恒等式的思想是高考中的常用思想.

函数的对称问题用坐标进行转化是高考中的常见方法.

(三)解答题部分

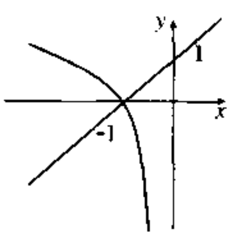
例 17 ('03 全国)

解不等式 $\log_2(-x)<x+1$.

[**分析**]外形为解不等式,核心为函数问题. 观察发现无常规解法,只有通过分析法完成.

[**解法一**]由 $f(x)=\log_2(-x)$的结构可知 $x<0$,而当 $x=-1$ 时,$\log_2(-x)=x+1=0$;由 $f(x)=\log_2(-x)$为$(-\infty,0)$上的减函数,$g(x)=x+1$为 **R** 上的增函数可知原不等式的解为 $-1<x<0$.

[**解法二**]如右图所示,在同一坐标中作出$f(x)=\log_2(-x)$与 $g(x)=x+1$ 的图像,可知原不等式 $\log_2(-x)<x+1$ 的解为 $-1<x<0$.



例 18 经测量某地区高一新生入学时学力指数为 200 个单位,高一、高二、高三每学年按 300 天计算,三个年级每天学力指数的增长速度分别为 1、2、3 个单位.

(1)某生入学 x 天,求他(她)的学力指数 $f(x)$个单位的解析式.

(2)某生的学力指数达到 x 个单位,求他(她)上学天数 $g(x)$的解析式.

(3)某生的学力指数达到1 400个单位,请问该生在哪一个年级上学? 在该年级上了多少天的学?

[**解**](1)由题意,某生入学 x 天,他(她)的学力指数$f(x)$个单位的解析式分为高一、高二、高三共三个部分,其中每升入高一个年级总是完成了本年级的学习之后才可能. 于是每一部分都是以前一个部分为基础的:

$$f(x)=\begin{cases}200+x\\500+2(x-300),\\1100+3(x-600)\end{cases}\text{即}$$

$$f(x)=\begin{cases}x+200(0\leqslant x\leqslant 300)\\2x-100(300<x\leqslant 600).\\3x-700(600<x\leqslant 900)\end{cases}$$

(2)显然 $g(x)$是$f(x)$的反函数,

由当 $0\leqslant x\leqslant 30$ 时 $f(x)=x+200$,

得其反函数 $g(x)=x-200(200\leqslant x\leqslant 500)$.

同理可得

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+100)(500<x\leqslant 1\,100)$$

与 $g(x)=\frac{1}{3}(x+700)(1\,100<x\leqslant 2\,000)$.

所以:

$$g(x)=\begin{cases}x-200(200\leqslant x\leqslant 500)\\\frac{1}{2}(x+100)(500<x\leqslant 1\,100)\\\frac{1}{3}(x+700)(1\,100<x\leqslant 2\,000)\end{cases}$$

(3)某生的学力指数已经达到1 400个单位,根据 $g(x)$可知他上高中$\frac{1}{3}(1\,400+700)=700$(天);而由 $700-2\times300=100$(天)可知他在三年级上了 100 天的学.

例 19 ('05 海南)某食品厂定期购买面粉,已知该厂每天需要面粉 6 t,每吨面粉的价格为1 800元,面粉的保管与其费用为平均每天 3 元,购买面粉每次支付运费 900 元.

(1)求该厂多少天购买一次面粉才能使平均每天支付的总费用最小.

(2)若面粉公司规定,当一次购买面粉不少于 210 t 时其价格可享受九折优惠(即原价的 90%). 问该厂是否考虑利用此优惠条件,请说明理由.

[解](1)设该厂应隔 x 天购买一次面粉,其购买量为 $6x$ t,则面粉的保管与其他费用为:

$$[6(x-1)+\cdots 6\cdot 1]\cdot 3=9x^2-9x$$

平均每天支出的费用为 y_1,则

$$y_1=\frac{1}{x}(9x^2-9x+900)+6\times 1\ 800$$

$$=\frac{900}{x}+9x+10\ 791$$

$$\geqslant 10\ 971$$

$$\frac{900}{x}=9x,x=10$$

即每隔 10 天购买一次才能使平均每天支付的总费用最小.

(2)若厂家利用此优惠条件,则至少35天购买一次面粉,设该厂利用此优惠条件,每隔 x 天($x\geqslant 35$)购买一次面粉,平均每天支出的费用为 y_2.

$$y_2=\frac{1}{x}(9x^2-9x+900)+6\times 1\ 800\times 0.9$$

$$=\frac{900}{x}+9x+9\ 711(x\geqslant 35)$$

利用单调性可证

$f(x)=\dfrac{900}{x}+9x$ 在$[35,+\infty)$上递增.

$x=35$ 时 $f(x)$ 取得最小值,即 $y_{\min}=10\ 051.7<10\ 971$,该厂应接受此优惠条件.

例 20 设 $f(x)$ 是定义域在$[-1,1]$上的奇函数,且其图像上任意两点连线的斜率均小于零.

(1)求证:$f(x)$ 在$[-1,1]$上是减函数;

(2)如果 $f(x-c)$,$f(x-c^2)$ 的定义域的交集为空集,求实数 c 的取值范围;

(3)证明:若 $-1\leqslant c\leqslant 2$,则 $f(x-c)$,$f(x-c^2)$ 存在公共的定义域,并求这个公共的定义域.

(1)[证明]因为奇函数 $f(x)$ 的图像上任意两点连线的斜率均为负,

所以对于任意 x_1、$x_2\in[-1,1]$且 $x_1\neq x_2$,

有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$.

从而 x_1-x_2 与 $f(x_1)-f(x_2)$ 异号,

所以 $f(x)$ 在$[-1,1]$上是减函数.

(2)[解]$f(x-c)$ 的定义域为$[c-1,c+1]$,

$f(x-c^2)$ 的定义域为$[c^2-1,c^2+1]$.

因为上述两个定义域的交集为空集,则有

$c^2-1>c+1$ 或 $c^2+1<c-1$.

解得 $c>2$ 或 $c<-1$.

(3)[证明]故 c 的取值范围为 $c^2+1<c+1$ 且 $c^2-1<c-1$ 时,存在公共定义域,

此时的定义域交集为$[c-1,c^2+1]$.

故 $-1\leqslant c\leqslant 2$ 时,存在公共定义域,

且当 $-1\leqslant c\leqslant 0$ 或 $1\leqslant c\leqslant 2$ 时,公共定义域为$[c^2-1,c+1]$;

当 $0<c<1$ 时,公共定义域为$[c-1,c^2+1]$.

例 21 ('05 临门)某地今年年初有居民住房面积 a m²,其中需要拆除的旧房面积占了一半.当地有关部门决定每年以当年年初住房面积的 10% 的住房增长率建设新住房,同时每年拆除 x m²的旧住房,又知该地区人口年增长率为 4.9‰.

(1)如果 10 年后该地的人均住房面积正好比目前翻一番,那么每年应拆除的旧住房面积 x 是多少?

(2)依照(1)的拆房速度,再过多少年能拆除所有需要拆除的旧住房?

下列数据供学生计算时参考:

$1.1^9=2.38$	$1.004\ 9^9=1.04$
$1.1^{10}=2.6$	$1.004\ 9^{10}=1.05$
$1.1^{11}=2.85$	$1.004\ 9^{11}=1.06$

[解](1)设今年人口为 b 人.则 10 年后人口为 $b(1+4.9/100)=1.05b$,由题设可知,1 年后的住房面积为 $a(1+10/100)-x=1.1a-x$;

2 年后的住房面积为

$$(1.1a-x)(1+\frac{10}{100})-x$$

$$=1.1^2a-x(1+1.1)$$

3 年后的住房面积为

$(1.1^2a-1.1x-x)(1+\frac{10}{100})-x$

$=1.1^3a-x(1+1.1+1.1^2)$

10 年后的住房面积为:

$a1.1^{10}-x(1+1.1+1.1^2+\cdots+1.1^9)$

$=2.60a-x\frac{1-1.1^{10}}{1-1.1}$

$=2.60a-16x.$

由题设可知

$\frac{2.6a-16x}{1.056b}=2\times\frac{a}{b},x=\frac{1}{32}a.$

(2)由题设可知所有需要拆除的旧住房为$\frac{a}{2}$,由(1)可知每年只能拆除$\frac{1}{32}a$,显然需要16 年才能全部拆完.

例 22 ('05 浙江)对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个正的常数 a,使得定义域 D 内的任意两个不等的值 x_1,x_2 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant a|x_1-x_2|$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的利普希茨 I 类函数. 已知函数 $f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$ 的图像是 C_1,函数 $y=g(x)$ 的图像 C_2 与 C_1 关于直线 $y=x$ 对称.

(1)求函数 $y=g(x)$ 的解析式及定义域;

(2)证明:函数 $y=g(x)$ 为 M 上的利普希茨 I 类函数;

(3)若 A,B 为 C_2 上两点,求证:直 + + 线 AB 与直线 $y=x$ 相交.

(1)[**解**]因为函数 $y=g(x)$ 的图像 C_2 与 C_1 关于直线 $y=x$ 对称,

所以 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数,

$g(x)=\sqrt{x+1}(x\geqslant0)$.

(2)[**证明**]对任意 $x_1,x_2\in M,x_1\neq x_2,x_1\geqslant0,x_2\geqslant0$,

则 $|g(x_1)-g(x_2)|$

$=|\sqrt{x_1+1}-\sqrt{x_2+1}|$

$=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}\leqslant\frac{1}{2}|x_1-x_2|$,

所以函数 $y=g(x)$ 为 M 上的利普希茨 I 类函数.

(3)[**证明**]设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是曲线 C_2 上的不同点,$x_1,x_2\in M,x_1\neq x_2$,由(2)知,

$|k_{AB}|=|\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}|=|\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}|<\frac{1}{2}<1$,所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}\neq1$,而直线 $y=x$ 的斜率为 1,所以它们相交.

[方法归纳总结]

选择题、填空题是以考查考生知识为主要目的,而解答题是考查考生能力为主要目的的. 目的不同,构成题目的方法也就不同,要求也不同. 能力主要考查:基础知识的运用能力(包括基础知识掌握的能力、演算能力、基础知识变形应用的能力等);基本方法的技能技巧的应用能力(包括逻辑推理能力、抽象思维能力、分类讨论的能力等);服务社会解决问题的综合能力(包括环境保护、沙漠绿化、房改、医保、生产发展、提高人民生活水平、计划生育等,其中主要考查函数的建模问题,而模的核心是要求解的量涉及的计算公式). 要求:主要展示知识演变、思维过程、逻辑推理的过程.

三、能力训练

(一)选择题

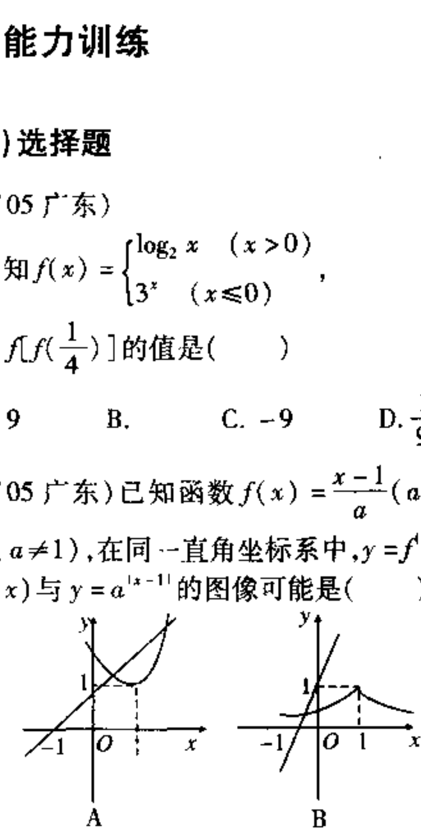
1. ('05 广东)

已知 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x & (x>0)\\ 3^x & (x\leqslant0)\end{cases}$,

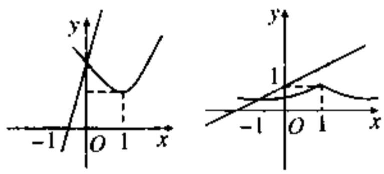
则 $f[f(\frac{1}{4})]$ 的值是(　　)

A. 9　　B.　　C. -9　　D. $\frac{1}{9}$

2. ('05 广东)已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{a}(a>0$ 且 $a\neq1)$,在同一直角坐标系中,$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=a^{|x-1|}$ 的图像可能是(　　)



A　　B



C　　　　D

3. ['05 荆州(理科)] $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$，则 $f^{-1}(2)=$ ________.

A. $\ln(2-\sqrt{5})$　　B. $\frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{5})$

C. $\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$　　D. $\ln(2+\sqrt{5})$

4. ('05 广东)拟定从甲地到乙地通话 m min 的电话费由 $f(m)=1.06(0.5\cdot[m]+1)$(元)决定，其中 $m>0$，$[m]$ 是大于或等于 m 的最小整数(如 $[3]=3$，$[3.8]=4$，$[3.1]=4$)，则从甲地到乙地通话时间为 5.5 min 的电话费为(　　)

A. 3.71 元　　B. 3.97 元

C. 4.24 元　　D. 4.77 元

5. ('05 福建)若偶函数 $f(x)=\log_a|x+b|$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(b-2)$ 与 $f(a+1)$ 的大小关系是(　　)

A. $f(b-2)<f(a+1)$

B. $f(b-2)=f(a+1)$

C. $f(b-2)>f(a+1)$

D. 无法确定

6. ('05 湖南) $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 3 为周期的奇函数，若 $f(x)>1$，$f(2)=\dfrac{2a-3}{a+1}$，则(　　)

A. $a<4$　　B. $a<4$ 且 $a\neq-1$

C. $a>4$ 或 $a<-1$　　D. $-1<a<4$

7. ('05 河南)函数 $y=f(x-1)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x-1)$，则下列等式正确的是(　　)

A. $f(x)=f(x-1)$

B. $f(x)=-f(x-1)$

C. $f(x)-f(x-1)=1$

D. $f(x)-f(x-1)=-1$

8. ('05 浙江)若 $f(x)$ 是奇函数且对任意正实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 恒有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则下列一定正确的是(　　)

A. $f(3)>f(-5)$　　B. $f(-3)<f(-5)$

C. $f(-5)>f(3)$　　D. $f(-3)>f(-5)$

9. ('05 天津)函数 $y=3^{x+1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是(　　)

A. $y=1+\log_3 x(x>0)$

B. $y=-1+\log_3 x(x>0)$

C. $y=1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$

D. $y=-1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$

10. ('05 湖南)某文具用品店出售羽毛球拍和羽毛球，球拍每副定价 20 元，羽毛球每只定价 5 元. 该店制定了两种优惠方法：①买一副球拍赠送一只羽毛球；②按总价的 92% 付款. 某人计划购买 4 副球拍，30 只羽毛球，那么在两种优惠方法中，更省钱的一种是(　　)

A. 不能确定　　B. ①②同样省钱

C. ②省钱　　D. ①省钱

(二)填空题

11. ('05 天津)已知函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(401.2+x)=f(401.2-x)$，且 $f(x)$ 的图像与 x 轴只有 5 个公共点，则方程 $f(x)=0$ 的所有根之和为________.

12. ('05 上海沙川)函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2^{x+1}-1}{4-2^x}$ 的定义域是____________.

13. ('05 上海沙川)

若函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x+8-\dfrac{a}{x}\right)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围为__________.

14. ('05 天津)

函数 $y=\begin{cases}-\sqrt{x} & (x\geqslant4)\\ -\ln x & (0<x<1)\end{cases}$ 的反函数是

____________.

15. ('05 上海)对任意实数 x,y，定义运算