于世杰 马 琦 主编

冲击金牌

初中奥数百分百

［九年级］

初中奥数解题方法与技巧

OK

希望出版社
HOPE PUBLISHING HOUSE

前　言

学习数学，离不开思维．那么什么叫思维呢？心理学中思维的定义是：思维是人脑对客观事物间接的和概括的认识过程．通过这种认识，可以把握事物的一般属性和本质属性．因此，学习收获的大小，学习成绩的优劣，最终都取决于思维活动的发展与思维能力的发挥．而思维方法是思维的钥匙，有了科学的思维方法，我们就能对感性材料进行合理的加工整理，形成严谨的理论系统；就能在迷离混沌的状态下，找到一条主导性的线索，从总体上把握事物的本质联系．从而有效地提高发现问题和解决问题的能力．

《初中奥数百分百》丛书力求贴近整个数学环节，立足于培养学生的思维能力，增强学生思维的灵活性、拓展性，以便提高学生解决实际问题的能力．为此，我们紧密联系学生学习实际，全面深入研究了近几年的全国奥数题、竞赛题和各省市的升学试题，并紧扣教学大纲和现行教材，从七年级到九年级（初中），同步到每个章节．力求通过同步辅导与竞赛培训的有机结合，使学生在明确重点、突破难点的基础上，加深对基础知识、基本技能的理解和运用，积累解题技巧，掌握思维方法，学会举一反三和融会贯通，能将知识内联、外延、迁移、重组，在新情景下解决新问题．

本套丛书用到如下几种思维方法：

整体思维，就是将几个独立的部分合并成一个整体来思考．

有序思维，就是按照一定的顺序，有条不紊地去观察、分析和

解答问题.

夹逼思维,就是把原来的题目"缩小"成一个很简单,但基本形式不变的小题目,由此发现解题规律.

变更思维,就是把一些较难的题目,转换一个角度思考,使问题迎刃而解.

逆向思维,就是从问题的"结果"入手,"倒着"去推算.

极端思维,就是对一些诸如最大、最小等问题求解时,可以考虑该问题的极端情况,使解法简捷明快.

灵感思维,就是克服思维定势,不按常规思维解决问题的一种思维方法.

发散思维,就是通过教材各章发散点之间的联系,使思维进入新的境界.

形象思维,就是将有些数学题运用图形求解,使人顿开茅塞.

总之,本套丛书内容翔实、知识点密集、实用性强,通过深入浅出、一点即通的讲解,既解决了学生解题中所遇到的难关,又把读者引到一个新的思维境界.同学们用它不仅可以辅助数学学习,可开思维之窍,入解题之门,养成遇到问题抓本质的习惯,而且还可沟通不同知识的内在联系,有助于提高解题的技能和技巧,使你们受益终身.

耕耘者总盼着丰收的金秋,这本书如能为身处题海中的同学们送去一叶小舟,一副双桨,使你们顺利到达理想的彼岸.能为开启同学们的智慧带来一点裨益,作者将感到极大的欣慰.由于时间仓促,水平有限,书中缺点错误在所难免,敬请广大读者批评指正.

目　　录

一　一元二次方程的解法

技巧点拨

一元二次方程的内容总是各级数学竞赛和中考的热点. 几乎每次数学竞赛和中考都会涉及这一重要内容. 因此在学习一元二次方程解法时要掌握以下几点：

1. 四种方法，两条思路.

教材上给同学们讲解了一元二次方程的四种解法：直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法. 这四种方法实质上是两条思路：前三种方法是一条思路，它是根据方根的定义，将二次方程转化为一次方程，直接得解或逐步得解的；因式分解法则是别具一格的另一条思路，它是根据二式之积为零，必须并且只须其中一式为零，将二次方程转化为一次方程来解的.

这两种思路既是各自独立的，又是彼此有着密切联系的. 所谓各自独立，是指任何一个一元二次方程都可由任意一种思路获得解答；所谓彼此有着密切联系，是指不论采取哪种思路，在方程同解变形中常常同是朝着 $x^2-a^2=0$ 或者 $(x+a)^2-b^2=0$ 这样的形式变换，至此才分道扬镳，一个转化为 $x^2=a^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{a^2}$ 或 $(x+a)^2=b^2\Rightarrow x+a=\pm\sqrt{b^2}$；另一个则转化为 $(x+a)(x-a)=0\Rightarrow x+$

$a=0, x-a=0$,或$[(x+a)+b][(x+a)-b]=0 \Rightarrow (x+a)+b=0, (x+a)-b=0$.

从思想方法上来讲,这两种思路都是重要的数学思想方法.尤其是后一种,它不仅在解一元二次方程中有用武之地,在解高次方程及方程组中也大有用场.

2. 四种方法的意义和作用各不相同.

开平方法是配方法与公式法的基础.配方法的最后一步解答实质上就是开平方法;求根公式的推导中也运用了开平方法.但在解一般的一元二次方程中很少用此法,除非是遇到缺一次项的一元二次方程时才用它去解.

配方法严格地讲它并不是一种独立的解方程的方法,而是一种恒等变形的方法.在具体解一元二次方程的运算中人们很少使用它.但为了"启后"——也就是说,为了掌握好后边要学的求根公式的推导以及为了今后学好二次函数等,同学们应该在学习一元二次方程中了解并初步掌握配方的方法.

公式法是解一元二次方程最重要、最常用的方法.在系数较大、不全是有理系数、含有无理根,使用公式法尤其显得优越.

因式分解法可谓是一种简捷的解法,尤其是当同学们对十字相乘法很熟练时,能很快地运用此法求得一个一元二次方程的根.但是若给出的一元二次方程不是整系数或根不是有理根时,例如解方程$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=0$,因式分解法就显得力不从心了.

例题精讲

例一

判定下列方程是不是一元二次方程:

(1) $x^2+3x-\frac{2}{x}=0$;　　(2) $x^2+3x-2=x^2$;

(3) $x^2=2+3x$;　　　　(4) $x^3-x+4=0$.

（北大附中考题）

分析　第1小题因分母含有未知数 x，所以不是整式方程，故一定不是一元二次方程；

第2小题经整理变形为 $3x-2=0$，未知数 x 的最高次数是1，而不是2（或者说它不能化为一元二次方程的一般形式），因而它不是一元二次方程；

第3小题同时满足一元二次方程定义所包含的3个条件，因而它是一元二次方程；

第4小题中未知数 x 的最高次数是3，因而它不是一元二次方程.

解　方程(3)是一元二次方程，方程(1)、(2)、(4)都不是一元二次方程.

点评　判定一个方程是不是一元二次方程必须从以下3点入手：

1. 是整式方程；

2. 含有一个未知数；

3. 化成一般形式后，未知数最高次数是2，并注意二次项系数不为零.

例二

写出一元二次方程 $(1-3x)(x+2)=4x^2-1$ 中的二次项系数、一次项系数及常数项.

分析　要确定二次项系数、一次项系数和常数项，必须把一元二次方程化为一般形式.

解　去括号，得

$$x-3x^2+2-6x=4x^2-1.$$

$$\therefore\quad 7x^2+5x-3=0.$$

方程的二次项系数是7，一次项系数是5，常数项是 -3.

点评 不要漏写各项系数的符号，如方程 $7x^2+5x-3=0$ 中，常数项是 -3，而不是 3；如果一般形式中二次项系数是负数时，就把方程两边都乘以 -1，使二次项系数变为正数.

例三

用直接开平方法解下列方程：

(1) $x^2=27$； (2) $(x-3)^2=2$； (3) $\frac{4}{3}(3x-1)^2=3$；

(4) $(3x-1)^2=4(2x+3)^2$； (5) $x^2-2x-8=0$.

分析 方程(1)、(2)、(4)可运用直接开平方法求解；方程(3)可以变形为 $(3x-1)^2=\frac{9}{4}$；方程(5)可以变形为 $(x-1)^2=9$，然后使用直接开平方求解.

解

(1) $x=\pm 3\sqrt{3}$；

(2) $x-3=\pm\sqrt{2}$， $\therefore$ $x=3\pm\sqrt{2}$；

(3) $(3x-1)^2=\frac{9}{4}$， $\therefore$ $x_1=\frac{5}{6}$， $x_2=-\frac{1}{6}$；

(4) $3x-1=\pm 2(2x+3)$. $\therefore$ $x_1=-7$， $x_2=-\frac{5}{7}$；

(5) 变形为 $(x-1)^2=9$， $\therefore$ $x_1=4$， $x_2=-2$.

点评 直接开平方法解一元二次方程的根据是平方根的定义，对于形如 $(ax+b)^2=c$ 的一元二次方程，当 $c\geqslant 0$ 时，可转化为两个一元一次方程 $ax+b=\sqrt{c}$ 与 $ax+b=-\sqrt{c}$，这两个方程的解就是原方程的解；当 $c<0$ 时，原方程无解.

例四

用因式分解法解方程：

(1) $x^2+x-2=0$； (2) $3x^2-5x=2$；

(3) $2(t-1)^2+t=1$;　　(4) $(2x+1)^2-x^2=0$.

（福州市一中考题）

分析

第1小题右边是0,左边可用十字相乘法分解为$(x+2)(x-1)$;

第2小题先移项,得$3x^2-5x-2=0$.这时左边可用十字相乘法分解为$(3x+1)(x-2)$;

第3小题移项后用提公因式法分解为$(t-1)[2(t-1)+1]$;

第4小题可用平方差公式分解为$[(2x+1)+x][(2x+1)-x]$.

解

(1) 原方程变形为　$(x+2)(x-1)=0$.

$\therefore\quad x+2=0$,　或　$x-1=0$.

$\therefore\quad x_1=-2$,　$x_2=1$;

(2) 原方程变形为　$3x^2-5x-2=0$.

$(3x+1)(x-2)=0$,

$\therefore\quad 3x+1=0$,　或　$x-2=0$

$\therefore\quad x_1=-\frac{1}{3}$,　$x_2=2$.

(3) 原方程化为　$2(t-1)^2+(t-1)=0$.

$(t-1)(2t-1)=0$,

$\therefore\quad t-1=0$,　或　$2t-1=0$.

$\therefore\quad t_1=1$,　$t_2=\frac{1}{2}$.

(4) 原方程化为　$(2x+1+x)(2x+1-x)=0$.

$(3x+1)(x+1)=0$,

$\therefore\quad 3x+1=0$,　或　$x+1=0$.

$\therefore\quad x_1=-\frac{1}{3}$,　$x_2=-1$.

点评 用因式分解法解一元二次方程的关键有两个：一是要将方程右边化为0；二是熟练掌握多项式因式分解的方法（提公因式法、公式法、分组分解法）.

例五

用配方法解下列方程：

(1) $x^2-6x=11$；

(2) $2x^2-4=7x$.

分析

(1)方程两边同时加上一次项系数“-6”一半的平方；

(2)先把方程化为一般式，再把二次项系数化为1，就是把原方程两边都除以2.

解

(1) 配方，得 $x^2-6x+9=11+9$.

$\therefore\ (x-3)^2=20$.

$\therefore\ x-3=2\sqrt{5}$，或 $x-3=-2\sqrt{5}$.

$\therefore\ x_1=3+2\sqrt{5}$，$x_2=3-2\sqrt{5}$.

(2) 将方程化成一般形式，得

$2x^2-7x-4=0$.

化二次项系数为1，得

$x^2-\frac{7}{2}x-2=0$. 即 $x^2-\frac{7}{2}x=2$.

配方，得

$$x^2-\frac{7}{2}x+\left(-\frac{7}{4}\right)^2=2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2.$$

$$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}.$$

解这个方程，得

$$x-\frac{7}{4}=\pm\frac{9}{4}.$$

即　$x-\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$，　或　$x-\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}$.

$\therefore$　$x_1=4$，　$x_2=-\frac{1}{2}$.

☺■■■**点评**　二次项系数不是1的方程，应先化二次项系数为1，再利用配方法解. **配方法**解一元二次方程相对较麻烦，应该多练，才能熟能生巧.

例六

用公式法解下列方程：

(1) $2x^2-3x-5=0$；

(2) $4(x+2)=x^2$.

■**分析**　一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(b^2-4ac\geqslant0)$，求根公式的运用有两个前提条件：① $a\neq0$，② $b^2-4ac\geqslant0$.

◈■■**解**

(1) $\because$　$a=2$，　$b=-3$，　$c=-5$，

$\therefore$　$b^2-4ac=49$.

$\therefore$　$x=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{3\pm7}{4}$.　即　$x_1=\frac{5}{2}$，　$x_2=-1$.

(2) 原方程可化为　$x^2-4x-8=0$.

$\therefore$　$b^2-4ac=48$.　$x=\frac{4\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{4\pm4\sqrt{3}}{2}$.

故　$x_1=2+2\sqrt{3}$，　$x_2=2-2\sqrt{3}$.

☺■■■**点评**　用**公式法**解方程必须先把方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$.

对于在实数范围内有解的一元二次方程，可以说公式法是“万能”的，但公式法不一定是最简单的，要根据题目特点选择解一元二次方程的方法.

例七

用适当方法解方程：

(1) $(2-3x)(x+4)=(3x-2)(1-5x)$；

(2) $49(x-3)^2=16(x+6)^2$；

(3) $\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x-6=0$；

(4) $(x+4)^2-(x+5)^2+(x-3)^2=24+4x$.

（上海市育才中学考题）

分析

第1小题移项后，可直接提出公因式$(3x-2)$；

第2小题移项后可用平方差公式分解因式；

第3小题先把方程两边都乘以4，使其系数都变为整数，再考虑能否用因式分解法解；

第4小题先化为一般形式，再选择方法.

解

(1) 原方程化为 $(3x-2)(1-5x)+(3x-2)(x+4)=0$,

即 $(3x-2)(5-4x)=0$.

$\therefore \quad x_1=\frac{2}{3}, \quad x_2=\frac{5}{4}$.

(2) 原方程化为 $[7(x-3)]^2-[4(x+6)]^2=0$,

即 $(7x-21)^2-(4x+24)^2=0$.

$(11x+3)(3x-45)=0$.

$\therefore \quad x_1=-\frac{3}{11}, \quad x_2=15$.

(3) 原方程化为 $x^2+10x-24=0$.

$(x+12)(x-2)=0.$

$\therefore\quad x_1=-12,\quad x_2=2.$

(4) 原方程化为

$x^2-12x=24,\quad (x-6)^2=60.\quad \therefore\quad x-6=\pm 2\sqrt{15}.$

$\therefore\quad x_1=6+2\sqrt{15},\quad x_2=6-2\sqrt{15}.$

☺■■■点评

第1、2、3小题三个方程的解法，实质都是技巧性解法，应细心体会，灵活掌握；

第4小题化为一般形式后，用**配方法**较简单.

例八

解下列关于 x 的方程：

(1) $(x+a)^2=\left(2x+\dfrac{a}{2}\right)^2$；

(2) $(ax+c)^2=d\ (d\geqslant 0, a\neq 0).$

■分析　因为负数没有平方根，因此只有在判明了方程的两边均是非负数，才能开平方. 在第1小题中，两边都是完全平方式，可以同时开平方，而在第2小题中，是因为给了条件 $d\geqslant 0$，才能够对 d 开平方.

◈■■解

(1) 两边同时开方，得　$x+a=\pm\left(2x+\dfrac{a}{2}\right).$

即　$x+a=2x+\dfrac{a}{2}$，　或　$x+a=-\left(2x+\dfrac{a}{2}\right).$

解这两个关于 x 的方程，得

$x_1=\dfrac{a}{2},\quad x_2=-\dfrac{a}{2}.$

(2) $\because\quad d\geqslant 0,$

$\therefore$　两边同时开方，得　$ax+c=\pm\sqrt{d}.$

即　$ax+c=\sqrt{d}$，　或　$ax+c=-\sqrt{d}$.

又∵　$a\neq 0$，

∴　$x_1=\dfrac{-c+\sqrt{d}}{a}$，　$x_2=\dfrac{-c-\sqrt{d}}{a}$.

点评

第 2 小题中若不给条件 $d\geqslant 0$，则要分情况讨论：

1. 若 $d>0$，则有 $ax+c=\pm\sqrt{d}$，得

$$x_1=\frac{-c+\sqrt{d}}{a},\quad x_2=\frac{-c-\sqrt{d}}{a};$$

2. 若 $d=0$，则有 $ax+c=0$.

∴　$x_1=x_2=-\dfrac{c}{a}$；

3. 若 $d<0$，则因为一个数的平方不可能为负，所以本题无解.

例九 解方程：

$$49x^2+35x-12=0.$$

分析　此题若直接应用求根公式，将会得到

$$x=\frac{-35\pm\sqrt{3577}}{98}.$$

这样不但计算繁琐，而且由于 3577 能被 49 整除不易发现，往往得不到最简的形式. 若对原方程进行恒等变形，在原方程两边同时除以 7，得

$$7x^2+5x-\frac{12}{7}=0.$$

再用求根公式求解特别简单.

解　原方程变形为 $7x^2+5x-\dfrac{12}{7}=0$，由求根公式得

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+48}}{14}=\frac{-5\pm\sqrt{73}}{14}.$$

$\therefore \quad x_1=\frac{-5+\sqrt{73}}{14}, \quad x_2=\frac{-5-\sqrt{73}}{14}.$

点评　此例给我们以启发：对形如 $A^2x^2+A\cdot Bx+C=0(A\neq0)$ 的方程，应用求根公式求根时，可以先将原方程变形为 $Ax^2+Bx+\frac{C}{A}=0$ 的形式，然后再用求根公式就比较方便了.

例一　解方程：

$$11x^2-34x+13=0.$$

分析　此题若直接运用求根公式得到 $x=\frac{34\pm\sqrt{584}}{22}$. 这样不但计算繁琐，而且由于 584 能被 4 整除不易发现，往往不易得到最简形式. 若对原方程进行恒等变形，在原方程两边同时除以 2，得

$$\frac{11}{2}x^2-17x+\frac{13}{2}=0.$$

再用求根公式求解特别简单.

解　原方程变形为 $\frac{11}{2}x^2-17x+\frac{13}{2}=0$，由求根公式可得

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289-143}}{11}=\frac{17\pm\sqrt{146}}{11}.$$

$\therefore \quad x_1=\frac{17+\sqrt{146}}{11}, \quad x_2=\frac{17-\sqrt{146}}{11}.$

点评　一般情况下，二次项系数是分数或小数的先化为整数，但本例却反其道而行之，使解法简捷明快. 由此可给我们一个重要启发：

对于形如 $ax^2+bx+c=0$（b 为偶数，$a\neq0$）的方程，应用求根公式求根时，可先将原方程变形为 $\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}x+\frac{c}{2}=0$，然后用求根