教材动态全解

主编／石国强

高三数学

（全一册）

东北师范大学出版社

教材动态全解

主编／石国强

高二数学

（全一册）

东北师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

教材动态全解·高中数学/石国强主编．—长春：东北师范大学出版社，2004.5
ISBN 7-5602-3778-9

Ⅰ.教… Ⅱ.石… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 023755 号

□责任编辑：任桂菊　□封面设计：魏国强
□责任校对：任桂菊　□责任印制：栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
销售热线：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http：//www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春新华印刷厂印装
长春市吉林大路 35 号（130031）
2004 年 5 月第 1 版　2004 年 5 月第 1 次印刷
幅面尺寸：148 mm×210 mm　印张：8.25　字数：330 千
印数：00 001 — 10 000 册

定价：10.50 元

前　言

《教材动态全解》丛书是适应全国中高考命题形式多样化改革需要的初高中各年级同步课堂教学的配套用书。

《教材动态全解》丛书是针对目前国内各省市地区教材版本选择纷繁复杂的局面配备的教辅用书，囊括人教版、北师大版、华东师大版、语文版、苏版等国家教育部教材审定委员会审查通过的教材版本，覆盖初高中各个年级不同学科，且根据各版本教材各自的规律和特点编写。

《教材动态全解》丛书吸收欧美发达国家“活性动态”教辅版式的精髓，紧密结合我国现阶段课堂教学改革的国情，根据不同学科教材的特点和课堂改革的需要，是“教材动态”全解型和名师“课堂动态”实录型优秀图书。这套丛书具有以下突出特点：

一、全面丰富实用

全书知识点分布全面，不遗漏一个忽略点，不放弃一个疑似点，真正体现信息量大，内容丰富，题量充足。全书对教材中的重点、难点、疑点进行逐词、逐句、逐段透彻解读。精编例题，对每一个知识点、易错点、易忽略点、易混淆点、疑似点进行一对一剖析。点点对应例题，题题揭示规律。

二、体例设置灵活

全书在大栏目统一的基础上，小栏目的设置由编者根据教材内容需要作动态变化。精选全国著名中学师生互动，突破疑难点的精彩课堂实录，突出教师教法的灵活性和学生学法的灵活性。

三、创设互动情境

全书体例版式独特新颖，教育理念前瞻性强，引导学生不断创设问题情境，激励学生注重参与教学过程。书中原创大量新颖的与生产生活实际相结合的探究性问题，培养学生在探究过程中发现知识，并运用知识解决实际问题的能力。

四、分析解读透彻

丛书对《课程标准》和现行《考试大纲》研究透彻，对名师的教法和优秀学生的学法研究透彻，对各年级学生的认知水平和储备不同学科知识研究透彻，对单元学习目标和章节训练习题难易度研究透彻，对重点、难点、疑点突破方法研究透彻，对各种题型及其同类变式的解题方法、技巧、规律、误区研究透彻，对培养学生能力升级的步骤和途径研究透彻。

五、适用对象全面

丛书在策划初始即考虑到全国各地区教材版本使用复杂的现状，对目前国内各省市地区可能使用的教材版本均有所涉及，因此，丛书适合全国各地重点中学和普通中学各类学生使用，适用对象全面

本丛书虽然从策划到编写，再到出版，精心设计，认真操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

第一编辑室

2004年5月

目 录

第一章 概率与统计 …… 1
1.1 离散型随机变量的分布列 …… 1
教材内容全解 …… 1
一、随机变量(重点) …… 1
二、离散型随机变量的分布列(重点、难点) …… 3
潜能开发广角 …… 8
基础能力训练 …… 10
综合能力训练 …… 11
标答与点拨 …… 12
1.2 离散型随机变量的期望与方差 …… 15
教材内容全解 …… 15
一、期望(重点) …… 15
二、方差(重点、难点) …… 17
潜能开发广角 …… 21
基础能力训练 …… 23
综合能力训练 …… 24
标答与点拨 …… 24
1.3 抽样方法 …… 26
教材内容全解 …… 26
一、简单随机抽样(重点) …… 26
二、系统抽样(重点) …… 28
三、分层抽样(难点) …… 29
潜能开发广角 …… 31
基础能力训练 …… 34
综合能力训练 …… 35
标答与点拨 …… 36
1.4 总体分布的估计 …… 37
教材内容全解 …… 37
一、总体分布估计的两种情况(重点、难点) …… 37
二、总体分布与累积频率 …… 38
潜能开发广角 …… 43
基础能力训练 …… 45
综合能力训练 …… 46
标答与点拨 …… 46
1.5 正态分布 …… 48
教材内容全解 …… 48
一、正态分布(重点) …… 48
二、假设检验的基本思想与生产过程中质量控制图(难点) …… 52
潜能开发广角 …… 54
基础能力训练 …… 55
综合能力训练 …… 56
标答与点拨 …… 56
1.6 线性回归 …… 58
教材内容全解 …… 58
一、变量之间存在着的两种关系(重点) …… 58
二、回归直线方程(难点) …… 59
三、相关性检验(难点) …… 59
潜能开发广角 …… 62
基础能力训练 …… 63
综合能力训练 …… 64
标答与点拨 …… 65
专题 总体期望值和方差的

估计 …… 67
一、总体期望值 …… 67
二、总体期望值的估计 …… 67
三、算术平均数的计算简化方法 …… 68
四、总体方差与总体标准差 …… 69
五、样本方差和样本标准差的计算 …… 69
六、样本方差和样本标准差的简便计算 …… 69
单元总结与测评 …… 71
高考信息要求 …… 71
热点考题剖析 …… 71
综合能力测评 …… 74
标答与点拨 …… 77

第二章 极 限 …… 81
2.1 数学归纳法及其应用举例 …… 81
教材内容全解 …… 81
一、归纳法与数学归纳法(重点) …… 81
二、数学归纳法的证题步骤(重点、难点) …… 82
潜能开发广角 …… 85
基础能力训练 …… 90
综合能力训练 …… 92
标答与点拨 …… 92
2.2 数列的极限 …… 95
教材内容全解 …… 95
一、数列极限的描述性定义(重点、难点) …… 95
二、数列极限的两个性质(重点) …… 95
潜能开发广角 …… 97
基础能力训练 …… 100
综合能力训练 …… 101
标答与点拨 …… 102
2.3 函数的极限 …… 104
教材内容全解 …… 104
一、当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限(重点) …… 104
二、当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限(重点、难点) …… 106
三、常用的几个函数的极限 …… 106
潜能开发广角 …… 107
基础能力训练 …… 109
综合能力训练 …… 110
标答与点拨 …… 111
2.4 极限的四则运算 …… 113
教材内容全解 …… 113
一、函数极限的四则运算(重点、难点) …… 113
二、数列极限的四则运算(重点) …… 117
潜能开发广角 …… 122
基础能力训练 …… 127
综合能力训练 …… 128
标答与点拨 …… 129
2.5 函数的连续性 …… 132
教材内容全解 …… 132
一、连续(难点) …… 132
二、右(左)连续(难点) …… 133
三、区间上的连续(重点) …… 133
四、连续函数的性质(重点) …… 133
潜能开发广角 …… 136
基础能力训练 …… 138
综合能力训练 …… 139
标答与点拨 …… 140
专题 归纳与递推的处理方法 …… 142
一、学会借用同一题中已证明过的结论 …… 142

二、学会添项 …………………… 143
三、会寻找过渡命题 ………………… 144
四、会分析转化 ………………… 145
五、会强化命题 ………………… 146
六、会归纳、猜想与证明 ……… 147
单元总结与测评 ……………… 148
高考信息要求 …………………… 148
热点考题剖析 …………………… 148
综合能力测评 …………………… 150
标答与点拨 ……………………… 153

第三章　导　数 …………………… 157
3.1　导数的概念 ………………… 157
3.2　几种常见函数的导数 …… 157
教材内容全解 ………………… 157
一、导数的有关概念(难点) … 157
二、导数的几何意义与物理意义(重点) ………………… 160
三、几种常见函数的导数(重点) ………………… 162
潜能开发广角 ………………… 163
基础能力训练 ………………… 163
综合能力训练 ………………… 164
标答与点拨 …………………… 164
3.3　函数的和、差、积、商的导数 ……………………… 166
3.4　复合函数的导数 ………… 166
教材内容全解 ………………… 166
一、可导函数四则运算的求导法则(重点) ……………… 166
二、复合函数的求导法则(难点) ………………… 169
潜能开发广角 ………………… 173
基础能力训练 ………………… 175
综合能力训练 ………………… 176
标答与点拨 …………………… 176
3.5　对数函数与指数函数的导数 ……………………… 179
教材内容全解 ………………… 179
一、对数函数的导数(重点) … 179
二、指数函数的导数(重点) … 179
潜能开发广角 ………………… 181
基础能力训练 ………………… 182
综合能力训练 ………………… 183
标答与点拨 …………………… 184
3.6　函数的单调性 …………… 186
教材内容全解 ………………… 186
一、利用导数的符号判断函数的增减性(重点) ……………… 186
二、求函数单调区间的步骤(难点) ………………… 186
潜能开发广角 ………………… 188
基础能力训练 ………………… 191
综合能力训练 ………………… 192
标答与点拨 …………………… 192
3.7　函数的极值 ……………… 194
3.8　函数的最大值与最小值 … 194
教材内容全解 ………………… 194
一、函数的极值(重点) ……… 194
二、函数的最值(重点、难点) ………………………… 198
潜能开发广角 ………………… 201
基础能力训练 ………………… 204
综合能力训练 ………………… 205
标答与点拨 …………………… 205
3.9　微积分建立的时代背景和历史意义 ………………… 208
教材内容全解 ………………… 208
一、本节内容 ………………… 208
二、学习上述内容的几点提示 ………………………… 208
单元总结与测评 ……………… 209

高考信息要求 …………………… 209
热点考题剖析 …………………… 210
综合能力测评 …………………… 213
标答与点拨 …………………… 215

第四章 数系的扩充——复数 …………………… 221

4.1 复数的概念 …………………… 221
教材内容全解 …………………… 221
一、虚数单位i(重点) ……… 221
二、复数(重点、难点) ……… 221
三、复数相等的条件(重点) … 222
四、复数的几何意义(重点) … 224
潜能开发广角 …………………… 225
基础能力训练 …………………… 227
综合能力训练 …………………… 228
标答与点拨 …………………… 229

4.2 复数的运算 …………………… 230
教材内容全解 …………………… 230
一、复数的加法与减法(重点) …………………… 230
二、复数的乘法与除法(重点、难点) …………………… 231
潜能开发广角 …………………… 233
基础能力训练 …………………… 236
综合能力训练 …………………… 236
标答与点拨 …………………… 237

4.3 数系的扩充 …………………… 239
教材内容全解 …………………… 239
一、数的概念的发展(重点) … 239
二、一元二次方程的解(重点、难点) …………………… 240
潜能开发广角 …………………… 241
基础能力训练 …………………… 241
综合能力训练 …………………… 242
标答与点拨 …………………… 242

单元总结与测评 …………………… 244
高考信息要求 …………………… 244
热点考题剖析 …………………… 244
综合能力测评 …………………… 245
标答与点拨 …………………… 247

第一章 概率与统计

1.1 离散型随机变量的分布列

教材内容全解

一、随机变量(重点)

1. 试验与随机试验

凡是对现象的观察或为此而进行的实验,都称为试验.一个试验如果满足下述条件,那么,这个试验就叫作随机试验.

(1)试验可以在相同的情形下重复进行;

(2)试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个;

(3)每次试验总是恰好出现这些结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

2. 随机变量

(1)如果随机试验的结果可以用一个变量来表示,那么这样的变量叫作随机变量.随机变量常用希腊字母 ξ,η 等表示.

(2)对于随机变量可能取的值,我们可以按一定次序一一列出,这样的随机变量叫作离散型随机变量.

(3)随机变量可以取某一区间内的一切值,这样的随机变量叫作连续型随机变量.

(4)若 ξ 是随机变量,$\eta=a\xi+b$,其中 a,b 是常数,则 η 也是随机变量.

一般地,若 ξ 是随机变量,$f(x)$ 是连续函数或单调函数,则 $f(\xi)$ 也是随机变量.也就是说,随机变量的某些函数也是随机变量.

可见,随机变量与函数是有一定联系的.所谓随机变量,实际上是用变量对试验结果的一种刻画,是试验结果(即样本点)和实数之间的一个对应关系,这与函数概念本质上是相同的,只不过在函数概念中,函数 $f(x)$ 的自变量是实数 x,而在随机变量的概念中,随机变量的自变量是试验结果(即样本点).

疑似点破译

离散型随机变量和连续型随机变量都是用来刻画随机试验所出现的结果的，但二者之间又有着根本的区别：对于离散型随机变量而言，它所可能取的值为有限个或至多可列个，或者说能将它的可取值按一定次序一一列出；而连续型随机变量可取某一区间内的一切值，我们无法对其中的值一一列举.

例1 投掷均匀硬币一次，随机变量为 ( )

A. 出现正面的次数

B. 出现正面或反面的次数

C. 掷硬币的次数

D. 出现正、反面次数之和

解析 掷一枚硬币，可能出现的结果是正面向上或反面向上，以一个标准如正面向上次数来描述这一随机试验，那么正面向上的次数就是随机变量 ξ，ξ 的取值是 0，1，故选 A. 而 B 中标准模糊不清，C 中掷硬币次数是 1，都不是随机变量，D 中对应的事件是必然事件.

解 选 A

特别提示

随机变量从本质上讲就是以随机试验的每一个可能结果为自变量的一个函数，即随机变量的取值实质上是试验结果对应的数，但这些数是预先知道的所有可能的值，而不知道究竟是哪一个值，这便是"随机"的本源.

同类变式 随机变量 ξ_1 是某城市 1 天之中发生的火警次数，随机变量 ξ_2 是某城市 1 天之内的温度，随机变量 ξ_3 是某火车站 1 小时内的旅客流动人数. 这三个随机变量中为连续型随机变量的是 ( )

A. 只有 ξ_1 和 ξ_3 B. 只有 ξ_2

C. 只有 ξ_2 和 ξ_3 D. 只有 ξ_3

解析 火警次数与旅客流动人数均为离散型的，而一天之内的温度是连续型的.

解 选 B

解题指导

把握离散型与连续型随机变量概念的本质能使问题明朗化.

例2 写出下列各随机变量可能取的值，并说明随机变量所取的值表示的随机试验的结果：

(1)盒中装有 6 支白粉笔和 8 支红粉笔，从中任意取出 3 支，其中所含白粉笔的支数 ξ；

(2)从 4 张已编号(1 号～4 号)的卡片中任意取出 2 张，被取出的卡片号数之和 ξ；

(3)离开天安门的距离 η；

(4)袋中有大小完全相同的红球 5 个，白球 4 个，从袋中任意取出一球，若取出的球是白球，则过程结束；若取出的球是红球，则将此红球放回袋中，然后重新从袋中任意取出一球……直至取出的球是白球，此约定下的取球次数 ξ.

解析 本题(1),(2),(4)中的随机变量 ξ 是离散型随机变量,其中(1),(2)中的随机变量 ξ 的取值为有限数集,(4)中的随机变量 ξ 的取值属可列无限数集;(3)中的随机变量 η 为连续型随机变量,η 的取值属连续区间.

警示误区

要分清相应的随机变量是离散的还是连续的.

解 (1)ξ 可取 0,1,2,3.

$\xi=i$ 表示取出 i 支白粉笔,$3-i$ 支红粉笔.其中,$i=0,1,2,3$.

(2)ξ 可取 3,4,5,6,7.其中,

$\xi=3$ 表示取出分别标有 1,2 的两张卡片;

$\xi=4$ 表示取出分别标有 1,3 的两张卡片;

$\xi=5$ 表示取出分别标有 1,4 或 2,3 的两张卡片;

$\xi=6$ 表示取出分别标有 2,4 的两张卡片;

$\xi=7$ 表示取出分别标有 3,4 的两张卡片.

(3)η 可取$[0,+\infty)$中的数.

$\eta=k$ 表示离开天安门的距离为 k km.

(4)ξ 可取所有的正整数.

$\xi=i$ 表示前 $i-1$ 次取出红球,而第 i 次取出白球,这里 $i=1,2,3,\cdots$

同类变式 某地上网的费用为月租费 10 元,上网时每分钟 0.04 元,某学生在一个月内上网的时间(分)为随机变量 ξ,求该学生在一个月内上网的费用 η.

解析 随机取值的变量就是随机变量,随机变量分离散型随机变量和连续型随机变量两种,随机变量的函数仍是随机变量.

难点突破

对函数而言,自变量是实数;对随机变量而言,自变量是试验的结果(本题中为学生上网时间).

解 该学生在一个月内上网的费用是一个随机变量,$\eta=(0.04\xi+10)$元.

二、离散型随机变量的分布列(重点、难点)

1.概率分布

设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$,$\xi$ 取每一个值 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$,则称表

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

为随机变量 ξ 的概率分布,简称为 ξ 的分布列.

离散型随机变量的分布列具有两个性质:

(1)$p_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots$;

(2)$p_1+p_2+\cdots=1$.

2. 二项分布

如果在一次试验中某事件发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是

$$P(\xi=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},$$

其中 $k=0,1,\cdots,n$，$q=1-p$，于是得到随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$\mathrm{C}_n^0 p^0 q^n$	$\mathrm{C}_n^1 p^1 q^{n-1}$	…	$\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$	…	$\mathrm{C}_n^n p^n q^0$

我们称这样的随机变量 ξ 服从二项分布，记作 $\xi\sim B(n,p)$，其中 n,p 为参数，并记

$$\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}=b(k;n,p).$$

易忽略点提示

二项分布是一种常见的离散型随机变量的分布.

例3　将 3 个小球任意地放入 4 个大的玻璃杯中去，杯子中球的最大个数记为 ξ，求 ξ 的分布列.

解析　明确题意，搞清杯子中球的最大个数的可能值，再由此求出相应的概率.

解　依题可知，杯子中球的最大个数 ξ 的所有可能值为 1,2,3.

当 $\xi=1$ 时，对应于 4 个杯子中恰有三个杯子各放一球的情形；

当 $\xi=2$ 时，对应于 4 个杯子中恰有一个杯子放两球的情形；

当 $\xi=3$ 时，对应于 4 个杯子恰有一个杯子放三球的情形.

当 $\xi=1$ 时，$P(\xi)=\dfrac{\mathrm{C}_4^3}{4^3}=\dfrac{3}{8}$；

当 $\xi=2$ 时，$P(\xi)=\dfrac{\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_3^1}{4^3}=\dfrac{9}{16}$；

当 $\xi=3$ 时，$P(\xi)=\dfrac{\mathrm{C}_4^1}{4^3}=\dfrac{1}{16}$.

可得 ξ 的分布列如下：

ξ	1	2	3
P	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

方法技巧

(1)求离散型随机变量的分布列，要求必须正确地求出相应的事件个数，即正确求出相应的排列组合数，所以，掌握好排列组合知识，是学好分布列的基础与前提.

(2)分布列的表示形式可有如下几种：①如教材所述的表格形式；②一组等式(ξ 的所有取值的概率)；③有时可将②压缩为一个带“i”的等式.

同类变式　一盒中有 9 个正品和 3 个次品零件，每次取一个零件，如果取出的次品不再放回，求出取得正品前已取出的次品数 ξ 的概率分布.

解析　题设中要求取出的次品不再放回. 应仔细分析每一个 ξ 所对应的事件的准确含义，据此正确计算概率 $P(\xi)$.

解　易知，ξ 可能取值为 0，1，2，3 这四个数，而 $\xi=k$ 表示共取了 $k+1$ 次零件，前 k 次取得的都是次品，第 $k+1$ 次才取得正品，其中 $k=0,1,2,3$.

当 $\xi=0$ 时，即第一次取到正品，试验中止，此时，

$P(\xi=0)=\dfrac{C_9^1}{C_{12}^1}=\dfrac{3}{4}$；

当 $\xi=1$ 时，即第一次取到次品，第二次取到正品，此时，

$P(\xi=1)=\dfrac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\dfrac{C_9^1}{C_{11}^1}=\dfrac{9}{44}$；

依上可得

$P(\xi=2)=\dfrac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\dfrac{C_2^1}{C_{11}^1}\cdot\dfrac{C_9^1}{C_{10}^1}=\dfrac{3}{12}\times\dfrac{2}{11}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{9}{220}$；

$P(\xi=3)=\dfrac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\dfrac{C_2^1}{C_{11}^1}\cdot\dfrac{C_1^1}{C_{10}^1}=\dfrac{3}{12}\times\dfrac{2}{11}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{220}$.

故 ξ 的分布列如下：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

警示误区

(1)注意题设中“取出的次品不再放回”这一要求，在计算中，应细心分析某一种情形的具体过程，否则，就很容易忽视题设中的上述条件而致误.

(2)求随机变量分布列之前，要弄清楚随机变量可能取的每一个值，以及取每个值时所表示的意义，另外，高二所学的概率知识，是求随机变量的概率分布列的基础.

例4　一批产品分为一、二、三级，其中一级品是二级品的 2 倍，三级品是二级品的 $\frac{1}{2}$，从这批产品中随机抽取一个检验质量，其级别为随机变量 ξ，求 ξ 的分布列及 $P(\xi>1)$.

解析　一批产品中，一级品是二级品的 2 倍，三级品是二级品的 $\frac{1}{2}$，则从中随机抽取一个，该产品是一级品的概率是它是二级品的概率的 2 倍，该产品是三级品的概率是它是二级品的概率的 $\frac{1}{2}$，由此问题可以解决.

方法技巧

分布列各项的概率之和为 1 是研究分布列和检查分布列是否正确的重要方法.

解　依题意得

$P(\xi=1)=2P(\xi=2),P(\xi=3)=\frac{1}{2}P(\xi=2)$.

由于概率分布的总和等于1,故 $P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{7}{2}P(\xi=2)=1$.

所以 $P(\xi=2)=\frac{2}{7}$,随机变量 ξ 的分布列如下:

ξ	1	2	3
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

所以 $P(\xi>1)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{3}{7}$.

同类变式 设随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

求:(1) $P(\xi<1),P(\xi\leqslant 1),P(\xi<2),P(\xi\leqslant 2)$;

(2) $F(x)=P(\xi\leqslant x),x\in\mathbf{R}$.

解析 求离散型随机变量在某一范围内取值的概率可运用分布列,将这个范围内各个值的概率值相加.

疑点诠释

$F(x)=P(\xi\leqslant x)$ 为随机变量 ξ 取值的概率分布函数.

解 (1) $P(\xi<1)=P(\xi=0)=\frac{1}{2}$,

$P(\xi\leqslant 1)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\frac{5}{6}$,

$P(\xi<2)=P(\xi\leqslant 1)=\frac{5}{6}$,

$P(\xi\leqslant 2)=1$.

(2) $F(x)=P(\xi\leqslant x)=\begin{cases}0,x<0;\\ \frac{1}{2},0\leqslant x<1;\\ \frac{5}{6},1\leqslant x<2;\\ 1,x\geqslant 2.\end{cases}$

例5 某小组有10台各为7.5 kW的机床,如果每台机床的使用情况是相互独立的,且每台机床平均每小时开动12分钟,则全部机床用电超过48 kW的可能性有多大?

解析　明确某一时刻正在工作的机床台数 ξ 服从二项分布是解题的关键.

解　由于每台机床正在工作的概率为 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$，而且每台机床有“工作”与“不工作”两种情况，故每一时刻正在工作的机床台数 ξ 服从二项分布，即 $\xi\sim B(10,\frac{1}{5})$.

特别提示

如果所考虑的试验可以看作一个只有两种结果 A 和 $\overline{A}$ 的试验的 n 次独立重复，则 n 次试验中，A 发生的次数 ξ 服从二项分布.

$$P(\xi=k)=C_{10}^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k},(k=0,1,2,\cdots,10)$$

据题意，48 kW 可供 6 台机床同时工作，用电超过 48 kW，即意味着有 7 台或 7 台以上的机床在工作，这一事件的概率为

$$\begin{aligned}P(\xi\geqslant7)&=P(\xi=7)+P(\xi=8)+P(\xi=9)+P(\xi=10)\\&=C_{10}^{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\left(\frac{4}{5}\right)^{3}+C_{10}^{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{2}+C_{10}^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\left(\frac{4}{5}\right)+\\&\quad C_{10}^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{0}\\&\approx\frac{1}{1\ 157}.\end{aligned}$$

由上可以说明，用电量超过 48 kW 的可能性是很小的，根据这一点，可以选择适当的供电设备，做到既保证供电而又合理节约用电.

同类变式　某射手每次射击能命中目标的概率为 0.15，现该射手连续向某目标射击，如果命中目标，则射击停止，否则继续射击，直到命中目标，但射击次数最多不超过 10 次，求该射手射击次数 ξ 的分布列.

解析　显然，$\xi=1,2,3,\cdots,10$. 依题意可知，各项射击是独立的，由独立事件的概率关系 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，不难求出 $P(\xi)$.

解　$P(\xi=n)=(1-0.15)^{n-1}\times0.15=0.85^{n-1}\times0.15,n=1,2,3,\cdots,9$.

警示误区

要把握相互独立事件的随机变量 ξ 的概率分布与二项分布的区别.

$P(\xi=10)=(1-0.15)^{9}\times0.15+(1-0.15)^{10}=0.85^{9}$.

故由上可得 ξ 的分布列如下：

ξ	1	2	3	4	5
P	0.15	0.85×0.15	$0.85^{2}\times0.15$	$0.85^{3}\times0.15$	$0.85^{4}\times0.15$
ξ	6	7	8	9	10
P	$0.85^{5}\times0.15$	$0.85^{6}\times0.15$	$0.85^{7}\times0.15$	$0.85^{8}\times0.15$	0.85^{9}

潜能开发广角

延伸技巧

随机变量 ξ 的概率值与相应随机变量函数的函数值 η 的概率值是一对一的.

例6 已知随机变量 ξ 的分布列如下：

ξ	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

分别求出随机变量 $\eta_1=2\xi-1$，$\eta_2=\xi^2$ 的分布列.

解析 分别联想相应的代数函数 $y=2x-1$，$y=x^2$，求出随机变量的函数值，把重复的函数值合二为一，进而可列出分布列.

特别提示

在得到的随机变量的分布列中，取值行中应无重复数；概率行中各项必须非负，且各项之和为1.

解 由于 $\eta_1=2\xi-1$ 对于不同的 ξ 有不同的取值 $y=2x-1$，即

$y_1=2x_1-1=-5$，$y_2=2x_2-1=-3$，$y_3=2x_3-1=-1$，$y_4=2x_4-1=1$，

$y_5=2x_5-1=5$.

故 η_1 的分布列如下：

η_1	-5	-3	-1	1	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$\eta_2=\xi^2$ 对于 ξ 的不同取值 -1 与 1，取相同的值 1.

故 $P(\eta_2=1)=P(\xi=-1)+P(\xi=1)=\frac{5}{10}$.

所以 η_2 的分布列如下：

η_2	0	1	4	9
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$