GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

高等数学学习指导

主编 夏国斌

"十一五"高职高专规划教材

安徽大学出版社

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

高等数学学习指导

主编 夏国斌

“十一五”高职高专规划教材

安徽大学出版社

图书在版编目(C I P)数据

高等数学学习指导 / 夏国斌主编. 一合肥:安徽大学出版社, 2006.9

“十一五”高职高专规划教材

ISBN 7－81110－215－3

Ⅰ.高... Ⅱ.夏... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 110311 号

“十一五”高职高专规划教材

高等数学学习指导

夏国斌 **主编**

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)	**印 刷**	合肥中德印刷培训中心印刷厂
联系电话	编辑室 0551-5108498 发行部 0551-5107784	**开 本**	787×1092 1/16
		印 张	12.75
		字 数	310 千
E－mail	zlqemail@tom.com	**版 次**	2006 年 9 月第 1 版
责任编辑	朱丽琴	**印 次**	2006 年 9 月第 1 次印刷
封面设计	张 犇		

ISBN7-81110-215-3/O·60 **定价 20.00 元**

目　　录

第 1 章
极限与连续

第 2 章
导数与微分

第 3 章
导数的应用

第 4 章

不定积分

第 5 章

定 积 分

第 6 章

定积分应用

第 7 章

常微分方程

第 8 章

多元函数微积分简介

第 9 章

线性代数

第 10 章

概 率 论

第 11 章

级数与拉普拉斯变换

第 1 章　极限与连续

本章主要介绍了函数的极限、函数极限的运算以及函数的连续性等.极限的概念是高等数学中最重要的也是最基本的概念,由于微积分学中的许多重要概念都是利用极限来定义的,因此,极限的理论是微积分学的理论基础,同时,极限的运算也是研究微积分学不可或缺的工具.

函数的连续性是函数的一个重要特性,利用函数极限对函数连续性进行讨论可以对函数作更深入的了解.

知识要点

一、函数

1. 函数的定义

设 x 与 y 是两个变量,D 是非空实数集,如果对于 D 中的每一个 x,按照某个对应法则 f,变量 y 都有惟一确定的数值与之对应,则称变量 y 是定义在 D 上的变量 x 的函数,记作 $y = f(x)$.

D 称为函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.

2. 分段函数

在实际问题中,常会遇见一个函数在其定义域的不同范围内用不同的解析式表示的情况,这样的函数称为分段函数.分段函数在其定义域上是一个函数,而不是几个函数.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$,而 $u = \varphi(x)$,且函数 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在函数 $f(u)$ 的定义域内,那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数,我们称 y 为 x 的复合函数,记作 $y = f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

4. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

5. 初等函数

由五类基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的,并可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

二、函数极限的概念

1. 当 $x \to \infty$ 时函数的极限

如果 $|x|$ 无限增大(即 $x \to \infty$)时,函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A,则

称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或者当 $x\to\infty$ 时,$f(x)\to A$.

如果 $x>0$ 且 x 无限增大,就记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;如果 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大,就记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

2. 当 $x\to 0$ 时函数的极限

如果当 x 无限接近于定值 x_0,即 $x\to x_0$(不要求 $x=x_0$),函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或者当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$.

当 $x\to x_0$ 时,x 既可从 x_0 点的左侧无限接近于 x_0(记为 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0^-$),也可从 x_0 点的右侧无限接近于 x_0(记为 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0^+$).

当 x 从 x_0 点的左侧无限接近于 x_0,函数 $f(x)$ 的极限存在,此极限称为函数 $f(x)$ 的左极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$(简记为 $f(x_0^-)$);同理,函数 $f(x)$ 的右极限为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$(简记为 $f(x_0^+)$).

3. 极限存在的条件

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且等于 A 的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

三、极限的运算

1. 函数极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2)$\lim cf(x)=c\lim f(x)=cA$ (c 为常数)

(3)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

(4)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$

其中在函数极限的运算法则中,虽没有指明自变量的变化趋势,但它包含了 $x\to x_0$、$x\to x_0^-$、$x\to x_0^+$、$x\to\infty$、$x\to+\infty$、$x\to-\infty$ 几种情形,法则(1)、(2)可以推广到有限个函数和与积的情形.

2. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

第二个重要极限的另一种表达形式为 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$

四、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小与无穷大的定义

(1) 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限为 0,则称函数 $f(x)$ 为 $x\to$

x_0(或 $x \to \infty$) 时的无穷小量,简称无穷小.

(2) 如果函数 $f(x)$ 的绝对值在 x 的某种变化趋势下无限增大,则称 $y = f(x)$ 为在 x 的这种变化趋势下的无穷大量,简称为无穷大.

2. 无穷小与函数极限之间的关系

具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和;反之,如果函数可表为常数与无穷小之和,那么该常数就是这个函数的极限. 即:

$$\lim_{x \to x_0 (x \to \infty)} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

3. 无穷小与无穷大之间的关系

在同一极限过程中,若函数 $f(x)$ 为无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小;若函数 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x) \neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大. 即无穷小与无穷大之间具有倒数关系.

4. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

5. 无穷小的比较

设 $\lim\alpha = 0, \lim\beta = 0$,

若有 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$,称 β 是比 α 较高阶的无穷小.

若有 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$,称 β 是比 α 较低阶的无穷小.

若有 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$($C$ 为常数),称 β 与 α 是同阶无穷小.

特别地,当 $C = 1$ 时,称 β 与 α 是等阶无穷小,记作 $\alpha \sim \beta$.

五、函数的连续性

1. 函数的增量

在函数 $y = f(x)$ 中,当自变量 x 从初值 x_0 变化到终值 x_1 时,终值与初值之差 $x_1 - x_0$ 称做自变量的增量(或改变量),记作 $\Delta x = x_1 - x_0$.

相应地,函数 $y = f(x)$ 的终值 $f(x_1)$ 与初值 $f(x_0)$ 之差 $f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 称做函数的增量(或改变量),记作 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2. 函数在点 x_0 处的连续性

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其左右近旁有定义,如果函数 $y = f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在,且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$,即

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,那么就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续时必须满足三个条件:

(1) 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

(3) 函数 $y=f(x)$ 在点 $x\to x_0$ 时的极限值等于在 $x=x_0$ 处的函数值，即有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件：

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

3. 函数在区间上的连续性

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续；区间 (a,b) 叫做函数的连续区间.

如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在右端点 b 处左连续，在左端点 a 处右连续，即有 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$，则称函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

4. 初等函数的连续性

(1) 一切基本初等函数在其定义域内都是连续的.

(2) 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续，那么它们的和、差、积、商(分母不等于零)也都在点 x_0 处连续. 即连续函数四则运算的结果仍是连续函数.

(3) 如果函数 $f(x)$ 在点 u_0 连续，而函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，那么复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 也是连续的.

(4) 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

5. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理.

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值.

(2) 介值定理.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 与 M 分别为 $f(x)$ 在该区间上的最小值和最大值，则对于满足 $m<\mu<M$ 的任何实数 μ，至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu(a<\xi<b)$.

(3) 推论.

设函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\times f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

这个推论可以判断或证明方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上是否存在实根.

学习要求

理解函数的概念，了解分段函数、复合函数、基本初等函数与初等函数的概念，会求分段函数的函数值，着重掌握复合函数的复合过程的分解以及五个基本初等函数的性质与图象.

理解函数极限的描述性定义，理解函数的左极限与右极限的概念以及函数极限存在的充要条件.

掌握函数极限的四则运算法则及两个重要极限，并会应用函数极限的四则运算法则和两个重要极限求有关函数的极限.

理解无穷小量与无穷大量的概念，了解无穷小量的性质，掌握无穷小量与无穷大量的关系、函数极限与无穷小量的关系，知道两个无穷小比较的意义.

理解函数增量与函数连续性的概念，了解函数在点 x_0 处左、右连续的概念，会利用函数连续的定义判断函数在给定点处的连续性.

理解初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质. 会利用函数的连续性求初等函数的极限.

重点：

基本初等函数的图象和性质，复合函数的概念.

函数极限的概念及运算，无穷小与无穷大的概念，函数的连续性.

难点：

函数极限的概念，函数在某一点处连续性的判定.

学习指导

一、函数的有关概念

1. 函数的定义域

函数的定义域是函数概念的核心内容之一，也是函数重要的要素之一. 对一个函数进行相关讨论，必须首先确定这个函数的定义域.

在确定函数的定义域时，对由实际问题得到的函数，其定义域由所给问题的实际意义来确定. 对由解析式给出的、不具有实际意义的函数，其函数的定义域就是使函数解析式有意义的一切实数. 此时求函数的定义域应注意以下几个方面：

① 在分式中，分母不能为零；

② 在根式中，偶次根号内的式子不能小于零；

③ 在对数式中，真数部分要大于零；

④ 在反三角函数式中，要符合反三角函数的定义域.

(5) 如果函数表达式是由几个数学解析式组合而成的，则其定义域应取各部分定义域的交集.

2. 分段函数

分段函数是在其定义域的不同区间上用不同的解析式表示的函数. 因此，分段函数在其定义域上是一个函数，而不是几个函数. 不能将分段函数认为是多个函数，它仅仅是一个函数用多个式子表示而已.

在求分段函数的函数值时，需注意应根据自变量的取值所在范围的不同，选择相对

应的函数解析式.

3. 复合函数

简言之，复合函数是由几个较简单的函数组成的较为复杂的函数. 本书中所讨论的绝大多数函数都是复合函数.

对于复合函数，必须清楚这个复合函数的复合过程，即这个复合函数是由哪几个基本初等函数复合而成的.

能否正确掌握复合函数的复合过程的分解，将直接影响到复合函数的求导.

二、极限的概念

极限的概念是高等数学中的基本概念，是本章的重点，也是本章的难点. 由于我们讨论函数的极限是在自变量的某种变化趋势下讨论函数的变化趋势. 因此，要理解极限的概念必须先清楚自变量的几种变化趋势，然后再根据函数在自变量的某种变化趋势下是否无限趋近于一个确定的常数，来确定函数是否具有极限.

1. 自变量的变化趋势

自变量的变化趋势主要有两种：

(1) 自变量 x 趋于无穷大：

当 $|x|$ 无限增大时，记为 $x \to \infty$.

当 x 取正值无限增大时，记为 $x \to +\infty$.

当 x 取负值其绝对值无限增大时，记为 $x \to -\infty$.

(2) 自变量无限趋近一个定值 x_0：

当 x 以任意方式趋近于 x_0 时，记为 $x \to x_0$.

当 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0 时，记为 $x \to {x_0}^-$.

当 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0 时，记为 $x \to {x_0}^+$.

2. 函数的变化趋势

在自变量的不同变化趋势下，函数的变化趋势有以下几种：

(1) 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，此时，称函数 $f(x)$ 的极限存在，记作 $\lim f(x) = A$.

(2) 函数 $f(x)$ 趋向于无穷大，此时，称 $f(x)$ 的极限不存在，为方便起见仍记作 $\lim f(x) = \infty$.

(3) 函数 $f(x)$ 既不趋近于一个确定的常数，也不趋向于无穷大，此时，称函数 $f(x)$ 的极限不存在.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}(x+2) = 2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

3. 关于函数的极限

(1) 讨论函数的极限，首先必须确定自变量的变化趋势，然后再看函数 $f(x)$ 的值是否无限趋近于一个确定的常数 A，若是，则函数 $f(x)$ 的极限存在且为 A，若不是，则无极限.

例如：函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) = \frac{1}{x} \to 0$，当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) = \frac{1}{x} \to 0$，所以，当 $x \to \infty$ 时，$f(x) = \frac{1}{x} \to 0$，即函数 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的极限为 0.

又如：函数 $f(x) = \arctan x$

$$当\ x \to +\infty\ 时，f(x) = \arctan x \to \frac{\pi}{2},$$

$$当\ x \to -\infty\ 时，f(x) = \arctan x \to -\frac{\pi}{2}$$

所以，当 $x \to \infty$ 时，$f(x) = \arctan x$ 的极限不存在.

显然，函数极限存在的充要条件是该函数的左右极限存在且相等，即：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

当判定分段函数在某一点处的极限是否存在时，可以利用函数极限存在的充要条件来进行，即在该点处求函数的左右极限，根据函数在该点处左右极限是否存在并相等来确定分段函数在该点处的极限是否存在.

(2) 一般地说，对同一个函数来讲，当自变量的变化趋势发生了变化，其函数的极限也会相应地发生变化.

例如：函数 $f(x) = \frac{1}{x}$

当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) = \frac{1}{x} \to 0$，当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) = \frac{1}{x} \to 0$，

而当 $x \to 0$ 时，则有 $f(x) = \frac{1}{x} \to \infty$，具体地说，当 $x \to +0$ 时，有 $f(x) = \frac{1}{x} \to +\infty$，当 $x \to -0$ 时，则有 $f(x) = \frac{1}{x} \to -\infty$.

(3) 关于函数极限定义的一点说明.

在函数极限定义中，当 $x \to x_0$ 时我们不要求 $x = x_0$. 这是因为在讨论有关函数极限的问题中，我们关心的是函数 $f(x)$ 在 x 无限趋近于 x_0 的过程中，其对应的变化结果是否趋近于某一个常数. 这个结果与 x 是否等于 x_0 也就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义并没有关系，亦即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义并不影响 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限.

三、极限的运算

1. 函数极限的四则运算法则

运用函数极限的四则运算法则来求函数的极限是求函数极限的基本方法，它可以将函数和差积商的极限问题转化为函数极限的和差积商来处理. 必须注意的是，在用函数极限的四则运算法则求函数极限时，一定要满足四则运算法则的条件，即只有当每一个函数的极限都存在时，才能使用四则运算法则进行计算. 并且，在商的运算中，分母的极限不能为零.

在求函数极限的时候，有时所给函数并不一定都满足四则运算法则的条件，因此不能直接使用函数极限的四则运算法则来计算. 此时，必须先对函数本身进行恒等变换，使得经过恒等变换后的函数能够满足四则运算法则的条件，再使用函数极限的四则运算法则来求函数的极限.

对函数本身进行恒等变换的方法很多，常用的方法有去除分子、分母中的公因式，分子、分母有理化，通分，三角恒等变换，分子、分母同除以自变量的最高次幂等等.

2. 关于两个重要极限

利用两个重要极限来求函数的极限是求函数极限的重要方法之一，在使用两个重要极限来求函数极限时，关键是要抓住两个重要极限的特征.

(1) 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$的特征是：无穷小量的正弦与无穷小量本身的比，其变形后的形式为$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin(\varphi(x))}{\varphi(x)}$，即$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin(无穷小)}{无穷小}$.

在引用这个极限时，x一定要用弧度作单位. 并且，在利用这个重要极限求较为复杂函数的极限时，必须注意所有自变量的表达形式应该一致. 例如：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\frac{\pi}{2}-\theta}=\lim_{\theta-\frac{\pi}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\frac{\pi}{2}-\theta}=1$$

(2) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$的特征是：底数为1加上无穷小量，指数为该无穷小量的倒数，其变形后的形式为$\lim(1+无穷小)^{\frac{1}{无穷小}}$.

利用这个重要极限求较复杂函数的极限时，必须注意所有含自变量的表达式应该一致. 例如：

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=\lim_{2x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{(-x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$$

四、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小的概念

由无穷小量的定义知：无穷小量以0为极限，以0为极限的函数是无穷小量.

在学习和理解无穷小量的概念时应注意以下几点：

(1) 说一个函数是无穷小量，必须指明自变量的变化趋势. 这是因为当自变量的变化趋势发生变化时，函数的极限通常也会发生改变. 一个函数在自变量的某种变化趋势

下极限为0是无穷小量，当自变量的变化趋势发生变化后，其极限不一定仍是0，此时该函数就不一定仍是无穷小量了.

例如，当 $x \to \infty$ 时，函数 $y = \dfrac{1}{x} \to 0$，即有 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$，

$\therefore$ 函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小量.

当 $x \to 0$ 时，函数 $y = \dfrac{1}{x} \to \infty$，即有 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$，

$\therefore$ 函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $x \to 0$ 时不再是无穷小量.

(2) 不要把一个绝对值很小的常数认为是无穷小量，因为常数以其本身为极限.

(3) 常数中只有"0"可以看作是无穷小量，这是因为 $\lim\limits_{x\to x_0(x\to\infty)} 0 = 0$.

无穷小量与函数极限之间的关系：

具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可表为常数与无穷小之和，那么该常数就是这个函数的极限. 即：

$$\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小.
上式给出了无穷小量与函数、函数极限之间的重要关系.

2. 无穷大量的概念

对于无穷大量同样需注意以下几点：

(1) 说一个函数是无穷大量，必须指明自变量的变化趋势.

(2) 不要把一个绝对值很大的常数认为是无穷大量，因为常数以其本身为极限.

3. 无穷小量与无穷大量之间的关系

无穷小量与无穷大量之间具有倒数关系，即在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小（$f(x) \neq 0$），则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

利用无穷大与无穷小之间的关系可以求一些函数的极限.

4. 无穷小量的性质

利用无穷小量的性质不仅可以用来进行无穷小量的运算，同时，还可以利用性质2来求一些函数的极限.

对于无穷小量的性质要特别注意强调"有限个"三个字，当无穷小量的个数为无限个时，性质1和性质3不一定成立，亦即无限个无穷小量的和或积不一定是无穷小.

5. 无穷小的比较

对于任意两个无穷小来说，虽然同为无穷小，但是，这两个无穷小趋于0的快慢程度却不一定相同.

为了比较在自变量的同一变化过程中两个无穷小 α 和 β 趋于零的快慢程度，我们可以从这两个无穷小的比值极限的不同情况来定义高阶、低阶、同阶、等价无穷小. 是高阶无穷小，趋于零的速度就快一些，是低阶无穷小，趋于零的速度就慢一些，是同阶无穷

小，趋于零的速度差不多，是等价无穷小，趋于零的速度是一样的.

鉴于两个等价无穷小趋于零的速度是一样的. 所以，在求两个无穷小的比值的极限时，可以进行两个等价的无穷小相互代换，这样做可以使求某些函数的极限问题得到简化.

常用的等价无穷小有：

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$，$e^x - 1 \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$\sqrt{1+x} - 1 \sim x$

因此，利用两个等价的无穷小相互代换，也是我们求函数极限的一种方法.

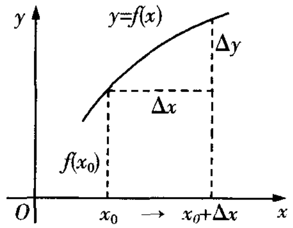
五、函数的连续性

函数的连续性是函数的一种重要特性. 从几何上来看，连续函数的图形是一条连绵不断的曲线. 我们讨论函数的连续性是利用函数的极限来进行的.

1. 函数的增量

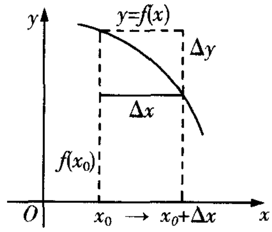
函数在给定点处的连续性可以用增量与极限的概念来定义（见定义 1：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其左右近旁有定义，如果当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \to 0$，就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续）.

在几何上，函数的增量表示当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，曲线上对应点的纵坐标的增量，由图 1.1 知，增量 Δx 与 Δy 的值可以为正，也可以为负，亦可为 0.



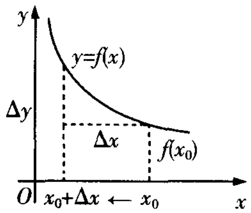
$\Delta x>0, \Delta y>0$

图 1.1(a)



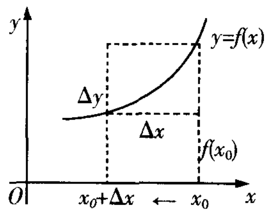
$\Delta x>0, \Delta y<0$

图 1.1(b)



$\Delta x<0, \Delta y>0$

图 1.1(c)



$\Delta x<0, \Delta y<0$

图 1.1(d)

2. 函数在给定点处的连续性

函数在给定点处的连续性亦可用极限来定义（见定义 2：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其左右近旁有定义，如果有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续）.

需注意的是，在极限的定义中，我们只要求函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，并不要求在点 x_0 处一定有定义. 而在函数连续的定义中，我们不仅要求函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近