锦囊妙解

中学生数理化系列

主编/王智军

不可不知的素材

MATH

高一数学

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解 中学生数理化系列

不可不知的素材

高一数学

总 策 划 司马文

丛书主编 万强华

编　　委 刘　芬　江华平　欧阳晔　郑永盛

吴小平　管厚坤　胡志芳　吴小菲

王智军　张和良　张延良　黄　维

本册主编 王智军

编　　者 江　伟　何　清　任琛琛

机械工业出版社

本书是“锦囊妙解中学生数理化系列”的《不可不知的素材　高一数学》分册，它体现了新课标改革精神，不受任何版本限制。书中体现了系统的知识讲解，不设置习题。设置有知识表解、知识与规律、联系生活应用题和高考热点专题四个栏目。本书内容新颖，题材广泛，目的是要从本质上提高学生理解知识的能力，以及分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

不可不知的素材．高一数学/王智军主编．--北京：
机械工业出版社，2006.6
(锦囊妙解中学生数理化系列)7
ISBN 7－111－18914--0

Ⅰ．不...　Ⅱ．王...　Ⅲ．数学课—高中—教学
参考资料　Ⅳ．G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006)第 056605 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑：石晓芬　　　　责任编辑：石晓芬　贾　雪
责任印制：洪汉军
北京汇林印务有限公司
2006 年 9 月第 1 版・第 1 次印刷
169mm×230mm 10.75 印张・266 千字
定价：16.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话：(010)68326294
编辑热线：(010)88379037
封面无防伪标均为盗版

前 言

武林竞技，想要取胜，或"一把枪舞得风雨不透"，或有独门绝技，三招之内，挑敌于马下。古有"锦囊妙计"，今有"锦囊妙解"辅导系列。继"锦囊妙解——中学生英语系列"、"锦囊妙解——中学生语文系列"之后，我们又隆重推出了"锦囊妙解——中学生数理化系列"。

这是一套充满智慧的系列丛书，能使你身怀绝技，轻松过关斩将，技增艺长。这更是一套充满谋略的系列丛书，能使你做到"风雨不透"，意外脱颖而出，圆名校梦。

这套丛书紧密结合教材内容，力求将教学需求和实际中高考要求完美结合。在体例设计、内容编排、方法运用、训练考查等方面都充分考虑各个年级学生的实际，由浅入深，循序渐进，稳步提高，并适度、前瞻性地把握中高考动态和趋向，在基础教学中渗透中高考意识。

本丛书作者均为多年在初中、高中一线教学的精英，每册都由有关专家最后审稿定稿。

这套丛书按中高考数、理、化必考的知识点分成三大系列：《不可不读的题》、《不可不知的素材》和《不可不做的实验》。从七年级到高考，并按数学、物理、化学分类，配套中学新课标教材，兼顾老教材，共有36册。

本丛书有如下特点：

1. 选材面广，知识点细，针对性强

在《不可不读的题》中，我们尽量选用当前的热点题，近几年各地的中高考题，并有自编的创新题。在《不可不知的素材》中，我们力求做到：知识面广、知识点细而全、知识网络清晰，并增加一些中高考的边缘知识和前瞻性知识。在《不可不做的实验》中，我们针对目前中学生实验水平低、实验技能差、实验知识缺乏的情况，结合课本教材的知识网络，详细而全面地介绍了实验。有实验目的、原理、步骤、仪器，实验现象、结论、问题探讨，并增加了实验的一般思路和方法。除介绍课本上的学生实验和教师的演示实验外，还增加了很多中高考中出现的课外实验和探究实验。

2. 指导到位

本丛书在指导学生处理好学习中的基础知识的掌握、解题能力的娴熟、实验能力的提高方面，有意想不到的功效。选择本丛书潜心修炼，定能助你考场上游

刃有余,一路顺风,高唱凯歌。

3. 目标明确

在强调学生分析问题和解决问题能力的同时,在习题、内容上严格对应中高考命题方式,充分体现最新中高考的考试大纲原则和命题趋势。

梦想与你同在,我们与你同行。我们期盼:静静的考场上,有你自信的身影。我们坚信:闪光的金榜上,有你灿烂的笑颜。

本丛书特邀江西师范大学附属中学高级教师、南昌市学科带头人万强华担任主编。本分册由王智军主编。

我们全体策编人员殷切期待广大读者对丛书提出宝贵意见。无边的学海仍然警示着我们:只有不懈努力,才会取得胜利,走向辉煌。

编　　者

2006 年 6 月

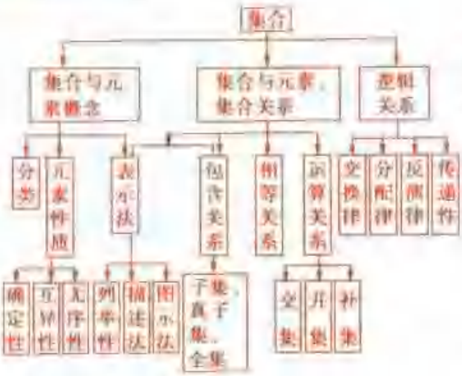
此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

第一章　集合与简易逻辑

第一讲　集　　合

知识表解



知识与规律

1. 集合的概念及表示法

(1)集合与元素：

一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集，通常用大写字母 A、B、C……表示. 集合中的每个对象叫做这个集合的元素，通常用小写字母 a、b、c、…表示.

(2)集合的分类：

有限集(元素个数是有限个).

无限集(元素个数是无限个)

实集(不含任何元素)

(3)集合中元素的特征(集合的三要素)：

①确定性；②互异性；③无序性

(4)常见的数集：

①自然数集：$\mathbf{N}$，正整数集：$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

②整数集：$\mathbf{Z}$；③有理数集：$\mathbf{Q}$；

④实数集：$\mathbf{R}$.

(5)集合的表示法：

①列举法：把集合中的所有元素逐个列举出来，置于大括号内.

②描述法：用所含元素的共有特征性质来描述集合.

一般形式：$A=\{x\in F\mid P(x)\}$，其中 x 表示集合中的元素(代表元)，F 是 x 的取值范围，$P(x)$是 x 具有的特征性质

2. 元素与集合、集合与集合间的关系

(1)元素与集合："$\in$"或"$\notin$".

说明：元素与集合之间是个体与整体的关系，不存在大小与相等关系，如 3 与$\{3\}$，只能是 $3\in\{3\}$，不是 $3=\{3\}$，再如 2 与$\{3\}$，只能是 $2\notin\{3\}$，不能是 $2\neq\{3\}$.

(2)集合与集合之间的关系.

①包含关系.

a. 子集：如果 $x\in A\Rightarrow x\in B$，则集合 A 是集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

显然，任何集合是它自身的子集，即 $A\subseteq A$；空集是任何集合的子集，即$\varnothing\subseteq A$.

b. 全集：如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集. 全集通常用 U 表示. 显然，一切集合都是这个全集的子集.

②相等关系.

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么集合 A 和集合 B 叫做集合相等，记为 $A=B$. 显然，两个相等的集合的元素完全相同.

③真子集关系.

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$. 显然空集是任何非空集合的真子集.

④运算关系.

集合的运算关系是在全集上进行的.

a. 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$.

b. 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A,或\ x\in B\}$.

c. 补集：一般地，设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$)，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集(或余集)，记为 $\complement_S A$，即 $\complement_S A=\{x|x\in S,且\ x\notin A\}$.

3. 集合之间的逻辑关系

(1)交集的运算性质：

$A\cap B=B\cap A,(A\cap B)\subseteq A,(A\cap B)\subseteq B,A\cap U=A,A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2)并集的运算性质：

$A\cup B=B\cup A,(A\cup B)\supseteq A,(A\cup B)\supseteq B,A\cap U=U,A\cup A=A,A\cup\varnothing=A$.

(3)补集的运算性质：

$C_U(\complement_U A)=A,\ \complement_U\varnothing=U,\ \complement_U U=\varnothing,A\cap(\complement_U A)=\varnothing,A\cup(\complement_U A)=U$.

(4)分配律、结合律：

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5)反演律(摩根法则)：

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B),\ \complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

(6)传递性：

若集合 $A\subseteq B,B\subseteq C$，则集合 $A\subseteq C$；

若集合 $A\subsetneq B,B\subsetneq C$，则集合 $A\subsetneq C$.

4. 有限集合的子集个数公式

(1)一个含有 n 个元素的集合，共有 2^n 个子集.

(2)有限集合间的元素的个数公式：

设有限集合 A 的元素个数为 $n(A)$，U 为全集，易得

①$n(A)+n(\complement_U A)=n(U)$；

②$n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\complement_U B)=n(B)-n(B\cap\complement_U A)$；

③$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

联系生活应用题

例 1 设 $A=\{x|x^2+4x=0\},B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=B$，求 a 的值；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的值.

分析 什么是 $A\cap B=B$? 什么是 $A\cup B=B$? 弄清它们的含义，问题就可以得到解决.

解 $A=\{-4,0\}$.

(1)$\because A\cap B=B,\therefore B\subseteq A$.

①若 $0\in B$，则 $a^2-1=0,a=\pm1$. 当 $a=1$ 时，$B=A$；当 $a=-1$ 时，$B=\{0\}$.

②若 $-4\in B$ 时，则 $a^2-8a+7=0,a=7$ 或 $a=1$.

当 $a=7$ 时，$B=\{-12,-4\},B\not\subseteq A$.

③若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0,a<-1$.

由①②③得 $a=1$ 或 $a\leqslant-1$.

(2)$\because A\cup B=B,\therefore A\subseteq B$. $\because A=\{-4,0\}$，B 至多只有两个元素，$\therefore A=B$. 由(1)知，$a=1$.

说明：$B=\varnothing$ 也是 $B\subsetneq A$ 的一种情况，不能遗漏.

例 1 据调查，某班学生参加数学课外小组的人数是参加物理课外小组人数的 2 倍，同时参加两个课外小组的人数是 5，至少参加一个课外小组的人数是 25. 试求参加数学小组、物理小组的人数各为多少？

解 设 $A=\{参加数学小组的学生\}$

$B=\{参加物理小组的学生\}$

则 $n(A)=2n(B),n(A\cap B)=5,n(A\cup B)=25$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow 25=2n(B)+n(B)-5$

$\Rightarrow n(B)=10,n(A)=20$

$\therefore$ 参加数学、物理小组的人数分别为 20 人、10 人.

高考热点专题

运用集合知识的过程中应注意的几个问题

(1)集合中元素的代表元;

(2)集合中元素的互异性;

(3)空集的特殊性和特殊作用;

(4)交集、并集、补集思想的应用.

例1 若 $P=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $P\cap Q$ 等于 ( )

A. P　B. Q　C. $\varnothing$　D. 不确定

分析 类似上题知 P 集合是 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$ 的值域集合,同样 Q 集合是 $y=x^2+1(x\in\mathbf{R})$ 的值域集合,这样 $P\cap Q$ 意义就明确了.

解 事实上,P、Q 中的代表元素都是 y,它们分别表示函数 $y=x^2$,$y=x^2+1$ 的值域,由 $P=\{y|y\geqslant0\}$,$Q=\{y|y\geqslant1\}$ 知 $Q\subsetneq P$,即 $P\cap Q=Q$. 选B.

例1 用列举法表示集合 $\left\{x\in\mathbf{N}\left|\frac{8}{8-x}\in\mathbf{N}\right.\right\}$

解 $\because \frac{8}{8-x}\in\mathbf{N}$

$\therefore 8-x$ 的取值为 1,2,4,8 ☆

$\therefore x=7$ 或 $x=6$ 或 $x=4$ 或 $x=0$ ☆

又 $\because x\in\mathbf{N}$ $\therefore$ 原集合为 $\{0,4,6,7\}$ ☆

例4 已知集合 $A=\{x|ax^2-4x+3=0,a\in\mathbf{R}\}$

(1)若 $A=\varnothing$,求 a 的取值范围;

(2)若 A 中只有 1 个元素,求 a 的值,并把这个元素写出来.

解 (1)$a=0$ 时,$-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{3}{4}$(舍)

$a\neq0$ 时,$\Delta=16-12a<0\Rightarrow a>\frac{4}{3}$

综上:$a>\frac{4}{3}$

(2)$a=0$ 时,$-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{3}{4}$,$A=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

$a\neq0$ 时,$\Delta=0\Rightarrow a=\frac{4}{3}$

☆ $\therefore \frac{4}{3}x^2-4x+3=0\Rightarrow4x^2-12x+9=0$

☆

☆ $\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$\therefore A=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

例4 设 $A=\{x|x\geqslant5$ 或 $x<-1\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$,$A\cap B=\varnothing$,则 m 满足 ( )

A. $-2\leqslant m<3$　　B. $2\leqslant m<3$

C. $m<3$　　D. 以上均不正确

解 $B=\varnothing$ 时,$m+1>2m-1\Rightarrow m<2$

$B\neq\varnothing$ 时,

$$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1\\m+1\geqslant-1\\2m-1<5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant2\\m\geqslant-2\\m<3\end{cases}\Rightarrow2\leqslant m<3$$

综上:$m<3$ 应选C.

例1 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10\leqslant0\}$,集合 $B=\{x|p+1\leqslant x\leqslant2p-1\}$. 若 $B\subseteq A$,求实数 p 的取值范围.

解 由 $x^2-3x-10\leqslant0$,得 $-2\leqslant x\leqslant5$.

欲使 $B\subseteq A$,

只需 $\begin{cases}-2\leqslant p+1\\2p-1\leqslant5\end{cases}\Rightarrow-3\leqslant p\leqslant3$.

$\therefore p$ 的取值范围是 $-3\leqslant p\leqslant3$.

上述解答忽略了"空集是任何集合的子集"这一结论,即 $B=\varnothing$ 时,符合题设. 应有:

(1)当 $B\neq\varnothing$ 时,即 $p+1\leqslant2p-1\Rightarrow p\geqslant2$.

由 $B\subseteq A$ 得 $-2\leqslant p+1$,且 $2p-1\leqslant5$.

则 $-3\leqslant p\leqslant3$,$\therefore 2\leqslant p\leqslant3$.

(2)当 $B=\varnothing$ 时,即 $p+1>2p-1\Rightarrow p<2$.

由(1)、(2)得 $p\leqslant3$.

说明:从以上解答应看到,解决有关 $A\cap B$

$=\varnothing$、$A\cup B=A$、$A\subseteq B$ 等集合问题，易忽视空集的情况而出现漏解. 这需要在解题过程中全方位、多角度审视问题.

例 7 已知 $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}^{+}$，集合 $A=\{x^2+x+1,-x,-x-1\}$，集合 $B=\{-y,-\frac{y}{2},y+1\}$，若 $A=B$，则 x^2+y^2 的值是______.

分析 由 $\{x^2+x+1,-x,-x-1\}=\left\{-y,-\frac{y}{2},y+1\right\}$ 要求出 x,y 的值，自然想到需要建立关于 x,y 的方程组，但是根据集合中元素的无序性，将得到 $P_3^3=6$ 个方程组，这显然是不可取的.

解答本题的突破口在何处？注意两点，一是由已知 $y\in\mathbf{R}^{+}$ 得 $-y<0$，$-\frac{y}{2}<0$，$y+1>0$ 且 $-y<-\frac{y}{2}$；二是隐含条件 x^2+x+1 恒大于零且 $-x>-x-1$ 这样将得到如下简洁的解法

解 $\because x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}^{+}$

$\therefore x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$-x>-x-1$, $-y<-\frac{y}{2}<0<y+1$

$$\therefore \begin{cases} x^2+x+1=y+1 \\ -x=-\frac{y}{2} \\ -x-1=-y \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

这时 $A=\{3,-1,-2\}$，$B=\{-2,-1,3\}$，满足 $A=B$

$\therefore x^2+y^2=1^2+2^2=5$.

说明：本题中，主要利用集合相等定义，并注意到集合中元素的互异性，同时要注意到两集合中的元素范围，简化计算.

例 7 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4mx+2m+6=0, x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^{-}\neq\varnothing$，规定 $\mathbf{R}^{-}$ 为负实数集，求 m 的取值范围.

分析 集合 A 是方程 $x^2-4mx+2m+6=0$①的实数解组成的非空集合，$A\cap\mathbf{R}^{-}\neq\varnothing$ 意味着方程①的根有：(1)两负根，(2)一负根一零根，(3)一负根一正根三种情况，分别求解较麻烦. 上述三种情况虽可概括为方程①的较小根

$$\frac{4m-\sqrt{(-4m)^2-4(2m+6)}}{2}<0,$$

但在目前的知识范围内求解存在困难. 如果考虑题设 $A\cap\mathbf{R}^{-}\neq\varnothing$ 的反面：$A\cap\mathbf{R}^{-}=\varnothing$，则可先求方程①的两根 x_1、x_2 均非负时 m 的取值范围. 用补集思想求解尤为简便.

解 设全集 $U=\{m\mid\Delta=(-4m)^2-4(2m+6)\geqslant0\}=\{m\mid m\leqslant-1 \text{ 或 } m\geqslant\frac{3}{2}\}$.

若方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ 的两根 x_1、x_2 均非负，

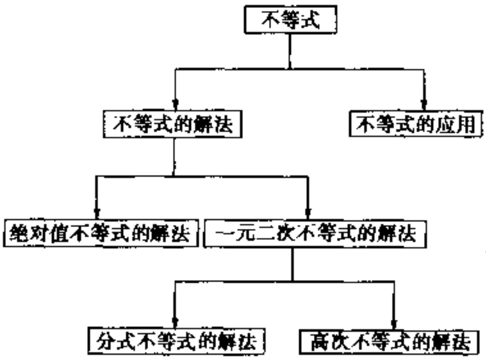
$$则\begin{cases} m\in U \\ x_1+x_2=4m\geqslant0 \Rightarrow m\geqslant\frac{3}{2}. \\ x_1x_2=2m+6\geqslant0 \end{cases}$$

因此，$\{m\mid m\geqslant\frac{3}{2}\}$ 关于 U 的补集 $\{m\mid m\leqslant-1\}$ 即为所求.

说明：采用"正难则反"的解题策略. 具体地说，就是将所研究对象的全体视为全集，求出使问题反面成立的集合 A，那么 $\complement_U A$ 便为所求.

第二讲　不等式的解法

知识表解



知识与规律

1. 绝对值不等式的解法

(1)同解定理法：

①不等式的同解定理

当 $a>0$ 时，$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$；

当 $a>0$ 时，$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$.

②推广结论

(Ⅰ)当 $a\in\mathbf{R}$ 时，

a. 若 $a>0$ 时，$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$；

$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$.

b. 若 $a=0$ 时，$|f(x)|<a$ 无解；

$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)\neq 0$.

c. 若 $a<0$ 时，$|f(x)|<a$ 无解；

$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)$有意义.

综上，对任意 $a\in\mathbf{R}$，有：

$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$.

$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$.

(Ⅱ)$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)<-g(x)$或 $f(x)>g(x)$.

(Ⅲ)$|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2>[g(x)]^2 \Leftrightarrow [f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]>0$.

(2)零点分段法：

依据不等式中所含各绝对值的零点，将数轴划分为若干区间，通过对各区间取值情况的讨论，去掉绝对值符号，从而求解，所谓“零点”就是使各绝对值为 0 的 x 值，在数轴上对应的点.

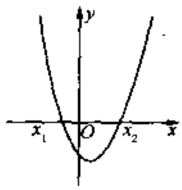
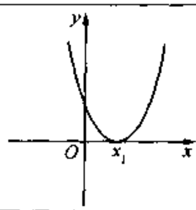
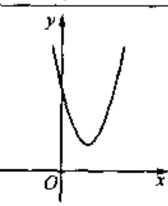
2. 一元二次不等式的解法

(1)一元二次不等式的标准形式是：$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$. 其中 $a>0$，要求一元二次不等式的解集，应该先将其化为标准形式.

从函数观点来看，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$的解集，就是二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$在 x 轴上方的点的横坐标 x 的集合，而一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$的根就是相应的二次函数与 x 轴交点的横坐标. 因此，要解一元二次不等式，只要先解相应的一元二次方程即可.

(2)一元二次不等式的解集与一元二次方程的根及二次函数图像之间的关系分类列表如下：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

	一元二次方程	二次函数	一元二次不等式	
标准式	$ax^2+bx+c=0(a>0)$ $\Delta=b^2-4ac$	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$
			$(a>0)$	
图像或解集	$\Delta>0$ 解集为 $\{x_1,x_2\}$ 设 $x_1<x_2$		$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$
	$\Delta=0$ 解集为 $\{x_1\}$		$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq x_1\}$	$\varnothing$
	$\Delta<0$ 解集为 $\varnothing$		$\mathbf{R}$	$\varnothing$

3. 简单的分式不等式和高次不等式的解法

(1)形如 $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ 型：

$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$

(2)形如 $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ 型：

$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$

(3)形如 $\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant0$ 型：

$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant0\\g(x)\neq0\end{cases}$

(4)形如 $\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant0$ 型：

$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant0\\g(x)\neq0\end{cases}$

联系生活应用题

☆☆☆

例 1 若 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$(其中 $a\in\mathbf{R}$)的解集依次为 A 与 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

解 A：$-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}\Rightarrow 2a\leqslant x\leqslant a^2+1$

B：$(x-2)(x-3a-1)\leqslant0$

令 $2-3a-1>0$ 得 $a<\frac{1}{3}$

(1)$a>\frac{1}{3}$ 时，$2\leqslant x\leqslant 3a+1$

$\because A\subseteq B$

$\therefore \begin{cases}2a\geqslant 2\\ a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 3$

$\therefore 1\leqslant a\leqslant 3$

(2)$a=\frac{1}{3}$时，$A:\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$，$B:x=2$(舍)

(3)$a<\frac{1}{3}$时，$3a+1\leqslant x\leqslant 2$

$\therefore \begin{cases}2a\geqslant 3a+1\\ a^2+1\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow a=-1$

$\therefore a=-1$

综上：$1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$

例 2 某商场在促销期间规定：商场内所有商品按标价的 80% 出售；同时，当顾客在该商场内消费满一定金额后，按如下方案获得相应金额的奖券：

消费金额的范围/元	[200, 400)	[400, 500)	[500, 700)	[700, 900)	…
获得奖券的金额/元	30	60	100	130	…

根据上述促销方法，顾客在该商场购物可以获得双重优惠，例如，购买标价为 400 元的商品，则消费金额为 320 元，获得的优惠额为：$400\times 0.2+30=110$(元)．设购买商品得到的优惠率 $=\frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$．试问：

(1)若购买一件标价为 1000 元的商品，顾客得到的优惠率是多少？

(2)对于标价在[500, 800](元)内的商品，顾客购买标价为多少元的商品，可得到不小于 $\frac{1}{3}$ 的优惠率？

解 (1)$\frac{1000\times 0.2+130}{1000}=33\%$

(2)设商品的标价为 x 元，则 $500\leqslant x\leqslant 800$，消费额：$400\leqslant 0.8x\leqslant 640$

由已知得$\begin{cases}\frac{0.2x+60}{x}\geqslant\frac{1}{3}\\ 400\leqslant 0.8x<500\end{cases}$

或$\begin{cases}\frac{0.2x+100}{x}\geqslant\frac{1}{3}\\ 500\leqslant 0.8x\leqslant 640\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0.4x\leqslant 180\\ 500\leqslant x<625\end{cases}$或$\begin{cases}0.4x\leqslant 300\\ 625\leqslant x\leqslant 800\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 450\\ 500\leqslant x<625\end{cases}$或$\begin{cases}x\leqslant 750\\ 625\leqslant x\leqslant 800\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing$ 或 $625\leqslant x\leqslant 750$.

$\Leftrightarrow 625\leqslant x\leqslant 750$.

$\therefore$ 当顾客购买标价在[625, 750]元内的商品时，可得到不小于 $\frac{1}{3}$ 的优惠率.

说明：解决实际问题时，注意变量的范围，可简化解题过程.

高考热点专题

含参变量一元二次不等式的解法

在高考的考察要求中，对参数的应用一直是主要考察知识点，利用分类讨论的思想解决含参变量一元二次不等式的解法问题也是热门考题之一．其核心思想是通过确定参数分界点，利用分类讨论的思想逐步分情况解不等式.

分界点的确定：

1．大小根分界处.

例 2 解不等式：$x^2-ax-6a^2<0$

解 $(x-3a)(x+2a)<0$

$x_1=3a$，$x_2=-2a$

令 $x_1-x_2=5a>0$，得 $a>0$

由图 1-2-1 可知

(1)$a>0$ 时，$-2a<x<3a$；

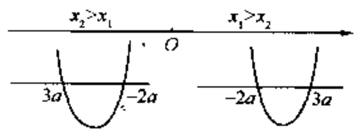


图 1-2-1

(2)$a=0$ 时，$x^2<0\Leftrightarrow x\in\varnothing$；

(3)$a<0$ 时，$3a<x<-2a$.

综上所述，原不等式解集为

(1)$a>0$ 时，$x\in(-2a,3a)$；

(2)$a=0$ 时，$x\in\varnothing$；

(3)$a<0$ 时，$x\in(3a,-2a)$.

说明：(1)此类问题的基本解题步骤为：①通过比较根的大小确定参数分界点；②分情况借助二次函数的图像解不等式；③将最后结果写成区间或集合的形式. (2)参数分界点必须单独讨论. (3)最后结果不能“交”、不能“并”.

2. 首项系数变号处.

例 3 解不等式：$mx^2-x-(m+1)<0$.

解 $[mx-(m+1)](x+1)<0$

$x_1=\frac{m+1}{m}$，$x_2=-1$

令 $x_1-x_2=\frac{m+1}{m}+1=\frac{2m+1}{m}>0$，

得 $m>0$ 或 $m<-\frac{1}{2}$

由图 1-2-2 可知

(1)$m>0$ 时，$-1<x<\frac{m+1}{m}$；

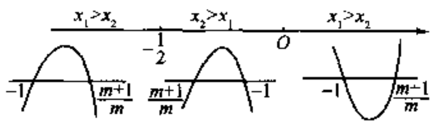


图 1-2-2

(2)$m=0$ 时，$-x-1<0\Leftrightarrow x>-1$；

(3)$-\frac{1}{2}<m<0$ 时，$x<\frac{m+1}{m}$ 或 $x>-1$；

(4)$m=-\frac{1}{2}$ 时，$-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}<0\Leftrightarrow x^2+2x+1>0\Leftrightarrow(x+1)^2>0\Leftrightarrow x\neq-1$；

(5)$m<-\frac{1}{2}$ 时，$x<-1$ 或 $x>\frac{m+1}{m}$.

综上所述，原不等式的解集为

(1)$m>0$ 时，$x\in\left(-1,\frac{m+1}{m}\right)$；

(2)$m=0$ 时，$x\in(-1,+\infty)$；

(3)$-\frac{1}{2}<m<0$ 时，

$x\in\left(-\infty,\frac{m+1}{m}\right)\cup(-1,+\infty)$；

(4)$m=-\frac{1}{2}$ 时，

$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$；

(5)$m<-\frac{1}{2}$ 时，

$x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{m+1}{m},+\infty\right)$.

说明：作出函数图像时注意抛物线开口方向.

3. “Δ”变号处.

例 3 解不等式：$ax^2-(a+1)x+1\geqslant0$.

解 $(ax-1)(x-1)\geqslant0$

$x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=1$

令 $x_1-x_2=\frac{1-a}{a}>0$，得 $0<a<1$

由图 1-2-3 可知

(1)$a>1$ 时，$x\geqslant1$ 或 $x\leqslant\frac{1}{a}$；

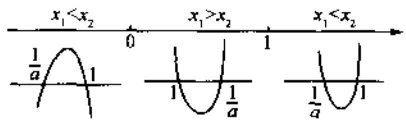


图 1-2-3

(2)$a=1$ 时，$x^2-2x+1\geqslant0\Leftrightarrow(x-1)^2\geqslant0\Leftrightarrow x\in\mathbf{R}$；

(3)$0<a<1$ 时，$x\geqslant\frac{1}{a}$ 或 $x\leqslant1$；

(4)$a=0$ 时，$-x+1\geqslant0\Leftrightarrow x\leqslant1$；

(5)$a<0$ 时，$\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant1$.

综上所述，原不等式的解集为

(1)$a>1$ 时，$x\in\left(-\infty,\frac{1}{a}\right]\cup[1,+\infty)$；

(2)$a=1$ 时，$x\in\mathbf{R}$；

(3)$0<a<1$ 时，$x\in(-\infty,1]\cup\left[\frac{1}{a},+\infty\right)$；

(4)$a=0$ 时，$x\in(-\infty,1]$；

(5)$a<0$ 时，$x\in\left[\frac{1}{a},1\right]$.

例 3 解关于 x 的不等式 $\frac{x}{x-1}<1-a\ (a\in\mathbf{R})$.

解 $\frac{x}{x-1}<1-a\Leftrightarrow\frac{x}{x-1}-1<-a\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}+a<0\Leftrightarrow\frac{ax-(a-1)}{x-1}<0\Leftrightarrow[ax-(a-1)](x-

$1)<0$.

$x_1=\frac{a-1}{a}, x_2=1$

令 $x_1-x_2=\frac{a-1}{a}-1=-\frac{1}{a}>0$,得 $a<0$

由图 1-2-4 可知

(1)当 $a>0$ 时,$\frac{a-1}{a}<x<1$

(2)当 $a=0$ 时,$x<1$

(3)当 $a<0$ 时,$x<1$ 或 $x>\frac{a-1}{a}$.

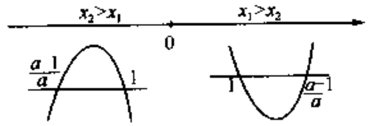


图 1-2-4

综上所述,原不等式的解集为:

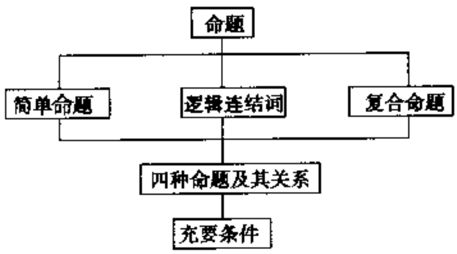
(1)$a>0$ 时,$x\in\left(\frac{a-1}{a},1\right)$;

(2)$a=0$ 时,$x\in(-\infty,1)$;

(3)$a<0$ 时,$x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{a-1}{a},+\infty\right)$.

第三讲　命题与简易逻辑

知识表解



知识与规律

1. 逻辑联结词

(1)命题:可以判断真假的语句叫做命题.

(2)逻辑联结词:"或"、"且"、"非"这些词叫做逻辑联结词.

或:两个简单命题至少一个成立.

且:两个简单命题都成立.

非:对一个命题的否定.

(3)简单命题与复合命题:不含逻辑联结词的命题叫做简单命题;由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

(4)表达形式:用小写的拉丁字母 p、q、r、s……来表示简单命题.

复合命题有三类:①p 或 q;②p 且 q;③非 p.

(5)真值表:表示命题真假的表叫真值表.

①非 p 形式复合命题真值表:

p	非 p
真	假
假	真

②p 且 q 形式复合命题真值表:

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

③p 或 q 形式复合命题真值表:

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

2. 四种命题

(1)一般地,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题的形式就是:

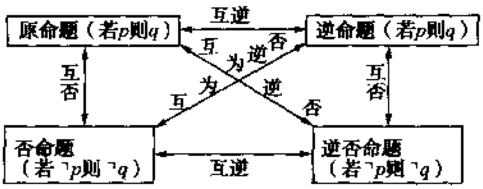
原命题:若 p 则 $q(p\Rightarrow q)$;

逆命题:若 q 则 $p(q\Rightarrow p)$;

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q(\neg p\Rightarrow\neg q)$;

逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p(\neg q\Rightarrow\neg p)$.

(2)四种命题的关系:



(3)一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下四条关系：

①原命题为真，它的逆命题不一定为真.

②原命题为真，它的否命题不一定为真.

③原命题为真，它的逆否命题一定为真.

④逆命题为真，否命题一定为真.

3. 充要条件

定义	从集合观点看
若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件	若集合 $p\subseteq q$，则 p 是 q 的充分条件
若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要条件	若集合 $q\subseteq p$，则 p 是 q 的必要条件
若 $p\Rightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件	若集合 $p\subsetneqq q$，则 p 是 q 的充分不必要条件
若 $q\Rightarrow p$ 且 $p\nRightarrow q$，则 p 是 q 的必要不充分条件	若集合 $p\supsetneqq q$，则 p 是 q 的必要不充分条件
如果 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分且必要条件	若集合 $q=p$，则 p 是 q 的充分必要条件
如果 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的非充分非必要条件	若集合 $p\not\subseteq q$ 且 $q\not\subseteq p$，则 p 是 q 的非充分非必要条件

联系生活应用题

例 1 判断下列语句是否是命题，若是，判断其真假.

(1)等腰三角形两底角相等；

(2)$x^2-2x-3<0$；

(3)不相交的两条直线是不是平行线？

(4)$\{x|x-1<3$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$是有限集；

(5)面积相等的两个三角形是全等三角形.

解 (1)是真命题；

(2)不是命题；

(3)疑问句，没有对这两条直线是否平行做出判断，不是命题；

(4)是真命题；

(5)是假命题，因为两三角形面积相等，但不一定全等.

说明：判断一个语句是否是命题，关键是能否判断其真假. 要注意反诘句是命题，而疑问句不是命题；祈使句和含未知数的等式或不等式也不是命题.

例 2 分别指出下列复合命题的构成形式及构成它的简单命题：

(1)三角形两边中点连线平行于第三边并且等于第三边长的一半；

(2)小张参加百米比赛或参加二百米比赛；

(3)$x=3$ 是方程 $x^2-9=0$ 的根并且是方程 $\frac{x^2-9}{x-3}=0$ 的根；

(4)13 是 2 的整数倍或者是 3 的整数倍；

(5)$\sqrt{2}$不是有理数.

解 (1)这个命题是 p 且 q 的形式，其中

p：三角形两边中点连线平行于第三边；

q：三角形两边中点连线等于第三边长的一半.

(2)这个命题是 p 或 q 的形式，其中

p：小张参加百米比赛；q：小张参加二百米比赛.

(3)这个命题是 p 且 q 的形式，其中

p：$x=3$ 是方程 $x^2-9=0$ 的根；q：$x=3$ 是方程 $\frac{x^2-9}{x-3}=0$ 的根.

(4)这个命题是 p 或 q 的形式，其中

p：13 是 2 的整数倍；q：13 是 3 的整数倍.

(5)这个命题是非 p 形式，其中 p：$\sqrt{2}$是有理数.

例 2 已知 $c>0$，设 P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

解析 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减$\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$函数 $y=x+|x-2c|$在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c & (x\geqslant 2c),\\ 2c & (x<2c),\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.

$\therefore$ 不等式 $|x+|x-2c||>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

如果 P 正确，且 Q 不正确，则 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$；

如果 P 不正确，且 Q 正确，则 $c\geqslant 1$.

$\therefore c$ 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

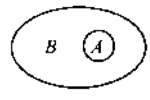
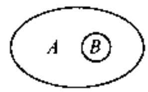
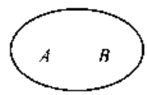
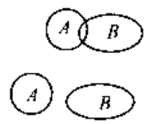
说明：解题过程紧扣基本知识，对绝对值问题的处理从定义出发，分类讨论，解法基本，容易接受. 除此解法外，还可以考虑把问题进行转化. 如利用函数的图像，通过几何直观进行解释. 对绝对值不等式，可从解不等式出发，避开分段函数最值，转化为不等式的解集去解释，也可从重要的绝对值不等式性质的应用去解决，更显简捷.

高考热点专题

充要条件

充分条件、必要条件和充要条件是重要的数学概念，主要用来区分命题的条件和结论之间的因果关系.

1. 给定两个命题 p、q，欲判断 p 是 q 的什么条件，可以通过集合知识来分析. 设集合 $A=\{x|x$ 满足 $p\}$ 和集合 $B=\{x|x$ 满足 $q\}$，若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，特别地，当 $A\subsetneqq B$ 时，则 p 是 q 的充分不必要条件；若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件，特别地，当 $A\supsetneqq B$ 时，则 p 是 q 的必要不充分条件；若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件. 这种用集合描述的充要条件通俗一点的语言表达即"小充分、大必要"，其具体含义从下表中可以看出，其中 A 所代表的条件是 B 所代表的条件的充分条件，B 所代表的条件是 A 所代表的条件的必要条件.

	从逻辑推理观点看	从集合观点看
p 是 q 的充分不必要条件	$p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$	
p 是 q 的必要不充分条件	$q\Rightarrow p$ 但 $p\nRightarrow q$	
p 是 q 的充要条件	$p\Leftrightarrow q$	
p 是 q 的不充分不必要条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$	

2. 判断充分条件、必要条件和充要条件的方法：

（1）逻辑推理法. 要懂得 $\Rightarrow$ 与 $\Leftarrow$ 等符号的意义，会利用推理符号来判断充分条件和必要条件.

例 1 求关于 x 的二次方程 $x^2-mx+m^2-4=0$ 有两个正实根的充要条件.

解 $x^2-mx+m^2-4=0$ 有两个正实数根

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4(m^2-4)\geqslant 0,\\ m>0,\\ m^2-4>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 2<m\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 方程有两个正实根的充要条件是 $2<m\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

（2）转化法，根据原命题与逆否命题同真同假判断.

例 2 已知 p：$|1-\frac{x-1}{3}|\leqslant 2$

q：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$

若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件，求实数 m 的取值范围.

解 p：$|x-4|\leqslant 6\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 10$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com