

21

世纪高等院校教材

大学工科·数学教材系列

高等数学目标与测试

主 编 肖亚兰

副主编 陆 全 杨月茜 刘华平

 科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材
大学工科·数学教材系列

高等数学目标与测试

主 编 肖亚兰

副主编 陆 全 杨月茜 刘华平

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是工科类本科学生学习高等数学课程的一本参考书. 书中内容分为两部分: 一部分是高等数学课程的教学目标与要求, 这一部分是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和布鲁姆教育目标分类学理论, 并结合教师的教学经验, 从识记、领会、运用、分析与综合 4 个方面提出了各个知识点要达到的教学目标要求; 另一部分是根据上述目标的要求而编写的目标检测题, 其中 B 级检测题中有许多选自历年的硕士研究生入学试题.

本书可供学习高等数学课程的工科类本科生使用, 也可供报考硕士研究生的考生复习时使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学目标与测试/肖亚兰主编. —北京: 科学出版社, 2006

21 世纪高等院校教材(大学工科·数学教材系列)

ISBN 7-03-017745-2

I. 高… II. 肖… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086195 号

责任编辑: 李鹏奇 王 静/责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张克忠/封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2006 年 8 月第一次印刷 印张: 16 3/4

印数: 1—6 000 字数: 319 000

定价: 21.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题, 我社负责调换<双青>)

前 言

高等数学是一门重要的基础理论课,该课程教学质量的高低对后续课程的学习有很大影响.长期以来,已有不少教师为提高该课程的教学质量从教与学两方面进行了各种探索和尝试,并取得了可喜的成果.但是,如何充分发挥评估对教与学的反馈作用,控制教学过程最优化,达到提高教学质量的目的,这一问题尚缺乏研究.

“微机辅助高等数学目标教学”便是我们解决这个问题的新尝试.我们从1990年底开始进行这项试验,目的是为了大面积提高高等数学课程的教学质量并减轻教师批改作业的工作量.本书是配合这项教改的教学用书,是继《高等数学教学目标与目标检测题》之后重新编写的又一本书.

下面就高等数学目标教学的几个有关问题加以说明.

一、关于目标教学

目标教学即对教学过程进行有序的微观控制.实现微观控制的途径是通过目标检测使师生及时准确地获取反馈信息,知道哪些目标业已达到,哪些知识尚未掌握,并以此为依据对教学工作及时矫正,以便使大部分学生在规定的时间内达到目标要求.

二、微机辅助高等数学目标教学的特点

1. 目标教学强调师生双方都应明确教学目标.

以往的教学,教学目标基本上是单向的,即教师根据手中持有的“高等数学课程教学基本要求”讲课,而学生则大多是从教材及教师的讲授中体会教学目标,因而学习带有一定的盲目性.实行目标教学,目标发到学生手里,且目标较之“基本要求”来得具体,学生容易掌握,于是不仅教师的教学有目标,学生的学习也目标明确,因而能更好地发挥教师的主导作用和学生的主体作用.

2. 目标教学是对评估方法的改革.

教学中,教师的讲授、学生的学习和教学质量的评估是构成整个教育理论系统的三个相辅相成的子系统.但长期以来,人们习惯于把注意力集中在对教与学的研究上,而对教与学反馈作用的评估的重要性却重视不够,或者虽然注意到了,但又苦于没有足够的时间和精力投入到这一需要耗费很多时间、很多精力的工作中去.

目标教学这项教改不是对教师讲授方法的改革,也不是对学生学习方法的改革,而是对评估方法的改革. 因为几十年来沿用的教学评价(即期末考试或评估考试)是属于终结性的. 这种评价是对学生分等级,其目的是对其能否进一步学习、升学作结论,或是使教师了解自己的教授效果. 是把教学过程和评价过程区分开来,教学旨在训练学生,评价则是鉴定学生达到的程度. 因此,终结性评价对于帮助学生学会未学好的知识作用不是很大.

而形成性评价与此相反,它实施于教学的过程之中,它特别重视教学反馈与矫正. 通过检测,教师可清晰地了解学生在某章或某节教学中达到目标的情况. 这种及时的反馈,为教学活动中应采取的矫正方式、内容提供信息,帮助学生发现自己哪些目标未达到,从而重新安排时间和精力补课. 对达到目标的学生起着增强自信的作用,对那些目标部分达到的学生,也会起“强化”的作用. 故形成性评价对大面积地提高学生的学业成绩有积极的作用,它主要是帮助学生学好当前的课程.

3. 微机辅助高等数学目标教学.

形成性评价对大面积地提高学生的学业成绩有积极的作用. 但是,如果没有计算机的帮助,形成性评价的实施必将给教师增加很大的负担,必将占用教师过多的时间.

“微机辅助高等数学目标教学”正是要充分发挥计算机的作用,用微机批改检测题的答卷,并给出统计、评价,达到大大节约教师时间的目的.

三、教学目标的编制

教学目标的编制依据:

1. 教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”;
2. 布鲁姆教育目标分类学理论;
3. 教师的教学经验和体会.

布鲁姆(B. S. Bloom)博士是当代倡导教育改革的世界著名教育学家、心理学家,芝加哥大学荣誉教授,也是我国华东师范大学的荣誉教授. 20 世纪 50 年代,他以教育目标分类学理论闻名于世,其贡献在于把一般的教育目标具体化到学校的每一学科中去. 他把教育要达到的全部目标分为三个大的领域——认知领域、情感领域与动作技能领域. 其中,认知领域包括有关知识的回忆或再现以及理解、智力和技能形成方面的目标. 这是目前许多流行的测验编制研究中最关键的领域,布鲁姆关于认知领域的目标分类是从低级的知识和信息层次开始,达到高级的评价层次,即识记、领会、运用、分析、综合、评价. 这种理论更强调以能力为目标的教学,能力建立在知识的基础上,知识目标 and 能力目标是由低向高一层一层地发展,

最终可使学生在知识和能力两方面都得到发展. 这种分类法是符合人的认识规律的.

每一章开头的“教学基本要求”是从国家教委颁布的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”中摘录的. 而每一个单元的“知识要点”, “重点”及“目标要求”则是根据上述教学基本要求由我们自己编写的.

编写教学目标时, 我们根据每一章的内容将该章分为若干个单元, 并将每个单元的内容概括为若干个知识点, 然后, 再根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及布鲁姆的教育目标分类理论制定出每一个知识点, 所要达到的教学目标及学习水平(识记、领会、运用、分析与综合). 有些打了“*”号的目标要求是针对想报考硕士研究生的同学的.

四、目标检测题的编制

1. 从内容上讲, 目标检测题基本上覆盖了所有的知识点; 从难易程度上讲, 目标检测题(B)较目标检测题(A)要难一些. 目标检测题(A)反映了教学的基本要求, 用于检测全体学生达到高等数学教学目标的情况. 目标检测题(B)供学有余力的同学及想报考研究生的同学使用, 其中部分题目选自历年的硕士研究生入学考试.

2. 为了能在计算机上批改, 所有的目标检测题都是单项选择题. 题解中不仅给出了每个题的正确解答, 而且有些题目对学生常选的错误选项也说明了错误的原因, 为学生进行自我矫正提供了进一步的帮助.

3. 每个单元有两套目标检测题. 每个目标检测题上都标明了该题目要考查的知识点及能力水平. 这样, 便于学生通过检测知道自己哪一方面的知识掌握得不好, 哪一方面的能力较差, 为下一步应采取的补救措施指明方向.

五、目标教学的实施

每个学生应认真阅读、理解、体会高等数学各单元的教学目标要求, 记住那些要求记忆的定义、定理、公式, 并对其中一部分指明要熟记的内容熟记. 每个学生应在记忆的基础上, 对定义、定理的关键词汇深刻领会, 对定理、公式的条件、结论予以进一步诠释. 并在每个单元的教学内容讲完之后, 立即认真地完成该单元的目标检测题(A). 教师可视具体情况收目标检测题答卷, 并用计算机进行批改. 教师可针对学生学习中存在的问题及教师讲授中的失误采取相应的补救措施.

书中带*号的条目是为某些相关专业选用的, 也是对选用专业学生的基本要求. 各校根据本校的实际情况, 在达到基本要求的基础上, 还可以提出一些较高的或特殊的要求. 各章的内容按教学要求的不同, 都分为两个层次. 文中用黑体字排印的内容, 应使学生深入领会和掌握, 并能熟练运用. 其中, 概念、理论用“理解”

一词表述,方法、运算用“掌握”一词表述. 非黑体字排印的内容,也是必不可少的,只是在教学要求上低于前者. 其中,概念、理论用“了解”一词表述,方法、运算用“会”或“了解”表述.

书中附有由郑红婵主编的《高等数学习题全解》(电子版),对《高等数学》(西北工业大学高等数学教材编写组编,科学出版社,2005)中的全部习题给出了详细解答.

参加本书编写工作的有肖亚兰、陆全、杨月茜、刘华平、周敏、郑红婵、刘小冬、王寿生等. 由于编者水平所限,加之时间仓促,错误之处在所难免,欢迎读者批评指正.

编 者

2006年5月

目 录

第一章	一元函数的极限与连续	1
第二章	导数与微分	16
第三章	微分中值定理与导数的应用	31
第四章	不定积分	43
第五章	定积分	55
第六章	定积分的应用	65
第七章	向量代数与空间解析几何	70
第八章	多元函数微分法及其应用	82
第九章	重积分	93
第十章	曲线积分与曲面积分	104
第十一章	无穷级数	117
第十二章	微分方程	133
	目标检测题解答	143

第一章 一元函数的极限与连续

教学基本要求

1. 在中学已有函数知识的基础上,加深对函数概念的理解和函数性质(奇偶性、单调性、周期性和有界性)的了解.
2. 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.
3. 会建立简单实际问题中的函数关系式.
4. 理解极限的概念,了解极限的 ϵ - N , ϵ - δ 定义(不要求学生做给出 ϵ 求 N 或 δ 的习题).
5. 掌握极限的有理运算法则,会用变量代换求某些简单复合函数的极限.
6. 了解极限的性质(唯一性、有界性、保号性)和两个存在准则(夹逼准则与单调有界准则),会用两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限.
7. 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念,会用等价无穷小求极限.
8. 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念.
9. 了解函数间断点的概念,会判别间断点的类型.
10. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理.

第一单元

一、知识要点

1. 函数的概念;
2. 函数的特性:单调性、有界性、奇偶性、周期性;
3. 反函数与复合函数;
4. 基本初等函数与初等函数;
5. 分段函数;
6. 建立函数关系.

二、重点

1. 函数概念;
2. 基本初等函数及其图形;
3. 复合函数.

三、目标要求

1. 识记.
 - (1) 记住邻域、去心 δ 邻域、左 δ 邻域、右 δ 邻域的定义;
 - (2) 记住映射、像、原像、映射的定义域与值域的定义;
 - (3) 记住满射、单射、一一映射的定义;
 - (4) 记住逆映射与复合映射的定义;
 - (5) 记住函数、函数定义域、函数值及函数值域的定义;
 - (6) 记住函数有上界、有下界、有界、无界的定义;
 - (7) 熟记基本初等函数的分析式、定义域、值域、图形及其奇偶性、单调性、有界性等主要性质;
 - (8) 记住反函数、复合函数的定义;
 - (9) 记住初等函数的定义;
 - (10) 记住分段函数的定义, 记住 $y = \operatorname{sgn} x$, $y = [x]$ 的定义及其图形;
 - (11) 记住双曲函数和反双曲函数的定义、表达式、定义域、值域及其简单性质.
2. 领会.
 - (1) 领会构成映射必须具备三要素: 定义域、值域和对应法则;
 - (2) 领会映射的像的唯一性和原像的不一定唯一性;
 - (3) 领会函数实质上是从实数集 $D \subset \mathbf{R}$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射;
 - (4) 领会记号 f 和 $f(x)$ 在含义上的差别: f 表示对应法则, $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值, 习惯上常用的记号“ $f(x), x \in D$ ”应理解为定义在 D 上的函数 f ;
 - (5) 领会函数的概念及确定函数的两个要素, 弄清楚两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等, 是指它们有相同的定义域 D , 且对任何 $x \in D$, 有 $f(x) = g(x)$;
 - (6) 领会函数的有界性、单调性与所给区间密切相关;
 - (7) 领会函数有上界、有下界、无界在图形上的特点, 领会奇函数的图形对称于原点, 偶函数的图形对称于 y 轴;
 - (8) 领会通常所说周期函数的周期是指最小正周期, 并且不是每个周期函数都有最小正周期;
 - (9) 领会当 f 是单调函数时, 其反函数 f^{-1} 存在, 且反函数也单调, 直接函数与

其反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称;

(10) 领会复合函数的概念, 弄清中间变量与自变量的关系, 注意并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数;

(11) 领会什么是基本初等函数和初等函数, 知道双曲函数是初等函数.

3. 运用.

(1) 能建立简单应用问题的函数关系;

(2) 会求函数的定义域(包括分段函数的定义域), 会求函数值和函数的值域;

(3) 会用定义验证函数在所给区间上是否单调、是否有界, 验证函数是否奇(偶)函数和周期函数;

(4) 会求一些用解析式表示的函数的反函数, 并会确定反函数的定义域;

(5) 能将几个函数复合成一个复合函数, 也会将一个复合函数表示成几个简单函数的复合.

4. 分析与综合.

(1) 能综合运用复合函数的定义及定义域的求法, 求抽象函数的复合函数及分段函数的复合函数, 并确定它们的定义域;

(2) 能综合运用奇(偶)函数和周期函数的性质以及复合函数的概念, 讨论复合函数的奇偶性和周期性等.

四、目标检测题

目标检测题(A)

1. 领会: 函数的概念.

下列各对函数中, 表示同一函数的是().

(A) $y_1 = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$ 和 $y_2 = x+3$

(B) $y_1 = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ 和 $y_2 = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$

(C) $y_1 = \sqrt{(2x-3)^2}$ 和 $y_2 = |2x-3|$

(D) $y_1 = \ln(x+2)^2$ 和 $y_2 = 2\ln(x+2)$

2. 运用: 复合函数的定义域.

设 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$ 则 $f(x-2)$ 的定义域是().

(A) $[-1, 3]$ (B) $(-1, 3]$ (C) $[1, 5]$ (D) $(1, 5]$

3. 领会: 函数的复合.

设 $f(x)$ 是定义在实数轴上的一个函数, 且 $f(x-1) = x^2 + x + 1$, 则

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right) = (\quad).$$

$$(A) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$$

$$(B) \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + 1$$

$$(C) \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$(D) \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + 3$$

4. 领会:函数复合的条件.

下列各组函数中,能够构成复合函数的是().

$$(A) y = \ln u, u = -x^2 - 1$$

$$(B) y = 3^u, u = \sqrt{x}$$

$$(C) y = \arccos u, u = 2 + x^2$$

$$(D) y = \sqrt{u}, u = -x^2 + 2x - 3$$

5. 运用:反函数、函数复合.

设 $f(x) = \ln x$, 且函数 $\varphi(x)$ 的反函数 $\varphi^{-1}(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$, 则 $f[\varphi(x)] = (\quad)$.

$$(A) \ln \frac{x-2}{x+2}$$

$$(B) \ln \frac{x+2}{x-2}$$

$$(C) \ln \frac{2-x}{x+2}$$

$$(D) \ln \frac{x+2}{2-x}$$

6. 运用:函数的奇偶性.

设函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ($a > 0, a \neq 1$), 则该函数是().

(A) 奇函数

(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数

(D) 既是奇函数又是偶函数

7. 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的奇函数, 且 $f(-1) = -1$, 则 $f(7) = (\quad)$.

$$(A) -1$$

$$(B) 2$$

$$(C) 1$$

$$(D) -2$$

目标检测题(B)

1. 运用:复合函数的定义域.

设 $y = f(\lg x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 则 $y = f(x)$ 的定义域是().

$$(A) \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$(B) [\sqrt{10}, 100]$$

$$(C) [-\lg 2, \lg 2]$$

$$(D) [0, 1]$$

2. 领会:函数的复合.

设 $f(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leq 2, \\ 1, & |x| > 2, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = (\quad)$.

$$(A) 2$$

$$(B) 1$$

$$(C) f(x)$$

$$(D) [f(x)]^2$$

3. 领会:函数的记号.

设 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$, 则 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = (\quad)$.

$$(A) 1 - \cos x$$

$$(B) -\cos x$$

$$(C) 1 + \cos x$$

$$(D) 1 - \sin x$$

4. 运用:分段函数的反函数.

函数 $y = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^2 - 4, & 0 < x < 2 \end{cases}$ 的反函数是().

(A) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & 2 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x+4}, & 0 < x < 2 \end{cases}$

(B) $y = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x+4}, & -4 < x < 0 \end{cases}$

(C) $y = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4, \\ -\sqrt{x+4}, & -4 < x < 0 \end{cases}$

(D) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4, \\ -\sqrt{x+4}, & -4 < x < 0 \end{cases}$

5. 运用:函数的奇偶性.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义且为奇函数,若当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = x(x-1)$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = ()$.

(A) $-x(x+1)$

(B) $x(x-1)$

(C) $x(-x+1)$

(D) $x(x+1)$

6. 分析综合:单调性、偶函数的性质.

已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上是单调增函数,那么 $f(-\pi)$ 和 $f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$ 的关系是().

(A) $f(-\pi) < f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$

(B) $f(-\pi) = f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$

(C) $f(-\pi) > f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$

(D) 不能确定

7. 运用:单调性.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,且对任意 x, y 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, 则 $F(x) = f(x) - x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上().

(A) 单调增加

(B) 单调减少

(C) 先单调增加后单调减少

(D) 先单调减少后单调增加

第二单元

一、知识要点

1. 数列极限的概念;
2. 收敛数列的性质;
3. 函数极限的概念与性质;

4. 左极限、右极限及其与极限的关系;
5. 无穷小、无穷大的概念及它们之间的关系;
6. 无穷小的性质(有限个无穷小之和或积是无穷小,有界函数与无穷小的乘积是无穷小,无穷小与函数极限的关系);
7. 无穷小的比较;
8. 极限运算法则;
9. 两个重要极限;
10. 极限存在准则(夹逼准则,单调有界准则);
11. 数列极限与函数极限的关系.

二、重点

1. 极限的概念与极限运算法则;
2. 无穷小;
3. 两个重要极限.

三、目标要求

1. 识记.

- (1) 记住数列极限的 ϵ - N 定义,记住函数极限的 ϵ - δ 和 ϵ - X 定义;
- (2) 记住收敛数列的性质(极限的唯一性与收敛数列的有界性),记住极限的保号性定理;
- (3) 记住函数极限的性质(极限的唯一性和局部有界性),记住函数极限的局部保号性定理及其推论;
- (4) 记住左极限与右极限的定义及极限存在的充分必要条件是左极限与右极限均存在且相等;
- (5) 熟记无穷小、无穷大的定义及高阶、低阶、同阶、 k 阶无穷小和等价无穷小的定义及一些简单的等价无穷小,例如 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$ 及 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$ 等;
- (6) 记住无穷小有关性质,如无穷小与函数极限的关系,有限个无穷小之和或之积为无穷小,有界函数与无穷小的乘积为无穷小;
- (7) 熟记极限的四则运算法则;
- (8) 记住极限存在的夹逼准则和单调有界准则;
- (9) 熟记两个重要极限.

2. 领会.

- (1) 领会数列极限的 ϵ - N 定义中正数 ϵ 的任意性、 N 的存在性以及 $n > N$ 与

$|x_n - A| < \epsilon$ 之间的关系;

(2) 领会用数列极限的 ϵ - N 定义验证数列极限时, 只关心 N 的存在(一般情况下 N 与 ϵ 有关), 只要找到符合定义要求的一个 N 就行, 不一定要找最小的 N , 也就是说 N 不是唯一的;

(3) 领会函数极限的 ϵ - δ (或 ϵ - X) 定义中的正数 ϵ 的任意性, 正数 δ (或 X) 的存在性以及 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > Z$) 与 $|f(x) - A| < \epsilon$ 之间的关系;

(4) 领会用函数极限的 ϵ - δ 定义验证函数极限时, 只关心 δ 的存在(一般情况下 δ 与 ϵ 有关), 只要找到符合定义要求的一个 δ 就行, 也就是说 δ 不是唯一的;

(5) 领会函数在点 x_0 处的极限存在与否, 仅与函数在 x_0 附近的变化趋势有关, 而与函数在点 x_0 处有无定义及定义如何无关;

(6) 领会无穷小、无穷大与绝对值很小的数、绝对值很大的数的区别, 前者是变量, 而后者是常量(零是唯一可以作为无穷小的常数);

* (7) 领会函数无界与函数当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷大的区别: 函数 $f(x)$ 无界与区间密切相关, 如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上无界但在 $[1, 2]$ 上有界, 函数无界是指存在点列 $\{x_n\}$, 且 $|f(x_n)|$ 可以任意大, 而函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷大则是指对于任意的正数 M , 可找到点 x_0 的去心 δ 邻域, 对于一切 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$, 有 $|f(x)| \geq M$;

(8) 领会数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{|x_n|\}$ 收敛, 但反之未必成立, 如数列 $\{(-1)^n\}$;

(9) 领会收敛数列极限的唯一性, 据此, 若某数列有两个收敛到不同数值的子数列, 则该数列一定发散;

(10) 领会收敛的数列一定有界, 但反之未必成立, 并且无界的数列一定发散;

(11) 领会函数极限的局部保号性, 领会若在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 结论仍为 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$) 而非 $A > 0$ (或 $A < 0$), 考虑函数 $f(x) = |x|$ 及 $x_0 = 0$;

(12) 领会在使用极限的运算法则时, 要求参加运算的函数极限都存在, 对于商的极限运算法则, 还要注意分母的极限不能为零;

(13) 领会用极限存在的单调有界准则求极限时, 要先证明极限存在, 再求极限;

(14) 领会数列极限与函数极限的区别与联系;

(15) 领会无穷小与无穷大的关系, 尤其是当 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x) \neq 0$ 时, 才有 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大;

(16) 领会两个无穷小的代数和或积均为无穷小, 但两个无穷小的商却可能是无穷小, 也可能是无穷大或极限为有限数.

3. 运用.

(1) 会用数列极限的 $\epsilon-N$ 定义验证一些简单的极限, 如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+3} = \frac{3}{2}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ 等};$$

(2) 会用收敛数列的有界性和极限的唯一性判定某些数列发散;

(3) 会用函数极限的 $\epsilon-\delta$ 和 $\epsilon-X$ 定义验证某些简单的极限式, 如验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$;

(4) 会用极限的运算法则及两个重要极限求极限;

(5) 会用结论“极限存在的充要条件是左极限与右极限存在且相等”来求极限或证明极限不存在, 如讨论分段函数在分段点处的极限及形如 $a^{\frac{1}{x-x_0}}$ 的函数在点 x_0 处的极限等;

(6) 会用极限存在的单调有界准则及夹逼准则证明极限存在并求极限;

(7) 会用等价无穷小代换法简化极限运算, 但必须注意, 应该用分子或分母的整体或部分因式的等价无穷小进行代换;

(8) 会比较无穷小的阶, 并利用无穷小的性质求极限;

(9) 会利用求函数极限的方法来求数列的极限.

4. 分析与综合.

能综合运用函数与极限的知识, 解决一些与极限有关的问题. 例如求函数

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x + e^x}{1 + x e^x} \text{ 的分段表达式; 设 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} \text{ (} n \text{ 为正整数),}$$

试确定 a, b 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 都存在, 等等.

四、目标检测题

目标检测题(A)

1. 领会: 极限存在的充要条件.

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases} \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在的原因是 ().}$$

(A) $f(0)$ 无定义

(B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在

(C) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 不存在

(D) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 都不存在

2. 领会: 极限的概念.

下列极限存在的是().

(A) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{x^2}$

(B) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x - 1}$

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}}$

(D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$

3. 领会: 无穷小、无穷大与无界函数.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 是().

- (A) 无穷小 (B) 无穷大 (C) 无界函数 (D) 有界函数

4. 领会: 无穷小的概念.

下列变量在给定的变化过程中为无穷小的是().

(A) $2^x - 1$ ($x \rightarrow 0$)

(B) $\frac{\sin x}{x}$ ($x \rightarrow 0$)

(C) $\frac{1}{(x-1)^2}$ ($x \rightarrow 1$)

(D) $2^{-x} - 1$ ($x \rightarrow 1$)

5. 运用: 极限运算.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^3 - (x-1)^3}{x^2 + 3x + 5} = ().$$

- (A)
- ∞
- (B) 0 (C) 1 (D) 9

6. 运用: 重要极限.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 4x + 3} = ().$$

- (A)
- $\frac{1}{2}$
- (B) 1 (C) 0 (D)
- ∞

7. 运用: 重要极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{4+x} = ().$$

- (A)
- e^{-1}
- (B)
- e^4
- (C)
- e
- (D)
- e^{-4}

8. 分析综合: 无穷小的比较.

若 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \cos^3 x \sin^4 x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则有 $n = ().$

- (A) 2 (B) 6 (C) 9 (D) 3

9. 运用: 绝对值函数的极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = ().$$

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 不存在

10. 运用: 等价无穷小概念.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x^3 + x^2$ 与 x^k 等价, 则 $k = ().$

- (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 3