ZHONGXUE 1+1

北京朗曼教学与研究中心教研成果

•人教统编版•

中学1+1

宋伯涛 总主编

高三数学同步讲解与测试（下）

■本系列丛书英语听力部分请登陆网站
http://www.lmedu.com.cn

天津人民出版社

朗曼文化

中学1+1

高三年级

语文 人教统编版（上、下）

数学 人教统编版（上、下）（选修2）

英语 人教统编版（上、下）

物理 人教统编版（全一册）

化学 人教统编版（全一册）

生物 人教统编版（全一册）

地理 人教统编版（全一册）

历史 人教统编版（全一册）

责任编辑◇王 敏 张春龙
封面设计◇福瑞来书装

ISBN 7-201-04439-7

9 787201 044392 >

ISBN 7-201-04439-7
定价：15.80元

ZHONGXUE 1+1

北京朗曼教学与研究中心教研成果

中学 1+1

高三数学同步讲解与测试(下)

张志朝 锁有贵 主编

天津人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学1+1·高三数学同步讲解与测试·下/宋伯涛总主编;张志朝分册主编.—天津:天津人民出版社,2004.1
ISBN 7-201-04439-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①宋… ②张… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.303

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第028884号

中学1+1
高三数学同步讲解与测试(下)

张志朝　锁有贵　主编

*

天津人民出版社出版
出版人:刘晓津
(天津市西康路35号　邮政编码:300051)
北京市昌平长城印刷厂印刷　新华书店发行

*

2005年11月第3版　2005年11月第1次印刷
32开本　890×1240毫米　14印张　字数:423千字
定价:15.80元
ISBN 7-201-04439-7

敬告读者

《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书汇集了北京朗曼教学与研究中心最新教学科研成果。值此再版之际，北京朗曼教学与研究中心向全国千百万热心读者深表谢意！

在购买《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书时，请读者认准封面上“**北京朗曼教学与研究中心教研成果**”“**宋伯涛总主编**”等字样，以防假冒。

近年来，发现个别出版物公然冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌或大量盗用书中内容。在此，本中心**严正声明：凡冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌，盗用书中内容的行为，均为侵犯知识产权行为，本中心将根据有关法规追究侵权者的法律责任。**

保护知识产权，打击盗版、盗用行为是每一个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现有侵权行为，请及时告知北京朗曼教学与研究中心，本中心对您的正直行为表示由衷的感谢。

如您在使用本书过程中发现有疏漏之处或疑难问题，可来信与本中心联系，我们将悉心听取您的批评和建议，竭诚为您排忧解难。让我们携手共勉，共同打造朗曼光辉的形象！

本书在全国各地均有销售，您也可以来信邮购。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱，北京朗曼教学与研究中心**蒋雯丽**（收）；邮编：100101。

联系电话：010－64925885；64925887 转 603，605。

另外，北京朗曼教学与研究中心新建大型教学网站“**朗曼 1+1 网**”已于 **2004 年 5 月 18 日**正式开通。网站科目齐全，内容丰富，欢迎登录！

轻松浪漫的学习旅程，将从点击“朗曼 1+1 网”开始！

网址：http://www.lmedu.com.cn

再版前言

本书以考试大纲为指导，按照高考要求分专题编写，对高考的重点、难点等逐一进行讲解，内容详尽，条理清晰，分析透彻，所选例题均来自近几年的各高考卷和各地模考中的精华，所涉及内容主要是考试必须掌握的**基础知识、知识运用、思维方法、解题方法**等，其中对例题的分析处理十分到位，不仅有恰到好处的思路点拨与规范解答，更重要的是解题后的说明，它是一线教师解题的体会和感受，是解题经验的总结。因此也可以说它是从解题实践中具体概括出来的精髓。在说明中，言简意赅地揭示巧思的思维过程；如何灵活地选用数学方法；对于可转化或引申的题目，给出其转化或引申的形式及其解法；对题中可能出现的错解予以指出等等。它将给大家以启示，帮助大家领悟命题者的意图，使大家做到立足基础，抓住关键，突破难点，研究方法，以一题代一类，真正使做到举一反三，触类旁通，从而达到跳出题海、启迪思维的效果。同步测试部分根据各专题所讲的内容、方法对基础知识、重点难点、知识应用进行针对性的巩固训练。其中选用了目前各地较为常用的题型，增加了一些体现近几年高考命题方向的新题，并补充了一些与生产生活密切相关的应用题，可以说题型十分丰富，且综合性强，旨在帮助学生巩固知识，提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中，应结合教科书，努力掌握知识点的各种用法及注意事项，对某些重点难点要进行仔细

的分析、研究，结合例题，做到深刻理解与牢固掌握。做同步练习时，要结合所讲解内容进行独立思考，首先考虑应选择何种解题思路与策略，然后实施解题，并注意解题的规范性，解题结束后可与题解对照，弄懂弄通为什么是这个答案而不是那个答案？为什么这样解而不是那样解？还可以怎样解？怎样才对？从一个点进行散发性联想思维。还应对某些重点题目进行反复的再思考、再分析、再总结。有问题主动询问，及时解决。

希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助，虽然我们兢兢业业，勉力为之，但因水平有限，难免有错漏之处，诚望批评指正，以利再版时修改和完善。

宋伯涛

2005 年 10 月于北师大

读者反馈信息表

《高三数学同步讲解与测试(下)》是北京朗曼教学与研究中心《中学1+1》系列丛书之一,自首发以来深受广大读者的欢迎,许多教师及中学生纷纷来信给予本系列丛书以高度评价,写了读后感及书评,提出了许多宝贵建议,对本中心的教研工作给予极大的支持,我们在此深表谢意。

我们欢迎广大读者继续与我们联系,把你们的评价、建议及疑难问题填在表上寄给我们,我们将与你及时取得联系,努力采纳你的好的建议,使我们的丛书更加完善,同时帮助你解决学习中的问题。来信请寄:北京市朝阳区亚运村邮局89号信箱,北京朗曼教学与研究中心数学编辑部(收),邮编:100101。(此表可复制填写)

姓　名		身　份		所任(在)年级	
所在学校					
联系地址					
电话				邮编	
意见和建议					

疑难问题	
备注	

目录 CONTENTS

第二篇　专题精讲

第1讲　运用函数思想解题

函数是高中数学的重要内容，函数思想是最基本的数学思想，它的实质是剔除问题的非数学特征，抽象出数学本质，建立函数关系，运用函数的概念、图象、性质去解决问题.

1. 利用函数概念

理解函数的概念，就是掌握函数的三要素（对应法则、定义域和值域），其中对应法则是关键，即对于函数定义域中每一个元素，按照某种对应法则，在函数的值域中都有唯一确定的一个元素与之对应.

【例1】 已知函数 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 且 $A=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in[a,b]\}$，$B=\{(x,y)\mid x=1\}$，则 $A\cap B$ 中所含元素的个数是　　(　　)

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 0或1　　　　D. 0，1或2

分析：应用函数的定义求解.

解：因为在函数的定义域内，对每一个自变量 x，都有唯一确定的函数值 y 与之相对应，

故当 $1\notin[a,b]$ 时，$A\cap B=\varnothing$；

当 $1\in[a,b]$ 时，$A\cap B=\{(1,f(1))\}$ 含一个元素，选C.

说明：解函数概念题，要深刻理解函数是建立在非空数集 A、B 上的映射：$f:A\to B$，其中 A 为定义域，值域 $C\subseteq B$.

【例2】 已知方程 $ax^2+2(2a-1)x+4a-7=0$ 中，a 为正整数，问 a 取何值时，方程至少有一个整数根.

分析：若用求根公式解出 $x=\dfrac{1-2a\pm\sqrt{3a+1}}{a}$ 来讨论 x 的整数值，将十分繁锁. 不妨把 a 表成 x 的函数并用其概念来试试.

解：将原方程改写为

$a(x+2)^2=2x+7$.　　　　(＊)

显然，当 $x=-2$ 时，(＊)式不成立.

$\therefore\ a=\dfrac{2x+7}{(x+2)^2}$, $(x\neq-2)$.　　　　(＊＊)

若要 a 为正整数，则须　$2x+7\geqslant(x+2)^2$.

解得　$-3\leqslant x\leqslant 1$　$(x\in\mathbf{Z}, x\neq-2)$,

$\therefore$　x 只能在 $-3,-1,0,1$ 中取值.

代入(＊＊)式中可知，仅当 $x=-3$, $x=-1$ 和 $x=1$ 时能保证 a 为正整数. 此时分别有 $a=1$ 和 $a=5$.

故当 a 为 1 或 5 时原方程至少有一个整数根.

说明：本来原方程中的变元是 x，a 为参数，解题过程中我们“反客为主”，将方程表示成为 a 的函数关系式(＊＊)，这种将参数和未知数等同看待的思想是函数思想的特征之一.

2. 利用函数的奇偶性

奇偶性是函数的重要性质，常利用它进行区间过渡，即将不同区间的问题转化到同一区间中进行研究，从而达到化难为易之目的.

【例 3】　已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，它在区间 $[0,1)$ 上单调递减，且 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求实数 a 的取值范围.

分析：将 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$ 变形为 $f(1-a)<-f(1-a^2)$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以有 $f(1-a)<f(a^2-1)$. 利用函数的单调性可求解.

解：$\because$　$f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$,

$$\therefore\ \begin{cases}-1<1-a<1,\\ -1<1-a^2<1.\end{cases}$$

$$即\begin{cases}0<a<2,\\ -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}.\end{cases}\quad\therefore\quad 0<a<\sqrt{2}\quad(1)$$

又 $\because$　$f(x)$ 是奇函数，且 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$,

$\therefore$　$f(1-a)<-f(1-a^2)$，即 $f(1-a)<f(a^2-1)$.

$\because$　$f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上也单调递减.

$\therefore$　$f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上单调递减.

$\therefore$　$1-a>a^2-1$. 解得　$-2<a<1$. (2)

由(1)(2)得：$0<a<1$.

说明：奇函数在关于原点对称的区间上具有相同的单调性，偶函数在关于原点对称的区间上具有相反的单调性.

对于抽象函数式不等式，通常利用单调性转化为自变量有关的不等式来求解.

【例 4】 证明不等式$\frac{x}{1-2^x}<\frac{x}{2}(x\neq0)$.

分析：将原不等式变形为：$\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}<0(x\neq0)$，构造函数 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$，运用函数的奇偶性证明 $f(x)<0(x\neq0)$即可.

证明：令 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}(x\neq0)$.

容易验证 $f(x)-f(-x)=0$，故 $f(x)$为偶函数.

$f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}=\frac{x(1+2^x)}{2(1-2^x)}$.

当 $x>0$ 时，因 $1-2^x<0$，故 $f(x)<0$.

于是当 $x<0$ 时，$f(x)=f(-x)<0$.

故当 $x\neq0$ 时，恒有 $f(x)<0$，即原不等式成立.

说明：本题若用不等式的常用方法进行证明，则必须对 x 进行分类讨论，证明过程较烦.利用偶函数的轴对称性和奇函数的中心对称性，常能使所求解的问题避免复杂的讨论.

【例 5】 设$(3x^4+7x^3+4x^2-7x-5)^5(3x^4-7x^3+4x^2+7x-5)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{40}x^{40}$，求 $a_0+a_2+\cdots+a_{40}$.

分析：构造函数 $f(x)=(3x^4+7x^3+4x^2-7x-5)^5(3x^4-7x^3+4x^2+7x-5)^5$，应用函数 $f(x)$的奇偶性，得到相关结论.

解：设 $f(x)=(3x^4+7x^3+4x^2-7x-5)^5(3x^4-7x^3+4x^2+7x-5)^5$ 易知 $f(x)$为偶函数，则 $a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{39}=0$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(1)&=(3+7+4-7-5)^5(3-7+4+7-5)^5=1024\\&=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{40}=a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{40}.\end{aligned}$$

$\therefore\quad a_0+a_2+\cdots+a_{40}=1024$.

说明：本题是与二项式定理相关的问题，也可以通过赋值法来求解，但构造一个函数，应用该函数的奇偶性来解，则较简捷.

3. 利用函数的单调性

单调性是函数的重要性质，某些数学问题，通过函数的单调性，可将函数值间的关系转化为自变量间的关系进行研究，从而达到化繁为简的目的，特别是在比较数(或式)的大小、证明不等式、求值(或最值)、解方程(组)等方面应用十分广泛.

【例 6】 已知 $y=\log_a(2-ax)$在$[0,1]$上是 x 的减函数，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(0,2)$　　D. $[2,+\infty)$

分析:由题意,知 $u=2-ax$ 是 x 的减函数,又 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数,所以 $y=\log_a u$ 是 u 的增函数,从而由函数的单调性得到 a 的取值范围.

解:显然 $a>0$ 且 $a\neq1$,易得函数定义域为 $x<\dfrac{2}{a}$,又函数在 $[0,1]$ 上有意义,则 $\dfrac{2}{a}>1$,即 $a<2$,令 $u=2-ax$,以下分类讨论:

(1)若 $0<a<1$,则 $u=2-ax$ 在 $[0,1]$ 上递减,

则 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上递增.

(2)若 $1<a<2$,则 $u=2-ax$ 在 $[0,1]$ 上递减,

则 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上递减.

综上所述,应选择 B.

说明:如果 y 是 u 的函数,而 u 又是 x 的函数,即 $y=f(u)$,$u=g(x)$ $(x\in[a,b]$,$u\in[m,n])$,那么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$ $(x\in[a,b])$ 叫做 f 和 g 的复合函数,u 叫做中间变量,它的取值范围是 $g(x)$ 的值域.

讨论复合函数单调性的依据是:设 $y=f(u)$,$u=g(x)$,$(x\in[a,b]$,$u\in[m,n])$ 都是单调函数,则 $y=f[g(x)]$ 也是单调函数,并且当外层函数 $f(u)$ 在 $[m,n]$ 上为增函数时,复合函数与内层函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有相同的增减性;当外层函数 $f(u)$ 在 $[m,n]$ 上为减函数时,复合函数与内层函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有相反的增减性.

本题也可以通过取特殊值 $a=\dfrac{1}{2}$,$a=2$. 可以排除 A、C、D,选 B.

【例 7】 解不等式:$(x^2-20x+38)^3+4x^2+152<x^3+84x$.

分析:将原不等式变形为:

$(x^2-20x+38)^3+4(x^2-20x+38)<x^3+4x$,

构造函数 $f(x)=x^3+4x$,应用其单调性化简并求其解.

解:原不等式变形为

$(x^2-20x+38)^3+4(x^2-20x+38)<x^3+4x$.

令 $f(x)=x^3+4x$,原不等式即为:

$f(x^2-20x+38)<f(x)$.　　(*)

因为函数 $f(x)=x^3+4x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上单调递增,所以不等式(*)与

$x^2-20x+38<x$ 同解.

解此不等式,得　$2<x<19$.

说明:本题若展开、化简求其解,则较烦. 这里运用函数的单调性,将函数值不等式 $f(X)<f(x)$,转化为其同解不等式 $X<x$ 来解,使问题化繁为简. 其中根据题

目的特殊性构造出恰当的函数是化简的关键.

【例 8】 证明:对于一切大于 1 的自然数 n,恒有 $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{1+2n}}{2}$.

分析:对这类问题,我们可以看成是变量为自然数 n 的函数,又原不等式等价于 $\dfrac{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)}{\sqrt{1+2n}}>\frac{1}{2}$.

证明:令 $f(n)=\dfrac{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)}{\sqrt{1+2n}}$,

则 $f(n+1)=\dfrac{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{\sqrt{1+2(n+1)}}$ $(n=2,3,\cdots)$,

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\sqrt{1+2n}}{\sqrt{2n+3}}=\frac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$$

$$=\frac{2(n+1)}{\sqrt{4(n+1)^2-1}}>1(n=2,3,\cdots).$$

∴ $f(n+1)>f(n)$.

即 $f(n)$ 是单调增函数 $(n=2,3,\cdots)$.

又 $f(2)=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{16}{45}}>\sqrt{\frac{16}{64}}=\frac{1}{2}$,

∴ 当 $n=2,3,\cdots$ 时,恒有 $f(n)>\frac{1}{2}$.

故 $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{1+2n}}{2}(n=2,3,\cdots)$.

说明:对有关数列问题及涉及以自然数 n 为变量的问题,常可视为函数 $f(n)$,然后同 $f(x)$ 一样判定其单调性. 这里用的是比值法判定其单调性.

【例 9】 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}$,其中 $a\in\mathbf{R}$,n 是给定的不小于 2 的自然数,如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上有意义,求 a 的取值范围.

分析:要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上有意义,即要求当 $x\leqslant 1$ 时,不等式 $\dfrac{1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}>0$ 恒成立.

要求 a 的取值范围，分离参 a，得

$$a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right],$$

构造新的函数，$g(x)=-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right],x\in(-\infty,1]$.

从而应用 $g(x)$ 的单调性，确定 a 的取值范围

解：依题意，当 $x\leqslant 1$ 时，不等式 $1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a>0$ 恒成立.

$\therefore\ a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]=g(x)$，显然 $g(x)$ 为增函数.

当 $x\leqslant 1$ 时，有 $g(x)_{\max}=g(1)=-\frac{n-1}{2}$，$\therefore\ a>-\frac{n-1}{2}$.

说明：要使一个变量大于一个函数在某个确定区间上的所有的函数值，实际只需要这个变量大于该函数在某个确定区间上的最大值即可. 而函数的最值往往又可以通过函数单调性来确定.

4. 利用函数周期性

周期性是函数的重要性质，函数的周期性既是函数解析式的代数变换，又是函数图象的几何变换. 从函数图象角度来阐释，即间隔周期时间，图象重复一次，所以函数的周期性与函数对称性一样都是函数图象的特征. 从而要研究一个函数的性质，只需要研究在某个周期内该函数的性质即可.

【例 10】 已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=2^x$. 求 $f(\log_{\frac{1}{2}}23)$ 的值.

分析：由 $f(x+2)=f(x)$ 知 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，关键是利用函数的周期性及奇偶性将自变量转化到已知区间 $(0,1)$ 内求解.

解法一：由已知知 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，

$$\therefore\ f(\log_{\frac{1}{2}}23)=f(\log_{\frac{1}{2}}23+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16})$$

$$=f(\log_{\frac{1}{2}}\frac{23}{16}).$$

而 $1<\frac{23}{16}<2$，$\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数，

$$\therefore\ -1<\log_{\frac{1}{2}}\frac{23}{16}<0,0<-\log_{\frac{1}{2}}\frac{23}{16}<1.$$

又 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=2^x$.

$$\therefore\ -f(\log_{\frac{1}{2}}\frac{23}{16})=f(-\log_{\frac{1}{2}}\frac{23}{16})=2^{-\log_{\frac{1}{2}}\frac{23}{16}}=\frac{23}{16}.$$