真正高考

精选典题　专家评析　闪电式提高

各个击破

圆100万学子清华北大梦！！

【审订】全国著名特高级教师
【主编】金　诚

打造学科状元

数学·三角函数与平面向量

安徽人民出版社

真正高考

精选典题　专家评析　闪电式提高

各个击破

圆100万学子清华北大梦！！

主　　编：金　诚
本册主编：贺顺炳　张劲松
编　　者：刘国权　康　轩　郭小亮
崔文海　孙道琦　江海洋

数学·三角函数与平面向量

安徽人民出版社

责任编辑：王世超　周子瑞
装帧设计：秦　超

图书在版编目(CIP)数据

真正高考·各个击破　数学：普通高考专题解读/金诚主编. 一合肥：安徽人民出版社，2006
ISBN 7-212-02826-6

Ⅰ. 真…　Ⅱ. 金…　Ⅲ. 数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 031012 号

真正高考·各个击破　数学·三角函数与平面向量

金　诚　主编

出版发行：安徽人民出版社
地　　址：合肥市金寨路 381 号九州大厦　邮编：230063
经　　销：新华书店
制　　版：合肥市中旭制版有限责任公司
印　　刷：合肥杏花印务有限公司
开　　本：880×1230　1/32　印张：51　字数：150 万
版　　次：2006 年 5 月第 1 版　2006 年 5 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 7-212-02826-6
定　　价：60.00 元（共 6 册）
印　　数：00001—15000

前　言

《真正高考》系列丛书之《数学》，按照国家最新考试大纲和最新教学大纲的要求编写，为便于教师指导、便于学生复习，均酌情按照知识的系统性编排.

全套书共分六册

第一册《选择题解法》　　第二册《函数、不等式、导数》

第三册《三角函数与平方向量》　　第四册《解析几何》

第五册《主体几何与空间向量》　　第六册《数列、概率与统计》

栏目设置：

△考试内容及知识纲络：展示在每一章之首，使学生明确本章要掌握的知识范围.

△考纲要求：依据新的考试说明，对每一小节提出高考的具体要求，使学生明确每个知识点应达到的水平.

△知识要点：使学生明确本节内容主要知识点，便于学生查阅与记忆.

△典例解析：分析典型例题，尽量覆盖知识点和解题技巧与方法，力求上升为数学思考和数学方法，精选与本节相关的近两、三年高考题进行重点解析、创新，力求自然消化.

△基础达标训练、能力提升训练：收集了典型、新颖、考查能力的部分试题，使学生通过解题训练理解知识，掌握方法，形成能力，为高考做好充分准备.

△本章测试：编写少而精，新而优的题目，对本章相关知识点的掌握进行检测，便于查缺补漏，点点过关，步步为营.

本书在编写过程中尽量体现"一题多解"，"一法多用"注重对问题的点拨和解决问题后的点评，使学生能够学到举一反三和触类旁通的数学内容，努力体现化归数形结合，分类讨论，归纳猜想等数学的重要思想和方法，有助于学生把知识转化为能力，由能力上升为思想，重点突出，难点分散，便于学生的理解和掌握.

本书既适合高三学生专项强化使用，又适合于高中同步学习的强化及提高，是一本实用性的备考助学用书，尽管我们做了很大的努力，但由于客观条件所限，书中难免有疏漏不足之处，敬请广大读者批评指正.

编者

《真正高考》丛书编委会

Contents

目 录

Contents

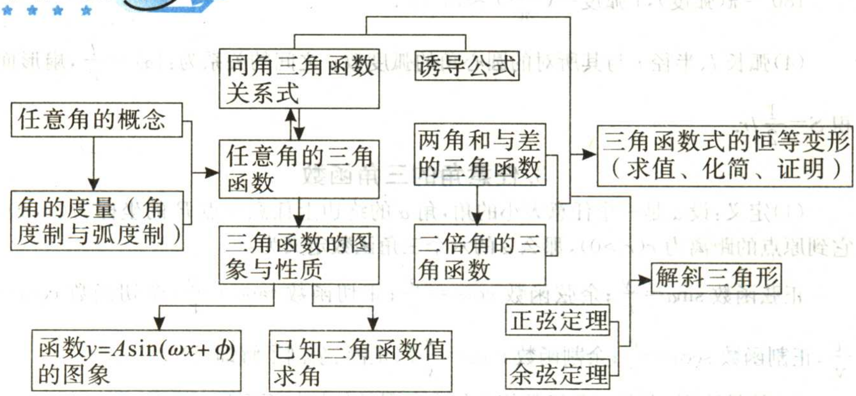
目录

第一章 三角函数

本章考试内容及要求

考纲内容	能力层次	考纲要求
三角函数概念公式	掌握	任意角的正弦、余弦、正切的定义，用三角函数线表示正弦、余弦和正切；同角三角函数的基本关系式；正弦、余弦的诱导公式
和差倍公式	掌握	通过公式的推导，了解它们的内在联系，从而培养逻辑推理能力
图象与性质	掌握	会用三角函数线画正弦函数，正切函数的图象，由诱导公式画余弦函数的图象；理解它们的性质；会用“五点法”
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象	理解	A、ω、φ的物理意义
	掌握	用“五点法”画函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的简图
三角最值	掌握	利用三角知识求最值
正余弦定理	掌握	正弦定理、余弦定理，并能运用它们解斜三角形
应　用	掌握	运用所学三角知识解决实际问题

本章知识网络



§1.1 角的概念与任意角的三角函数

考纲要求

理解任意角的概念，理解弧度的意义，能表示与α终边相同的角，掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义，了解余切、正割、余割的定义，掌握单位圆中的三角函数，及三角函数在各象限的符号.

知识要点

1. 角的概念的推广

(1)按旋转方向的不同，角可分为正角、负角及零角.

(2)在直角坐标系内，使角的顶点与坐标原点重合，角的始边在x轴正半轴上，按终边所在位置的不同，角可分为象限角和轴线角(坐标轴上的角).

(3)终边相同的角：所有与角α终边相同的角，可以用式子$k\cdot 360°+\alpha(k\in \mathbf{Z})$来表示.

2. 角的度量

(1)角度制：周角的$\frac{1}{360}$叫做1度角，用度、分、秒作量角单位的制度叫角度制.

(2)弧度制：等于半径长的圆弧所对的圆心角叫1弧度的角，用弧度作量角单位的制度叫弧度制.

(3)角度制与弧度制间的换算关系

$180°=\pi$(弧度)，1弧度$=(\frac{180}{\pi})°\approx 57°18'$.

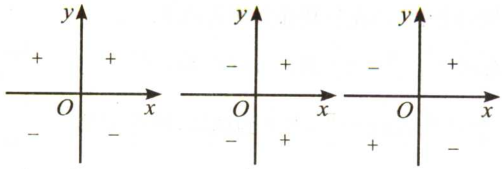
(4)弧长l、半径r与其所对的圆心角的弧度数α之间的关系为：$|\alpha|=\frac{l}{r}$，扇形面积$S=\frac{1}{2}lr$.

3. 任意角的三角函数

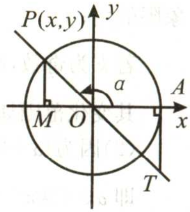
(1)定义：设α是一个任意大小的角，角α的终边上任意一点P的坐标为(x,y)，它到原点的距离为$r(r>0)$，那么α的六个三角函数定义为：

正弦函数$\sin\alpha=\frac{y}{r}$；余弦函数$\cos\alpha=\frac{x}{r}$；正切函数$\tan\alpha=\frac{y}{x}$；余切函数$\cot\alpha=\frac{x}{y}$，正割函数$\sec\alpha=\frac{r}{x}$；余割函数$\csc\alpha=\frac{r}{y}$.(正割、余割了解即可)

(2)符号法则：在各三角函数值在每个象限的符号如下图所示.



sinα 与 cscα　　cosα 与 secα　　tanα 与 cotα



(3)正弦线、余弦线、正切线：设任意角 α 的终边与单位圆(圆心在原点，半径等于单位长度的圆)相交于点 $p(x,y)$，那么 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$. 如图，单位圆中的有向线段 MP、OM、AT 分别叫做角 α 的正弦线，余弦线、正切线.

典例剖析

例 1 集合 $M=\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$则有(　　)

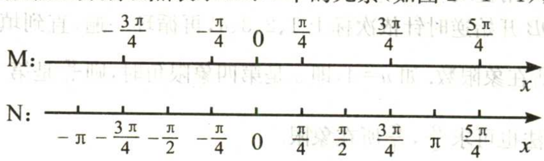
A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\phi$

解析 选 C(方法 1)将集合 M、N 变形为：

$M=\{x\mid x=\frac{\pi}{4}(2k+1),k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{\pi}{4}(k+2),k\in\mathbf{Z}\}$

由于 $2k+1\in\{$奇数$\}$，$k+2\in\{$整数$\}$　故 $M\subsetneqq N$，选 C.

(方法 2)在数轴上分别以点表示 M、N 中的元素(如图 2-1-1)，可见 $M\subsetneqq N$.



(方法 3)用筛选法，由 $\frac{\pi}{4}\in M$ 且 $\frac{\pi}{4}\in N$，筛去 D，再由 $\frac{\pi}{2}\in N$，但 $\frac{\pi}{2}\notin M$，筛去 A、B，故选 C.

(方法 4)M 是终边在四个象限的角平分线上所有点的集合，N 是终边在 x 轴、y 轴以及四个象限的角平分线上的所有角的集合，故 $M\subsetneqq N$.

点评 角的集合之间的包含关系问题，要注意将表示角的集合化简整理找出它们的异同，然后根据它们的不同点，确定它们的包含关系，也可以利用数形结合法解之，如方法 2，方法 4.

例 2 已知 α 是第二象限的角.

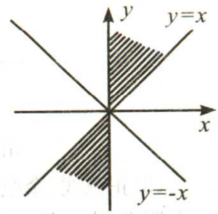
(1)指出 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限，并用图形表示其变化范围；

(2)若 α 同时满足条件 $|\alpha+2|\leqslant4$，求 α 的取值区间.

点评 (1)根据象限角的定义，利用不等式的性质可得.

(2)解不等式组，利用数轴找公共部分即为所求.

解析 依题意，$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

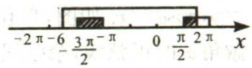


(1)所以 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，若 k 为偶数，则$\frac{\alpha}{2}$是第一象限的角；

若 k 为奇数，则$\frac{\alpha}{2}$是第三象限的角；

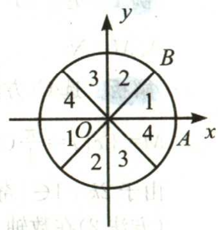
其变化范围如右图中阴影部分所示(不含边界).

(2)因为$|\alpha+2|\leqslant4$，所以$-6\leqslant\alpha\leqslant2$，

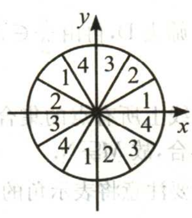


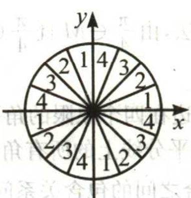
即 $\alpha\in(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi)\cap[-6,2]=[-\frac{3\pi}{2},-\pi]\cup(\frac{\pi}{2},2]$.

点评 除象限角、终边相同的角以外，还要注意理解区间角的概念，并能掌握好 α 角的取值范围与$\frac{\alpha}{2}$角的取值范围间的相互关系. 如下：



已知角 α 是第 $n(n=1,2,3,4)$ 象限的角，问$\frac{\alpha}{2}$是第几象限的角？如图所示，用直线 $y=x,y=-x$ 及两坐标轴，把单位圆8等分，从$\angle AOB$开始逆时针依次标上1、2、3、4，再循环一遍，直到填满为止，则有标号 n 的就是$\frac{\alpha}{2}$所在象限数. 如 $n=4$，即 α 是第四象限角时，则$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限的角，用同样的方法也可求$\frac{\alpha}{3}$，$\frac{\alpha}{4}$所在象限.





上边左图是求$\frac{\alpha}{3}$的方法，右图是求$\frac{\alpha}{4}$的方法.

例 3 (1)使 $\sin x\leqslant\cos x$ 成立的 x 的一个变化区间是(   )

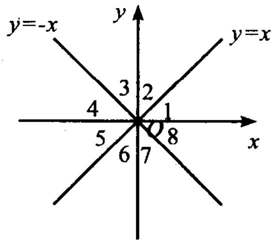
A. $[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$　　B. $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$　　C. $[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$　　D. $[0,\pi]$

(2)满足 $\tan\alpha\geqslant\cot\alpha$ 的角 α 的一个取值范围是(   )

A. $(0,\frac{\pi}{4}]$　　B. $[0,\frac{\pi}{4}]$　　C. $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$　　D. $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

点拨 在三角问题中,须要比较 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$,或者 $\tan\theta$ 与 $\cot\theta$ 的大小及确定 $\sin\theta+\cos\theta$ 的符号.常用的方法是利用三角函数的图象或单位圆上的三角函数线来解决,但比较费时、繁琐.这里介绍一种方法,能快捷解决此类问题.

在平面直角坐标系内作直线 $y=x$ 和 $y=-x$,这两条直线和 x 轴、y 轴把平面分成八个区域,并将这些区域按逆时针方向标上序号 1,2,3,……8(如图)



(1)$\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 大小关系:

①当 θ 的终边落在直线 $y=x$ 上方时,$\sin\theta>\cos\theta$.

②当 θ 的终边落在直线 $y=x$ 下方时,$\sin\theta<\cos\theta$

(2)$\sin\theta+\cos\theta$ 符号制定:

①当 θ 的终边落在直线 $y=-x$ 上方时,$\sin\theta+\cos\theta>0$.

②当 θ 的终边落在直线 $y=-x$ 下方时,$\sin\theta+\cos\theta<0$.

(3)$\tan\theta$ 与 $\cot\theta$ 大小关系:

①当 θ 的终边落在 2、4、6、8 区域时,$\tan\theta>\cot\theta$.

②当 θ 的终边落在 1、3、5、7 区域时,$\tan\theta<\cot\theta$.

(1)选 A,(2)选 C.

(1)由图知:使 $\sin x\leqslant\cos\theta$ 成立的 x 的终边将落在直线 $y=x$ 的下方,或者直线 $y=x$ 上,故选 A.

(2)由图知:满足 $\tan\alpha\geqslant\cot\alpha$ 的角 α 的终边落在 2、4、6、8 区域内,或者落在直线 $y=\pm x$ 上,故选 C.

这类问题既是三角函数常见问题又是高考的重点.数形结合是基本方法,利用上面结论解决此类问题显得更加明快.

(1)已知角 α 的终边与角 -690° 的终边关于 y 轴对称,求 α.

(2)已知角 β 的终边与角 -690° 的终边关于原点对称,求其中绝对值最小的 β.

对称是角与角的终边常见的一种关系,常用的有以下四种:

(1)α 与 β 终边关于 x 轴对称,

则 $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$;

(2)α 与 β 终边关于 y 轴对称,

则 $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$;

(3)α 与 β 终边关于原点对称,

则 $\alpha-\beta=(2k+1)\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$;

(4)α 与 β 的终边在一条直线上,

则 $\alpha-\beta=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

解析 (1)$-690^\circ=-720^\circ+30^\circ=-2\times360^\circ+30^\circ$,

∴$-690°$的终边与$30°$的终边相同，

则 $\alpha=(2k+1)\cdot 180°-30°, k\in\mathbf{Z}$,

即 $\alpha=k\cdot 360°+150°, k\in\mathbf{Z}$.

(2)∵$-690°$的终边与$30°$的终边相同，∴$\beta-30°=(2k+1)\cdot 180°$

∴$\beta=30°+(2k+1)\cdot 180°, k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=-1$ 时，取得绝对值最小的角 β'，

∴$\beta'=-150°$.

点评 对称问题是数学中的一类重要问题，应重点掌握，并明确各对称角之间关系的来源.

例5 (1)判断下列各式的符号

①$\dfrac{\tan(-3)\cot 5}{\sec 8}$，②已知$|\cos\theta|=-\cos\theta$且$\tan\theta<0$，

则$\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}$的符号.

(2)判断下列各式中角α所在象限

①$\sin\alpha\tan\alpha<0$，②$\tan\alpha>0$且$\sin\alpha+\cos\alpha>0$.

解析 (1)①∵ 3,5,8分别是第三、四、二象限的角，∴$\tan(-3)>0$，$\cot 5<0$，$\sec 8=\dfrac{1}{\cos 8}<0$，∴原式$>0$.

②由$|\cos\theta|=-\cos\theta$，得$\cos\theta\leqslant 0$，又$\tan\theta<0$

∴θ的终边在第二象限，

∴$-1<\cos\theta<0, 0<\sin\theta<1$.

视$\cos\theta$，$\sin\theta$为弧度数，故$\cos\theta$是第四象限的角，$\sin\theta$是第一象限的角.

∴$\sin(\cos\theta)<0$，$\cos(\sin\theta)>0$，∴$\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}<0$

(2)①∵$\sin\alpha\tan\alpha<0$

∴$\begin{cases}\sin\alpha>0\\ \tan\alpha<0\end{cases}$或$\begin{cases}\sin\alpha<0\\ \tan\alpha>0\end{cases}$

∴α的终边在第二或第三象限.

错解 ∵$\sin\alpha\tan\alpha<0$，∴$\sin\alpha\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}<0$ ∴$\cos\alpha<0$

∴α的终边在第二或第三象限或终边在x轴的负半轴上.

当$\cos\alpha=-1$时，$\sin\alpha$、$\tan\alpha$的值均为0，不合题意，应舍去.

②∵$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>0$，∴$\sin\alpha\cdot\cos\alpha>0$，又∵$\sin\theta+\cos\theta>0$，

∴$\begin{cases}\sin\alpha>0\\ \cos\alpha>0\end{cases}$ ∴α的终边在第一象限.

另解：∵$\tan\alpha>0$ ∴α的终边在第一、三象限.

又∵$\sin\alpha+\cos\alpha>0$ ∴α 的终边在直线 $y=-x$ 上方.

所以同时满足上述两个条件的 α 的终边在第一象限.

点评 本题考查三角函数值在各象限的符号,(1)中两小题是根据角所在象限,确定各个三角函数值的符号,进而确定三角函数式的符号,当用弧度数表示的角不好判定所在象限时,要对其估算出角度后来判定.(2)中两小题是根据三角函数式的符号,确定角所在象限或求出角所在范围.(1)(2)是三角函数的值在各象限符号问题的两个方面.

例6 求分别符合下列条件的各角的集合:

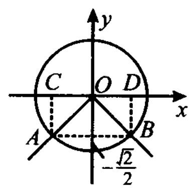
(1)$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;(2)$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;(3)$\tan\alpha=\sqrt{3}$.

点拨 画单位圆,分别标出所求的角的三角函数线,利用终边相同的角,写出所求的各角.

解析 (1)$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,由图(1)得

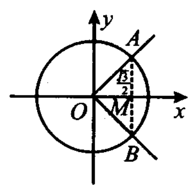
$CA=DB=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴$\{\alpha|\alpha=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.



(1)

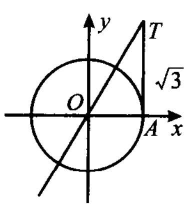
(2)$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由图(2)得 $OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$\{\alpha|\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.



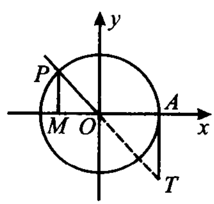
(2)

(3)$\tan\alpha=\sqrt{3}$,由图(3)得 $AT=\sqrt{3}$,

∴$\{\alpha|\alpha=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.



(3)



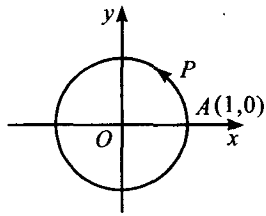
点评 使用三角函数线求角,能够提高正确率.能够加深对三角函数定义的理解.作三角函数线的步骤如下:

(1)作出单位圆,并在单位圆中找出角 α 的终边,设 α 的终边与单位圆的交点为 P,坐标为 $P(x,y)$;

(2)过 P 作 $PM\perp x$ 轴于 M,则有向线段 MP、OM 分别为角 α 的正弦线和余弦线;

(3)设单位圆与 x 轴正半轴的交点为 A,过 A 作单位圆的切线 AT,使 AT 与 α 的终边或其反向延长线交于一点 T,则有向线段 AT 为角 α 的正切线(观察角的线段,要注意起点、终点).

如图,半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点,点 P 从点 $A(1,0)$ 出发,依逆时针方向等速沿单位圆周旋转,已知 P 在 1 秒钟内转过的角度为 $\theta(0<\theta<\pi)$,经过 2 秒钟达到第三象限,经过 14 秒钟后又恰好回到出发点 A,求 θ.



$14\theta=n\cdot 2\pi, n\in N^*$,这是整数解问题,由不等式求得整数 n 后,可得 θ 的值.

$\because 0<\theta<\pi$ 且 $2k\pi+\pi<2\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2},(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$由 $k=0$,得$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$,

又 $14\theta=2\pi\cdot n(n\in N^*)$,

$\therefore\theta=\frac{\pi}{7}n$,从而$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{7}n<\frac{3\pi}{4}$,$\therefore\frac{7}{2}<n<\frac{21}{4}$,

$\therefore$正整数 $n=4$ 或 5,

$\therefore\theta=\frac{4\pi}{7}$或 $\theta=\frac{5\pi}{7}$.

将 $\theta\in(0,\pi)$,精算到 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$,是解决问题的突破口,挖掘题目隐蔽条件. 建立 θ 与 n 的关系,是解题的关键,这是一道考查数学方法和数学能力的好题.

已知一扇形周长为 C,试问当扇形的圆心角为何值时,它的面积最大,最大面积是多少?

根据扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}Rl$,和弧长公式 $l=R\alpha$ 及已知条件:$C=2R+l$(C 为常数),所以既可以把面积 S 直接表示成圆心角 α 的函数,再设法求函数的最大值. 也可以把面积间接的表示成 l 的函数,先求出面积最大时 l 的值,再求此时对应的圆心角 α 的值.

解析 方法一:设扇形的半径为 R,圆心角为 α,面积为 S.

$\because$扇形的周长 $C=2R+l=2R+R\alpha$(l 为扇形的弧长),$\therefore R=\frac{C}{2+\alpha}$.

则 $S=\frac{1}{2}Rl=\frac{1}{2}R\cdot R\alpha=\frac{1}{2}R^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{C^2\alpha}{(2+\alpha)^2}$.

将上式整理可得 $2S\alpha^2+(8S-C^2)\alpha+8S=0$.

$\because\alpha$ 为实数,

$\therefore$方程 $2S\alpha^2+(8S-C^2)\alpha+8S=0$ 的判别式 $\Delta=(8S-C^2)^2-64S^2\geq 0$,解得 $0<$

$S \leqslant \frac{C^2}{16}$.

当 $S=\frac{C^2}{16}$ 时,有 $\frac{1}{2} \cdot \frac{C^2\alpha}{(2+\alpha)^2}=\frac{C^2}{16}$,则 $\alpha^2-4\alpha+4=0$,从而 $\alpha=2$.

故当扇形的圆心角为 2 rad 时,扇形的面积有最大值,最大值为 $\frac{C^2}{16}$.

方法二:设扇形的半径为 R,圆心角为 α,弧长为 l,面积为 S.

$\because C=2R+l$,$\therefore R=\frac{C-l}{2}(C>l)$.

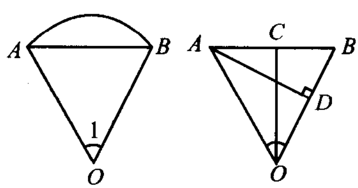
$\therefore S=\frac{1}{2}Rl=\frac{1}{2} \cdot \frac{C-l}{2} \cdot l=\frac{1}{4}(Cl-l^2)=-\frac{1}{4}(l-\frac{C}{2})^2+\frac{C^2}{16}$.

则 $l=\frac{C}{2}$ 时,$S_{\max}=\frac{C^2}{16}$,此时 $\alpha=\frac{l}{R}=\frac{\frac{C}{2}}{\frac{C-\frac{C}{2}}{2}}=2$.

故当扇形的圆心角为 2 rad 时,扇形面积有最大值 $\frac{C^2}{16}$.

方法一中,$S=\frac{C^2\alpha}{2(2+\alpha)^2}$ 可化为 $S=\frac{C^2}{2(\alpha+\frac{4}{\alpha}+4)}$ 用均值不等式求解,方法二中,$S=\frac{1}{4}(Cl-l^2)$,也可化为 $S=\frac{1}{4}(C-l)l$ 仍用均值不等式求解. 特别是方法二中,我们先将 S 表示成 l 的函数,求得 S 最大时的 l 后再求 α 的值,这种“欲进先退”间接解决问题的方法值得学习和运用. 本题利用了函数与方程的思想及求最值问题的常见方法,当然用导数求最值也是可以的.

如图(1),已知扇形 $\overset{\frown}{AOB}$ 的周长为 6 cm,该扇形的中心角为 1,求弓形的面积.



(1)　　(2)

方法 1:设扇形的半径为 r,弧长为 l.

由题意,得 $\begin{cases}2r+l=6\\ \frac{l}{r}=1.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}r=2,\\ l=2.\end{cases}$

$\therefore S_{扇}=\frac{1}{2}l \cdot r=\frac{1}{2} \times 2 \times 2=2(\text{cm}^2)$.

如图(2)过 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C，$\triangle OAB$ 中，$OA=OB=2$，

则 $AC=CB=\frac{1}{2}AB$，$\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}$.

在 $Rt\triangle AOC$ 中，$AC=OA\cdot\sin\angle AOC=2\sin\frac{1}{2}$，

$OC=OA\cdot\cos\angle AOC=2\cdot\cos\frac{1}{2}$，

$$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC=\frac{1}{2}\times 2AC\times OC$$

$$=2\cdot\sin\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{1}{2}$$

$$=4\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}.$$

$\therefore S_{弓形}=S_{扇形}-S_{\triangle AOB}=2-4\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}$.（$2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}=\sin 1$）.

方法 2：由方法 1 知 $OA=OB=2$，$S_{扇形}=2$. 如图(2)，过 A 作 $AD\perp OB$，垂足为 D. 在 $Rt\triangle AOD$ 中，$AD=OA\cdot\sin\angle AOD=2\sin 1$，

$\therefore S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot AD=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin 1=2\sin 1$.

$\therefore S_{弓形}=S_{扇形}-S_{\triangle AOB}=2-2\sin 1=2(1-\sin 1)$.

三角问题往往与几何图形紧密联系. 本题将扇形、弓形与三角形有机地结合在一起，充分利用三者之间面积的关系，达到了解题的目的，充分显示了数学中数与形有机结合的魅力.

§1.1　基础达标训练

一、选择题

已知 α 为第三象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是　　（　　）

A. 第一或第二象限　　B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限　　D. 第二或第四象限

已知 α 是第二象限角，且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是　　（　　）

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第一象限，则在 $[0,2\pi]$ 内 α 的取值范围是　　（　　）

A. $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$　　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$

C. $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$　　D. $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3}{4}\pi,\pi)$