



# 真正高考

精选典题 专家评析 闪电式提高

# 各个击破

圆100万学子清华北大梦!!

【审订】全国著名特高级教师

【主编】金 诚

打造学科 **状元**

数学 · 三角函数与平面向量

安徽人民出版社

# 真正高考

精选典题 专家评析 闪电式提高

# 各个击破

圆100万学子清华北大梦!!

主 编: 金 诚

本册主编: 贺顺炳 张劲松

编 者: 刘国权 康 轩 郭小亮

崔文海 孙道琦 江海洋

## 数学·三角函数与平面向量

安徽人民出版社

责任编辑：王世超 周子瑞

装帧设计：秦 超

### 图书在版编目(CIP)数据

真正高考·各个击破 数学：普通高考专题解读/金诚主编.  
—合肥：安徽人民出版社，2006  
ISBN 7-212-02826-6

I. 真… II. 金… III. 数学课—高中—升学参考资料  
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 031012 号

## 真正高考·各个击破 数学·三角函数与平面向量

金 诚 主编

---

出版发行：安徽人民出版社

地 址：合肥市金寨路 381 号九州大厦 邮编：230063

经 销：新华书店

制 版：合肥市中旭制版有限责任公司

印 刷：合肥杏花印务有限公司

开 本：880×1230 1/32 印张：51 字数：150 万

版 次：2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

标准书号：ISBN 7-212-02826-6

定 价：60.00 元（共 6 册）

印 数：00001—15000

---

本版图书凡印刷、装订错误可及时向承印厂调换

## 前 言

《真正高考》系列丛书之《数学》，按照国家最新考试大纲和最新教学大纲的要求编写，为便于教师指导、便于学生复习，均酌情按照知识的系统性编排。

全套书共分六册

第一册《选择题解法》

第二册《函数、不等式、导数》

第三册《三角函数与平面向量》

第四册《解析几何》

第五册《立体几何与空间向量》

第六册《数列、概率与统计》

栏目设置：

△考试内容 & 知识网络：展示在每一章之首，使学生明确本章要掌握的知识范围。

△考纲要求：依据新的考试说明，对每一小节提出高考的具体要求，使学生明确每个知识点应达到的水平。

△知识要点：使学生明确本节内容主要知识点，便于学生查阅与记忆。

△典例解析：分析典型例题，尽量覆盖知识点和解题技巧与方法，力求上升为数学思考和数学方法，精选与本节相关的近两、三年高考题进行重点解析、创新，力求自然消化。

△基础达标训练、能力提升训练：收集了典型、新颖、考查能力的部分试题，使学生通过解题训练理解知识，掌握方法，形成能力，为高考做好充分准备。

△本章测试：编写少而精，新而优的题目，对本章相关知识的掌握进行检测，便于查缺补漏，点点过关，步步为营。

本书在编写过程中尽量体现“一题多解”，“一法多用”注重对问题的点拨和解决问题后的点评，使学生能够学到举一反三和触类旁通的数学内容，努力体现化归数形结合，分类讨论，归纳猜想等数学的重要思想和方法，有助于学生把知识转化为能力，由能力上升为思想，重点突出，难点分散，便于学生的理解和掌握。

本书既适合高三学生专项强化使用，又适合于高中同步学习的强化及提高，是一本实用性的备考助学用书，尽管我们做了很大的努力，但由于客观条件所限，书中难免有疏漏不足之处，敬请广大读者批评指正。

编者

## 《真正高考》丛书编委会

<b>语文</b>	冷 凝	高 远	郭 颖	刘 方	夏 凤	严 君	叶之冕	刘 笑	李秀兰
	张文娟	张国权	陈小燕	王文斌	王伟成	石志成	林 丹	黄志强	何中伟
	刘春祥	刘 燕	刘 笑	仁宋波	冯常贵	董春辉	高 洋	蒋文东	刘伯敏
	常中华	郑岩宏	陈正道	江萱滋	史松华	金 明	李秀清	彭海霞	刘 艳
<b>数学</b>	贺顺炳	汪小祥	方向前	崔北成	张劲松	邵乃军	王学亮	刘国权	刘忠义
	陈孝明	胡立清	赵小林	赵开宇	魏文涛	杜效琳	张 炜	张中德	康 轩
	林雪芬	黄成宇	文 华	杨广英	郭文海	郭小亮	杜艳秋	赵书岩	贾 亮
	于立人	张玉玲	傅永波	王潼章	江海洋	周志勇	孙正文	谢立行	高欣欣
<b>英语</b>	陈效俊	郎明传	周正虎	滕兴会	周 艳	高青年	孙 凤	王 颖	沈小杰
	汪六一	张 蕊	乔现会	高长才	周素梅	冯田宇	朱永琪	张 松	雪 梅
	刘文婷	程 艳	关 君	魏君雪	蒋 瑜	钟雪静	吴旭生	高立新	傅晓敏
	韩 雪	何正伟	马莉珍	冯国章	杨永波	屠国宝	陶佳君	孟淑芬	张京京
<b>物理</b>	曹雪静	林丹妮	刘利敏	吴会群	郑玉琴	谢巧婷	夏伯章	丁立华	
	钟传波	姚爱玲	孔荣富	宋翠珍	吴明麟	张正义	陈东盛	代京生	胡文海
	刘 红	季开明	崔秀清	郑秋生	吴对江	谢嘉利	张志毅	周道明	林 卓
	李 岩	赵治勇	李尚军	李红霞	于莉莉	张雪梅	罗艳宏	孙 涛	
<b>化学</b>	胡 诚	马 东	曹 强	杨 斌	洪 敏	徐善于	林海洋	孙志庆	陈正果
	朱伯川	张洪祥	张 磊	葛明青	戚洪亮	袁湘辉	孙立华	杨同喜	朱德江
	沈成伟	孟海洋	陶 亮	王立析	丁汝东	关少祥			
<b>生物</b>	韦宏军	杨光银	蔡文华	朱小平	罗一多	曹丽敏	卢 旺	刘培仁	孙 平
	张伯春	谢荣祥	李获初	高鸿章					
<b>政治</b>	汪 澜	张立新	吴德平	李鉴文	张文祥	邢东方	钱汝东	倪文强	杨国光
	宋志毅	赵小刚	王巧露	李海洋	黄鹏飞				
<b>历史</b>	徐汉平	高 峰	洪小阳	刘和清	浦家文	武吉华	裘卫东	刘 铎	曹 斌
	张晶晶	孙文芳	严瑞雪	杜永康	赵文蔚	汪晓明	傅立刚	高玉荣	谢凤兰
	耿雪艳	李文欣	张微微						
<b>地理</b>	刘永利	关 雪	周德刚	李文瑜	王书强	杨升宇	张振祥	郭 川	孙自强
	吴 倩	夏瑞雪	江维亮						

# Contents

## 目录

<b>第①章 三角函数</b> .....		(001)
§ 1.1 角的概念与任意角的三角函数	§ 1.5 三角函数图象	(067)
..... (002)	§ 1.5 基础达标训练	(077)
§ 1.1 基础达标训练	§ 1.5 能力提升训练	(079)
..... (010)	§ 1.5 基础达标训练答案	(081)
§ 1.1 能力提升训练	§ 1.5 能力提升训练答案	(083)
..... (011)	§ 1.6 三角函数的性质	(087)
§ 1.1 基础达标训练答案	§ 1.6 基础达标训练	(099)
..... (013)	§ 1.6 能力提升训练	(101)
§ 1.1 能力提升训练答案	§ 1.6 基础达标训练答案	(103)
..... (015)	§ 1.6 能力提升训练答案	(105)
§ 1.2 同角三角函数的基本关系式与诱导公式	§ 1.7 三角函数求角与最值	(108)
..... (018)	§ 1.7 基础达标训练	(115)
§ 1.2 基础达标训练	§ 1.7 能力提升训练	(116)
..... (025)	§ 1.7 基础达标训练答案	(118)
§ 1.2 能力提升训练	§ 1.7 能力提升训练答案	(120)
..... (025)	§ 1.8 解斜三角形	(122)
§ 1.2 基础达标训练答案	§ 1.8 基础达标训练	(133)
..... (027)	§ 1.8 能力提升训练	(134)
§ 1.2 能力提升训练答案	§ 1.8 基础达标训练答案	(136)
..... (028)	§ 1.8 能力提升训练答案	(138)
§ 1.3 两角和与差的三角函数	本章测试	(141)
..... (032)	本章测试答案	(146)
§ 1.3 基础达标训练		
..... (040)		
§ 1.3 能力提升训练		
..... (041)		
§ 1.3 基础达标训练答案		
..... (043)		
§ 1.3 能力提升训练答案		
..... (046)		
§ 1.4 二倍角的正弦、余弦、正切		
..... (050)		
§ 1.4 基础达标训练		
..... (059)		
§ 1.4 能力提升训练		
..... (060)		
§ 1.4 基础达标训练答案		
..... (062)		
§ 1.4 能力提升训练答案		
..... (064)		

# Contents

## 目录

### 第2章 平面向量 ..... (155)

§ 2.1 平面向量及其几何运算 ..... (156) § 2.4 线段的定比分点与图形平移 ..... (203)

§ 2.1 基础达标训练 ..... (164) § 2.4 基础达标训练 ..... (213)

§ 2.1 能力提升训练 ..... (166) § 2.4 能力提升训练 ..... (214)

§ 2.1 基础达标训练答案 ..... (168) § 2.4 基础达标训练答案 ..... (216)

§ 2.1 能力提升训练答案 ..... (169) § 2.4 能力提升训练答案 ..... (217)

§ 2.2 平面向量的坐标运算 ..... (172) § 2.5 平面向量综合应用 ..... (221)

§ 2.2 基础达标训练 ..... (179) § 2.5 基础达标训练 ..... (231)

§ 2.2 能力提升训练 ..... (181) § 2.5 能力提升训练 ..... (233)

§ 2.2 基础达标训练答案 ..... (183) § 2.5 基础达标训练答案 ..... (235)

§ 2.2 能力提升训练答案 ..... (184) § 2.5 能力提升训练答案 ..... (237)

§ 2.3 平面向量数量积 ..... (186) 本章测试 ..... (240)

§ 2.3 基础达标训练 ..... (195) 本章测试答案 ..... (245)

§ 2.3 能力提升训练 ..... (197)

§ 2.3 基础达标训练答案 ..... (198)

§ 2.3 能力提升训练答案 ..... (200)

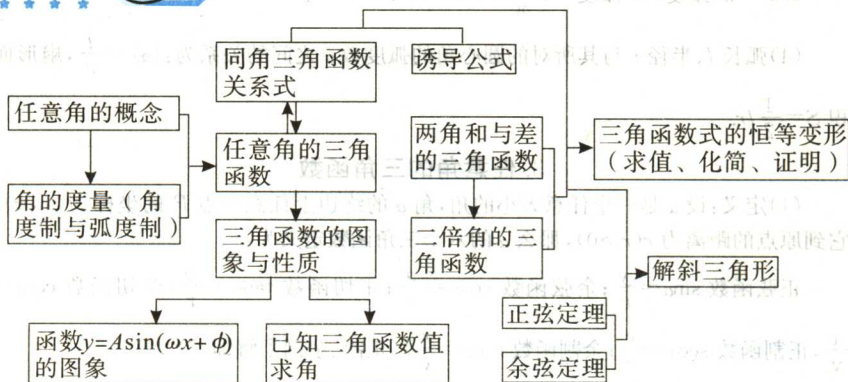


## 第一章 三角函数

## 本章考试内容及要求

考纲内容	能力层次	考纲要求
三角函数概念公式	掌握	任意角的正弦、余弦、正切的定义,用三角函数线表示正弦、余弦和正切;同角三角函数的基本关系式;正弦、余弦的诱导公式
和差倍公式	掌握	通过公式的推导,了解它们的内在联系,从而培养逻辑推理能力
图象与性质	掌握	会用三角函数线画正弦函数,正切函数的图象,由诱导公式画余弦函数的图象;理解它们的性质;会用“五点法”
$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	理解	$A, \omega, \varphi$ 的物理意义
	掌握	用“五点法”画函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的简图
三角最值	掌握	利用三角知识求最值
正余弦定理	掌握	正弦定理、余弦定理,并能运用它们解斜三角形
应用	掌握	运用所学三角知识解决实际问题

## 本章知识网络





## § 1.1 角的概念与任意角的三角函数

## 考纲要求

理解任意角的概念,理解弧度的意义,能表示与 $\alpha$ 终边相同的角,掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义,了解余切、正割、余割的定义,掌握单位圆中的三角函数,及三角函数在各象限的符号.

## 知识要点

## 1. 角的概念的推广

- (1)按旋转方向的不同,角可分为正角、负角及零角.
- (2)在直角坐标系内,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边在 $x$ 轴正半轴上,按终边所在位置的不同,角可分为象限角和轴线角(坐标轴上的角).
- (3)终边相同的角:所有与角 $\alpha$ 终边相同的角,可以用式子 $k \cdot 360^\circ + \alpha (k \in \mathbf{Z})$ 来表示.

## 2. 角的度量

- (1)角度制:周角的 $\frac{1}{360}$ 叫做1度角,用度、分、秒作量角单位的制度叫角度制.
- (2)弧度制:等于半径长的圆弧所对的圆心角叫1弧度的角,用弧度作量角单位的制度叫弧度制.
- (3)角度制与弧度制间的换算关系  
 $180^\circ = \pi(\text{弧度}), 1 \text{ 弧度} = (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57^\circ 18'$ .
- (4)弧长 $l$ 、半径 $r$ 与其所对的圆心角的弧度数 $\alpha$ 之间的关系为: $|\alpha| = \frac{l}{r}$ ,扇形面积

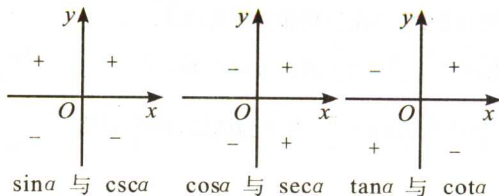
$$S = \frac{1}{2}lr.$$

## 3. 任意角的三角函数

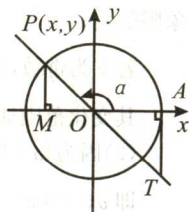
(1)定义:设 $\alpha$ 是一个任意大小的角,角 $\alpha$ 的终边上任意一点 $P$ 的坐标为 $(x, y)$ ,它到原点的距离为 $r(r > 0)$ ,那么 $\alpha$ 的六个三角函数定义为:

正弦函数  $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ ; 余弦函数  $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ ; 正切函数  $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ ; 余切函数  $\cot\alpha = \frac{x}{y}$ , 正割函数  $\sec\alpha = \frac{r}{x}$ ; 余割函数  $\csc\alpha = \frac{r}{y}$ . (正割、余割了解即可)

(2)符号法则:在各三角函数值在每个象限的符号如下图所示.



(3) 正弦线、余弦线、正切线: 设任意角  $\alpha$  的终边与单位圆(圆心在原点, 半径等于单位长度的圆)相交于点  $P(x, y)$ , 那么  $\sin \alpha = y$ ,  $\cos \alpha = x$ . 如图, 单位圆中的有向线段  $MP$ 、 $OM$ 、 $AT$  分别叫做角  $\alpha$  的正弦线, 余弦线、正切线.



### 典例剖析

**例 1** 集合  $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$  则有 ( )

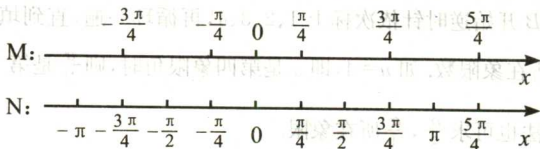
- A.  $M=N$     B.  $M \supsetneq N$     C.  $M \subsetneq N$     D.  $M \cap N = \emptyset$

**解析** 选 C (方法 1) 将集合  $M, N$  变形为:

$$M = \{x | x = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbf{Z}\}, N = \{x | x = \frac{\pi}{4}(k+2), k \in \mathbf{Z}\}$$

由于  $2k+1 \in \{\text{奇数}\}$ ,  $k+2 \in \{\text{整数}\}$  故  $M \subsetneq N$ , 选 C.

(方法 2) 在数轴上分别以点表示  $M, N$  中的元素 (如图 2-1-1), 可见  $M \subsetneq N$ .



(方法 3) 用筛选法, 由  $\frac{\pi}{4} \in M$  且  $\frac{\pi}{4} \in N$ , 筛去 D, 再由  $\frac{\pi}{2} \in N$ , 但  $\frac{\pi}{2} \notin M$ , 筛去 A、B, 故选 C.

(方法 4)  $M$  是终边在四个象限的角平分线上所有点的集合,  $N$  是终边在  $x$  轴、 $y$  轴以及四个象限的角平分线上的所有角的集合, 故  $M \subsetneq N$ .

**点评** 角的集合之间的包含关系问题, 要注意将表示角的集合化简整理找出它们的异同, 然后根据它们的不同点, 确定它们的包含关系, 也可以利用数形结合法解之, 如方法 2, 方法 4.

**例 2** 已知  $\alpha$  是第二象限的角.

(1) 指出  $\frac{\alpha}{2}$  所在的象限, 并用图形表示其变化范围;

(2) 若  $\alpha$  同时满足条件  $|\alpha+2| \leq 4$ , 求  $\alpha$  的取值区间.

**点评** (1) 根据象限角的定义, 利用不等式的性质可得.

(2)解不等式组,利用数轴找公共部分即为所求.

**解析** 依题意,  $2kx + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$ ,

(1)所以  $k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 若  $k$  为偶数, 则  $\frac{\alpha}{2}$  是第一象限的角;

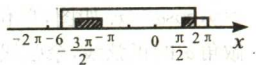
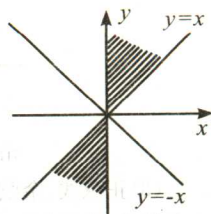
若  $k$  为奇数, 则  $\frac{\alpha}{2}$  是第三象限的角;

其变化范围如右图中阴影部分所示(不含边界).

(2)因为  $|\alpha + 2| \leq 4$ , 所以  $-6 \leq \alpha \leq 2$ ,

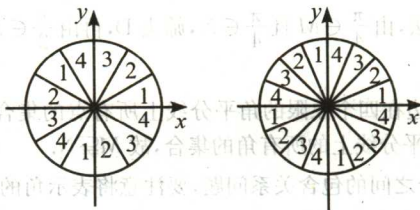
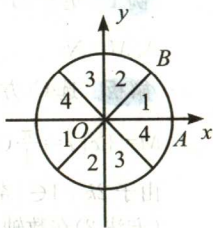
即  $\alpha \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi) \cap [-6, 2] = [-\frac{3\pi}{2}, -\pi] \cup$

$(\frac{\pi}{2}, 2]$ .



**点评** 除象限角、终边相同的角以外, 还要注意理解区间角的概念, 并能掌握好  $\alpha$  角的取值范围与  $\frac{\alpha}{2}$  角的取值范围间的相互关系. 如下:

已知角  $\alpha$  是第  $n (n=1, 2, 3, 4)$  象限的角, 问  $\frac{\alpha}{2}$  是第几象限的角? 如图所示, 用直线  $y=x, y=-x$  及两坐标轴, 把单位圆 8 等分, 从  $\angle AOB$  开始逆时针依次标上 1, 2, 3, 4, 再循环一遍, 直到填满为止, 则有标号  $n$  的就是  $\frac{\alpha}{2}$  所在象限数. 如  $n=4$ , 即  $\alpha$  是第四象限角时, 则  $\frac{\alpha}{2}$  是第二或第四象限的角, 用同样的方法也可求  $\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{4}$  所在象限.



上边左图是求  $\frac{\alpha}{3}$  的方法, 右图是求  $\frac{\alpha}{4}$  的方法.

**例 3** (1)使  $\sin x \leq \cos x$  成立的  $x$  的一个变化区间是( )

- A.  $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$       B.  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$       C.  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$       D.  $[0, \pi]$

(2)满足  $\tan \alpha \geq \cot \alpha$  的角  $\alpha$  的一个取值范围是( )



A.  $(0, \frac{\pi}{4}]$

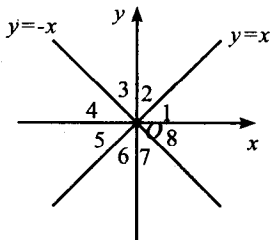
B.  $[0, \frac{\pi}{4}]$

C.  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

D.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

**点拨** 在三角问题中,须要比较  $\sin\theta$  与  $\cos\theta$ , 或者  $\tan\theta$  与  $\cot\theta$  的大小及确定  $\sin\theta + \cos\theta$  的符号. 常用的方法是利用三角函数的图象或单位圆上的三角函数线来解决, 但比较费时、繁琐. 这里介绍一种方法, 能快捷解决此类问题.

在平面直角坐标系内作直线  $y=x$  和  $y=-x$ , 这两条直线和  $x$  轴、 $y$  轴把平面分成八个区域, 并将这些区域按逆时针方向标上序号 1, 2, 3, ……8 (如图)



(1)  $\sin\theta$  与  $\cos\theta$  大小关系:

① 当  $\theta$  的终边落在直线  $y=x$  上方时,  $\sin\theta > \cos\theta$ .

② 当  $\theta$  的终边落在直线  $y=x$  下方时,  $\sin\theta < \cos\theta$

(2)  $\sin\theta + \cos\theta$  符号制定:

① 当  $\theta$  的终边落在直线  $y=-x$  上方时,  $\sin\theta + \cos\theta > 0$ .

② 当  $\theta$  的终边落在直线  $y=-x$  下方时,  $\sin\theta + \cos\theta < 0$ .

(3)  $\tan\theta$  与  $\cot\theta$  大小关系:

① 当  $\theta$  的终边落在 2、4、6、8 区域时,  $\tan\theta > \cot\theta$ .

② 当  $\theta$  的终边落在 1、3、5、7 区域时,  $\tan\theta < \cot\theta$ .

**解析** (1) 选 A, (2) 选 C.

(1) 由图知: 使  $\sin\alpha \leq \cos\alpha$  成立的  $\alpha$  的终边将落在直线  $y=x$  的下方, 或者直线  $y=x$  上, 故选 A.

(2) 由图知: 满足  $\tan\alpha \geq \cot\alpha$  的角  $\alpha$  的终边落在 2、4、6、8 区域内, 或者落在直线  $y=\pm x$  上, 故选 C.

**点拨** 这类问题既是三角函数常见问题又是高考的重点. 数形结合是基本方法, 利用上面结论解决此类问题显得更加明快.

**解析** (1) 已知角  $\alpha$  的终边与角  $-690^\circ$  的终边关于  $y$  轴对称, 求  $\alpha$ .

(2) 已知角  $\beta$  的终边与角  $-690^\circ$  的终边关于原点对称, 求其中绝对值最小的  $\beta$ .

**点拨** 对称是角与角的终边常见的一种关系, 常用的有以下四种:

(1)  $\alpha$  与  $\beta$  终边关于  $x$  轴对称,

则  $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$ ;

(2)  $\alpha$  与  $\beta$  终边关于  $y$  轴对称,

则  $\alpha + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$ ;

(3)  $\alpha$  与  $\beta$  终边关于原点对称,

则  $\alpha - \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$ ;

(4)  $\alpha$  与  $\beta$  的终边在一条直线上,

则  $\alpha - \beta = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$ .

**解析** (1)  $-690^\circ = -720^\circ + 30^\circ = -2 \times 360^\circ + 30^\circ$ ,

$\therefore -690^\circ$ 的终边与  $30^\circ$ 的终边相同,

则  $\alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ - 30^\circ, k \in \mathbf{Z}$ ,

即  $\alpha = k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}$ .

(2)  $\because -690^\circ$ 的终边与  $30^\circ$ 的终边相同,  $\therefore \beta - 30^\circ = (2k+1) \cdot 180^\circ$

$\therefore \beta = 30^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$ .

当  $k = -1$  时, 取得绝对值最小的角  $\beta'$ ,

$\therefore \beta' = -150^\circ$ .

**点评** 对称问题是数学中的一类重要问题, 应重点掌握, 并明确各对称角之间关系的来源.

**例5** (1) 判断下列各式的符号

①  $\frac{\tan(-3)\cot 5}{\sec 8}$ , ② 已知  $|\cos\theta| = -\cos\theta$  且  $\tan\theta < 0$ ,

则  $\frac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}$  的符号.

(2) 判断下列各式中角  $\alpha$  所在象限

①  $\sin\alpha \tan\alpha < 0$ , ②  $\tan\alpha > 0$  且  $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$ .

**解析** (1) ①  $\because 3, 5, 8$  分别是第三、四、二象限的角,  $\therefore \tan(-3) > 0, \cot 5 < 0,$   
 $\sec 8 = \frac{1}{\cos 8} < 0, \therefore$ 原式  $> 0$ .

② 由  $|\cos\theta| = -\cos\theta$ , 得  $\cos\theta \leq 0$ , 又  $\tan\theta < 0$

$\therefore \theta$  的终边在第二象限,

$\therefore -1 < \cos\theta < 0, 0 < \sin\theta < 1$ .

视  $\cos\theta, \sin\theta$  为弧度数, 故  $\cos\theta$  是第四象限的角,  $\sin\theta$  是第一象限的角.

$\therefore \sin(\cos\theta) < 0, \cos(\sin\theta) > 0, \therefore \frac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)} < 0$

(2) ①  $\because \sin\alpha \tan\alpha < 0$

$\therefore \begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \tan\alpha < 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} \sin\alpha < 0 \\ \tan\alpha > 0 \end{cases}$

$\therefore \alpha$  的终边在第二或第三象限.

**错解**  $\because \sin\alpha \tan\alpha < 0, \therefore \sin\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0 \quad \therefore \cos\alpha < 0$

$\therefore \alpha$  的终边在第二或第三象限或终边在  $x$  轴的负半轴上.

当  $\cos\alpha = -1$  时,  $\sin\alpha, \tan\alpha$  的值均为 0, 不合题意, 应舍去.

②  $\because \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0, \therefore \sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$ , 又  $\because \sin\theta + \cos\theta > 0$ ,

$\therefore \begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \cos\alpha > 0 \end{cases} \quad \therefore \alpha$  的终边在第一象限.

另解:  $\because \tan\alpha > 0 \quad \therefore \alpha$  的终边在第一、三象限.

又  $\because \sin\alpha + \cos\alpha > 0 \therefore \alpha$  的终边在直线  $y = -x$  上方.

所以同时满足上述两个条件的  $\alpha$  的终边在第一象限.

**点评** 本题考查三角函数值在各象限的符号, (1) 中两小题是根据角所在象限, 确定各个三角函数值的符号, 进而确定三角函数式的符号, 当用弧度数表示的角不好判定所在象限时, 要对其估算出角度后来判定. (2) 中两小题是根据三角函数式的符号, 确定角所在象限或求出角所在范围. (1)(2) 是三角函数的值在各象限符号问题的两个方面.

**例 6** 求分别符合下列条件的各角的集合:

(1)  $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; (2)  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; (3)  $\tan\alpha = \sqrt{3}$ .

**点拨** 画单位圆, 分别标出所求的角的三角函数线, 利用终边相同的角, 写出所求的各角.

**解析** (1)  $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 由图(1)得

$$CA = DB = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

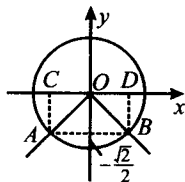
$$\therefore \{\alpha | \alpha = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \text{ 或 } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

(2)  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 由图(2)得  $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\therefore \{\alpha | \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ 或 } -$

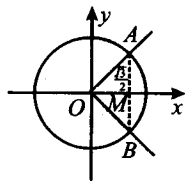
$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

(3)  $\tan\alpha = \sqrt{3}$ , 由图(3)得  $AT = \sqrt{3}$ ,

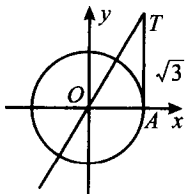
$$\therefore \{\alpha | \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$



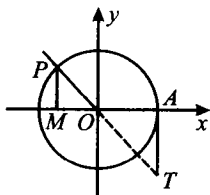
(1)



(2)



(3)



**点评** 使用三角函数线求角, 能够提高正确率. 能够加深对三角函数定义的理解. 作三角函数线的步骤如下:

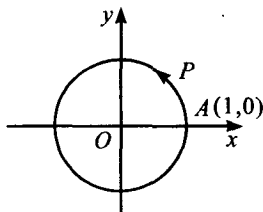
(1) 作出单位圆, 并在单位圆中找出角  $\alpha$  的终边, 设  $\alpha$  的终边与单位圆的交点为  $P$ , 坐标为  $P(x, y)$ ;

(2) 过  $P$  作  $PM \perp x$  轴于  $M$ , 则有向线段  $MP$ 、 $OM$  分别为角  $\alpha$  的正弦线和余弦线;



(3) 设单位圆与  $x$  轴正半轴的交点为  $A$ , 过  $A$  作单位圆的切线  $AT$ , 使  $AT$  与  $\alpha$  的终边或其反向延长线交于一点  $T$ , 则有向线段  $AT$  为角  $\alpha$  的正切线 (观察角的线段, 要注意起点、终点).

如图, 半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点, 点  $P$  从点  $A(1, 0)$  出发, 依逆时针方向等速沿单位圆周转, 已知  $P$  在 1 秒钟内转过的角度为  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ), 经过 2 秒钟达到第三象限, 经过 14 秒钟后又恰好回到出发点  $A$ , 求  $\theta$ .



$14\theta = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{N}^*$ , 这是整数解问题, 由不等式求得整数  $n$  后, 可得  $\theta$  的值.

$$\because 0 < \theta < \pi \text{ 且 } 2k\pi + \pi < 2\theta < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore \text{由 } k=0, \text{ 得 } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{又 } 14\theta = 2\pi \cdot n (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{7}n, \text{ 从而 } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{7}n < \frac{3\pi}{4}, \therefore \frac{7}{2} < n < \frac{21}{4},$$

$\therefore$  正整数  $n=4$  或  $5$ ,

$$\therefore \theta = \frac{4\pi}{7} \text{ 或 } \theta = \frac{5\pi}{7}.$$

将  $\theta \in (0, \pi)$ , 精算到  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ , 是解决问题的突破口, 挖掘题目隐蔽条件. 建立  $\theta$  与  $n$  的关系, 是解题的关键, 这是一道考查数学方法和数学能力的好题.

已知一扇形周长为  $C$ , 试问当扇形的圆心角为何值时, 它的面积最大, 最大面积是多少?

根据扇形面积公式  $S = \frac{1}{2}Rl$ , 和弧长公式  $l = R\alpha$  及已知条件:  $C = 2R + l$  ( $C$  为常数), 所以既可以把面积  $S$  直接表示成圆心角  $\alpha$  的函数, 再设法求函数的最大值. 也可以把面积间接的表示成  $l$  的函数, 先求出面积最大时  $l$  的值, 再求此时对应的圆心角  $\alpha$  的值.

解法一: 设扇形的半径为  $R$ , 圆心角为  $\alpha$ , 面积为  $S$ .

$$\because \text{扇形的周长 } C = 2R + l = 2R + R\alpha (l \text{ 为扇形的弧长}), \therefore R = \frac{C}{2 + \alpha}.$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}Rl = \frac{1}{2}R \cdot R\alpha = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{C^2\alpha}{(2 + \alpha)^2}.$$

$$\text{将上式整理可得 } 2S\alpha^2 + (8S - C^2)\alpha + 8S = 0.$$

$\because \alpha$  为实数,

$$\therefore \text{方程 } 2S\alpha^2 + (8S - C^2)\alpha + 8S = 0 \text{ 的判别式 } \Delta = (8S - C^2)^2 - 64S^2 \geq 0, \text{ 解得 } 0 <$$

$$S \leq \frac{C^2}{16}$$

当  $S = \frac{C^2}{16}$  时, 有  $\frac{1}{2} \cdot \frac{C^2 \alpha}{(2+\alpha)^2} = \frac{C^2}{16}$ , 则  $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ , 从而  $\alpha = 2$ .

故当扇形的圆心角为 2 rad 时, 扇形的面积有最大值, 最大值为  $\frac{C^2}{16}$ .

方法二: 设扇形的半径为  $R$ , 圆心角为  $\alpha$ , 弧长为  $l$ , 面积为  $S$ .

$$\because C = 2R + l, \therefore R = \frac{C-l}{2} (C > l).$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} R l = \frac{1}{2} \cdot \frac{C-l}{2} \cdot l = \frac{1}{4} (Cl - l^2) = -\frac{1}{4} (l - \frac{C}{2})^2 + \frac{C^2}{16}.$$

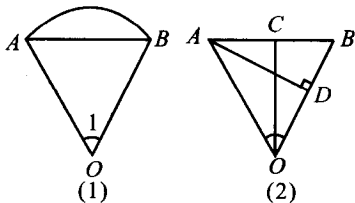
$$\text{则 } l = \frac{C}{2} \text{ 时, } S_{\max} = \frac{C^2}{16}, \text{ 此时 } \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{C}{2}}{\frac{C-\frac{C}{2}}{2}} = 2.$$

故当扇形的圆心角为 2 rad 时, 扇形面积有最大值  $\frac{C^2}{16}$ .

方法一中,  $S = \frac{C^2 \alpha}{2(2+\alpha)^2}$  可化为  $S = \frac{C^2}{2(\alpha + \frac{4}{\alpha} + 4)}$  用均值不等式求解, 方

法二中,  $S = \frac{1}{4}(Cl - l^2)$ , 也可化为  $S = \frac{1}{4}(C-l)l$  仍用均值不等式求解. 特别是方法二中, 我们先将  $S$  表示成  $l$  的函数, 求得  $S$  最大时的  $l$  后再求  $\alpha$  的值, 这种“欲进先退”间接解决问题的方法值得学习和运用. 本题利用了函数与方程的思想及求最值问题的常见方法, 当然用导数求最值也是可以的.

如图(1), 已知扇形  $AOB$  的周长为 6 cm, 该扇形的中心角为 1, 求弓形的面积.



方法 1: 设扇形的半径为  $r$ , 弧长为  $l$ .

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} 2r + l = 6 \\ \frac{l}{r} = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} r = 2, \\ l = 2. \end{cases}$$

$$\therefore S_{\text{扇}} = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 (\text{cm}^2).$$



如图(2)过O作 $OC \perp AB$ ,垂足为C, $\triangle OAB$ 中, $OA=OB=2$ ,

则 $AC=CB=\frac{1}{2}AB$ , $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}$ .

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $AC=OA \cdot \sin\angle AOC=2\sin\frac{1}{2}$ ,

$OC=OA \cdot \cos\angle AOC=2 \cdot \cos\frac{1}{2}$ ,

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC=\frac{1}{2} \times 2AC \times OC$

$$=2 \cdot \sin\frac{1}{2} \cdot 2\cos\frac{1}{2}$$

$$=4\sin\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{1}{2}.$$

$\therefore S_{\text{弓形}}=S_{\text{扇形}}-S_{\triangle AOB}=2-4\sin\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{1}{2}.$  ( $2\sin\frac{1}{2} \cos\frac{1}{2}=\sin 1$ ).

方法2:由方法1知 $OA=OB=2$ , $S_{\text{扇形}}=2$ .如图(2),过A作 $AD \perp OB$ ,垂足为D.

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $AD=OA \cdot \sin\angle AOD=2\sin 1$ ,

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2} \cdot OB \cdot AD=\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sin 1=2\sin 1.$

$\therefore S_{\text{弓形}}=S_{\text{扇形}}-S_{\triangle AOB}=2-2\sin 1=2(1-\sin 1).$

三角问题往往与几何图形紧密联系.本题将扇形、弓形与三角形有机地结合在一起,充分利用三者之间面积的关系,达到了解题的目的,充分显示了数学中数与形有机结合的魅力.

## § 1.1 基础达标训练

### 一、选择题

已知 $\alpha$ 为第三象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是 ( )

- A. 第一或第二象限                      B. 第二或第三象限  
C. 第一或第三象限                      D. 第二或第四象限

已知 $\alpha$ 是第二象限角,且 $|\cos\frac{\alpha}{2}|=-\cos\frac{\alpha}{2}$ ,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ( )

- A. 第一象限角                              B. 第二象限角  
C. 第三象限角                              D. 第四象限角

已知点 $P(\sin\alpha - \cos\alpha, \tan\alpha)$ 在第一象限,则在 $[0, 2\pi]$ 内 $\alpha$ 的取值范围是 ( )

- A.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$                       B.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$   
C.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$                       D.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{4}\pi, \pi)$