聚焦考研

Focus NETM

陈文灯 黄先开 主编

数学

最后冲刺

考研名师网络课堂 www.kaoyan.tv

2004版

理工类

基础加题型

——考研数学成功的保证

以考试题型为指针，将无限的题海浓缩在有限的典型题型之中，是知识由系统全面向立体网络演进的必由之路，是全面提升实力的有效保证

世界图书出版公司

主　编　陈文灯 黄

副主编　曹显兵 施明存 李晋明

聚焦考研 Focus NETM

数学

最后冲刺

北京聚骄文化发展有限公司　策划　2004版

- 《复习指南》
  帮助考生理解和吃透大纲，掌握解题方法和技巧，奠定坚实的应试知识基础
- 《题型集粹与练习》
  进一步巩固所学知识点，寻找做题感觉、掌握相关技巧
- 《最后冲刺》
  以考题原型为指针，对各知识点、考点进行有机“串联”；使知识由“厚”变“薄”，由系统全面向立体网络演进
- 《临考演习》
  每做完一份模拟试卷，有效总结做题的规律和技巧，考研只不过多一次演习而已

理工类

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

图书在版编目（CIP）数据

数学最后冲刺．理工类／陈文灯，黄先开编著．－北京：世界图书出版公司北京公司，2001．10

ISBN 7－5062－5220－1

Ⅰ．考...　Ⅱ．①陈...　②黄...　Ⅲ．高等数学－研究生－自学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 072077 号

数学最后冲刺（理工类）

主　　编：陈文灯　黄先开
责任编辑：郑　宏
封面设计：滕晓娜

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
（北京朝内大街 137 号　邮编 100010　电话 62116800）
销　　售：各地新华书店
印　　刷：廊坊人民印刷厂

开　　本：787×1092 毫米　1/16
印　　张：13.375
字　　数：295 千字
版　　次：2003 年 8 月第 10 版　　2003 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7－5062－5220－1/O·330　　　**定价：15.00 元**

服务热线　010—62198078

律 师 声 明

敬启者：

我们，中华人民共和国执业律师，受当事人北京聚骄文化发展有限公司(以下简称为“我方当事人”)委托，全权代理我方当事人出版事务代理(或经纪)、发行聚焦考研 2004 版《数学最后冲刺(理工类)》一书工作中的著作权事宜。根据我方当事人提供的相关材料，现依据中华人民共和国法律，专发此声明。

我方当事人是聚焦考研 2004 版《数学最后冲刺(理工类)》一书的出版事务经纪人，同时，该书作者已与我方当事人签署了著作权独家许可使用协议书，保证其对我方当事人是独家授权。依照我国著作权法的有关规定及我方当事人与作者的合同约定，我方当事人享有对该作品的独家使用权，同时作者保证独家授权我方当事人在聚焦考研 2004 版《数学最后冲刺(理工类)》一书上使用其名字，即其署名权也由我方当事人独家使用。

在此，我们代表我方当事人及其签约作者郑重声明：任何单位、个人未经我方当事人书面授权，擅自出版、发行我方当事人享有著作权的聚焦考研 2004 版《数学最后冲刺(理工类)》一书，或者未经我方当事人书面同意，擅自在其出版、发行的图书上使用与我方当事人有协议约定的作者姓名(无论是否经过作者授权)，这些行为均违反《中华人民共和国著作权法》及其他相关法律，将严重侵犯我方当事人的合法权益。因此，侵权人应当公开向我方当事人和签约作者道歉，并赔偿由此给我方当事人造成的全部经济损失和商誉损失。

上述侵权行为一经发现，我们将代表我方当事人通过必要的法律途径、立即采取相关法律措施，追究侵权人的法律责任。

特此声明。

北京市浩天律师事务所
田　辉　律师
肖　群　律师
2003 年 6 月 30 日

作者声明

本人在数学研究生入学考试方面的著作权授予北京聚骄文化发展有限公司独家使用，其他出版单位不得擅自以本人的名义署名或抄袭相关著作的内容。

特此声明。

2003 年 6 月 30 日

应试说明

考研数学考什么？如何复习才能考出好成绩？这是历年来同学们想的最多，问的也最多的问题。借这本书出版的机会作个回答。

只要仔细、深入地分析研究 17 年（1987 年 ~ 2003 年）数学文理科统考的试卷，就不难回答第一个问题：数学考的是基本功——基本概念、基本理论、基本运算掌握的程度；考的是综合分析能力；考的是简单的“数学建模能力”，即解实际应用题的能力；考的是解题的运算娴熟程度。针对数学命题的特点，根据自身存在的薄弱环节，采取相应的措施，科学合理地安排好时间进行全面、系统地复习，我相信应试时，同学们定能正常或超常发挥，考出好成绩的。我建议同学们这样复习：

（1）牢记重要的概念、定理和公式。因为这样可使你应试时节省“追忆”、“推演”的时间，同时可少犯错用定理、公式和概念性的错误。

（2）掌握一些题型的快速解法，提高解题速度。

（3）掌握重要的变量替换、辅助函数的作法技巧，重要题型的解题思路和方法，这可使应试时很快找到解题的突破口和切入点。

（4）多思多想，将书中重要的例题当习题做，然后进行联想、扩展；勤归纳善总结，搞出一些解题的“思维定势”，使应试时成竹在胸，增强信心。

本书就是基于上面的出发点编写的一本应试指导书，或者叫“应试对策书”。在同学们学完《数学复习指南》和《数学题型集粹与练习题集》之后再看本书，将会有“画龙点睛”、“更上一层楼”之感。

陈文灯　陈文灯印

2003 年 7 月 28 日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一篇　高等数学串讲

第一讲　高数解题的四种思维定势

第一句话：在题设条件中给出一个函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导，“不管三七二十一”，把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】 设 C 为实数，函数 $f(x)$ 满足下列两个等式：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=C,\quad \lim_{x\to\infty}f'''(x)=0.$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$.

【证明】 由泰勒公式有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\frac{1}{7}f'''(\xi_1),\ x<\xi_1<x+1,\qquad ①$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)-\frac{1}{7}f'''(\xi_2),\ x-1<\xi_2<x.\qquad ②$$

由 ① + ② 得，$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1).\qquad ③$$

由 ① − ② 得，$$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2).\qquad ④$$

当 $x\to\infty$ 时，$\xi_1\to\infty$，$\xi_2\to\infty$，于是有

$$\lim_{x\to\infty}f''(x)=2C-2C+\frac{1}{6}\times 0-\frac{1}{6}\times 0=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}2f'(x)=C-C-\frac{1}{6}\times 0-\frac{1}{6}\times 0=0.$$

因此　$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，$f(0)=f(1)=0$，并且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\leqslant A$，求证：$|f'(x)|\leqslant\dfrac{A}{2}$，$x\in[0,1]$.

【证明】 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2,\ \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

取 $x=0$，$x_0=x$，则

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},\quad 0<\xi_1<x\leqslant 1;\qquad ①$$

取 $x = 1, x_0 = x$，则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2)\cdot\frac{(1-x)^2}{2!},\quad 0 \leqslant x < \xi_2 < 1. \qquad ②$$

② − ① 得 $f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0} \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)| \leqslant A, x \in (0,1)$，

则 $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}[x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1)$.

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$2x^2 - 2x + 1 \leqslant 1$. 故 $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$.

【例 3】 试证：若偶函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $f(0) = 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n}) - 1\right|$ 绝对收敛.

【证明】 因 $f(x)$ 为偶函数，故 $f'(x)$ 为奇函数，$f'(0) = 0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $u_n = f(\frac{1}{n}) - 1 = \frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

从而 $|u_n| = \left|f(\frac{1}{n}) - 1\right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

【例 4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x) \geqslant 0, x \in (-\infty, +\infty)$，函数 u 在区间 $[0, a]$ $(a > 0)$ 上连续，证明：$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]$.

【证明】 令 $x_0 = \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geqslant 0$，则 $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $x = u(t)$，则 $f[u(t)] \geqslant f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在 $[0, a]$ 上对 t 积分，得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant \int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0]\mathrm{d}t$$

$$= af(x_0) + f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t - ax_0\right] = af(x_0).$$

故 $\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]$.

【另证】 因 $f''(x) \geqslant 0$，所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此，具有性质：

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\quad(\text{其中}\ \lambda>0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1).$$

由 u 在$[0,a]$上连续,从而可积.将$[0,a]$分成 n 等分,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\cdot\frac{a}{n}=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t.$$

由 f 的凸性及连续性,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\cdot\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f[u(\xi_i)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u(\xi_i))}{a}\cdot\frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n\to\infty$ 取极限,由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t.$$

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则"不管三七二十一"先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例5】 设$f(x)$在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内二阶可导,且$f(0)=f(\frac{1}{2}),2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$.

证明:存在一个 $\xi\in(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

【证明】 $f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{积分中值定理}}2\times(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta),\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant1.$

于是 $f(x)$ 在$[\eta,2]$上满足罗尔定理,即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$,使

$$f'(\xi_1)=0. \tag{①}$$

又 $f(x)$ 在$[0,\frac{1}{2}]$上满足罗尔定理,于是存在一个 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$,使

$$f'(\xi_2)=0. \tag{②}$$

由 ①,② 可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在$[\xi_2,\xi_1]$上使用罗尔定理,于是 $\exists\,\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

【例6】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上是非负、单调递减的连续函数,且 $0<a<b<1$.

证明:$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad\xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad\xi_2\in[a,b].$$

于是 $\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

故 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

【另证】 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

令 $F(x) = b\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,

则 $F'(x) = bf(x) - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t + xf(x) = \int_x^b f(x)\mathrm{d}t - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t + 2xf(x)$

$$= \int_x^b [f(x) - f(t)]\mathrm{d}t + 2xf(x) \geqslant 0,(\text{由于} f(x) - f(t) \geqslant 0, f(x) \geqslant 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增,又 $F(0) = 0$,

故 $F(a) > F(0) = 0$.

即 $b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$, 亦即 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}f(x)\mathrm{d}x$.

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \xlongequal{f(a)=0} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或 $f(x) \xlongequal{f(b)=0} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$

若 $f(a) = f(b) = 0$,

则 $\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数,且 $f(a)=f(b)=0$,$M = \max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

试证:$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$.

【证明】 $f(x) \xlongequal{f(a)=0} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$,则

$$|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leqslant (x-a)M.$$

同理 $|f(x)| \leqslant (b-x)M$.

于是 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\mathrm{d}x$

$$\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}M$.

即 $\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

【例 8】 已知在$[0,a]$上$|f''(x)|\leqslant M$,且$f(x)$在$(0,a)$内取最大值.

试证:$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$.

【证明】 由题设 $\exists C\in(0,a)$,使$f(c)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}\{f(x)\}$,则$f'(c)=0$.(费尔马定理)

对$f'(x)$在$[0,c]$与$[c,a]$内分别用拉格朗日中值定理,有

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$$

$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$$

于是 $|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc$,

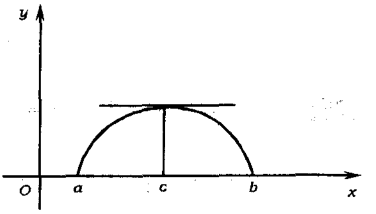
$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c)$.

故 $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma$.

【例 9】 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的$f''(x)$,且$f''(x)<0$,$f(a)=f(b)=0$,则在(a,b)上$f(x)>0$,且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$

【证明】 由$f''(x)<0$可知,$f(x)$在$[a,b]$上是凹函数(图形上凸);由凹函数性质知,$f(x)$大于连接$(a,f(a))$,$(b,f(b))$线段上点的纵坐标.而此线段所在直线即为$y=0$(x轴),所以在(a,b)上$f(x)>0$.再由$f''(x)<0$知,$f'(x)$是严格单调减少的,从而知$f(x)$在(a,b)内有唯一的极大值点,记为$x=c$.此时



$f'(c)=0$,如右图所示,而在(a,c)上,$f'(x)>0$,在(c,b)上$f'(x)<0$.由拉格朗日中值定理,当$x\in[a,c]$时,

$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a),\quad \xi_1\in(a,x).$$

由$f'(x)$严格递减,$f'(\xi_1)<f'_+(a)$,注意到$f(a)=0$,有

$$f(x)<f'_+(a)(c-a),x\in[a,c].$$

当$x\in[c,b]$时,同理可得

$$f(x)<(-f'_-(b))(b-c),x\in[c,b].$$

于是 $\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{(c-a)f'_+(a)},x\in[a,c]$,

$\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{(b-c)(-f'_-(b))},x\in[c,b]$.

则 $$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^c\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$>\int_a^c\frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a)-f'(c)]+$$

$$\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}[f'(c)-f'_-(b)]$$

$$= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)}$$

$$> (b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}.$$

第四句话:对定限或变限积分,若被积函数或其主要部分为复合函数,则"不管三七二十一"先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】 求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

(1) $F(y) = \int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$,求 $F'(y)$;

(2) $F(x) = \int_0^{x^2} tf(x-t)\mathrm{d}t$,求 $F'(x)$;

(3) $F(x) = \int_0^1 f(te^x)\mathrm{d}t$,求 $F'(x)$;

(4) $F(x) = \int_0^{x^2} xf(x+t)\mathrm{d}t$,求 $F'(x)$.

【解】 (1) $F(y) \xlongequal{令 u = x-y} \int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u$,则 $F'(y) = -f(-y)\cdot(-1) = f(-y)$.

(2) $F(x) \xlongequal{令 u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)$

$$= -x\int_x^{x-x^2} f(u)\mathrm{d}u + \int_x^{x-x^2} uf(u)\mathrm{d}u,$$

则 $F'(x) = -\int_x^{x-x^2} f(u)\mathrm{d}u - x[f(x-x^2)\cdot(1-2x) - f(x)] +$

$$(1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x)$$

$$= \int_{x-x^2}^x f(u)\mathrm{d}u + x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) $F(x) \xlongequal{令 u = te^x} \int_0^{e^x} f(u)\frac{1}{e^x}\mathrm{d}u = \frac{1}{e^x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u = e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u$,

则 $F'(x) = -e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u + e^{-x}f(e^x)\cdot e^x = f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\mathrm{d}u$.

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$,于是有 $F(x) = x\int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u$,则

$$F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u)\mathrm{d}u + x[f(x+x^2)\cdot(1+2x) - f(x)].$$

【例 11】 设 $f(x)$ 二阶可微,且满足 $x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t \xlongequal{令 u = t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)\mathrm{d}u$

$$= -\int_0^{-x} uf(u)\mathrm{d}u + x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u.$$

于是原方程变为 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x}uf(u)\mathrm{d}u-x\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u$.

两边对 x 求导，得 $1=f(x)-(-x)f(-x)\cdot(-1)-\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u-xf(-x)\cdot(-1)$.

整理，得 $1=f(x)-\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u$.

两边再对 x 求导，得 $0=f'(x)-f(-x)\cdot(-1)$,

即 $$f'(x)=-f(-x). \quad ①$$

上式两边对 x 求导，得 $$f''(x)=f'(-x). \quad ②$$

由①，②得 $$f''(x)=-f(x).$$

即 $$f''(x)+f(x)=0.$$

解此方程得 $$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

注意到 $f(0)=1,f'(0)=-1$, 故 $f(x)=\cos x-\sin x$.

第二讲　快速解题型

§1　极限运算中的快速解题型

一、$x\to 0$ 时，$\frac{0}{0}$ 型快速解法

【解题提示】 常用的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，

(1)$x\sim\sin x$，$x\sim\arcsin x$，$x\sim\tan x$，$x\sim\arctan x$，$x\sim\ln(1+x)$，$e^x-1\sim x$；

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，　$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$.

由等价无穷小的传递性，有

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x).$$

(2) $\frac{x^2}{2}\sim\int_0^x\sin t\,dt$，　$\frac{x^2}{2}\sim\int_0^x\tan t\,dt$，　$\frac{x^2}{2}\sim\int_0^x\arctan t\,dt$，　$\frac{x^2}{2}\sim\int_0^x\arcsin t\,dt$.

由等价无穷小的传递性，有

$$\frac{x^2}{2}\sim\int_0^x\sin t\,dt\sim\int_0^x\tan t\,dt\sim\int_0^x\arcsin t\,dt\sim\int_0^x\arctan t\,dt\sim\int_0^x\ln(1+t)\,dt.$$

注意：乘除运算可用等价无穷小，加减运算不宜使用.

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\arctan 5x}{\ln(1+2x)\cdot\arcsin x}$.

【解】 原式 $\xlongequal[\ln(1+2x)\sim 2x,\ \arcsin x\sim x]{\sin 3x\sim 3x,\ \arctan 5x\sim 5x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\times 5x}{2x\times x}=\frac{15}{2}$.

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x\arcsin t\,dt\right)^2}{\int_0^x\arctan t\,dt\cdot\int_0^x\sin t\,dt}$.

【解】 原式 $\xlongequal[\int_0^x\arctan t\,dt\sim\frac{x^2}{2},\ \int_0^x\sin t\,dt\sim\frac{x^2}{2}]{\int_0^x\arcsin t\,dt\sim\frac{x^2}{2}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{2}x^2}=1$.

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{(\arcsin x)^3}$.

【解】 当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$，分子中的 $\arcsin x$ 不能用其等价无穷小 x 代换.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}.\quad\left(\text{因为}\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2\right)$$

二、1^∞ 型的快速定值法

【解题提示】 设 $\lim f(x)=0, \lim g(x)=\infty$，则 $\lim[1+f(x)]^{g(x)}$ 属于 1^{∞} 型.

由于 $\lim[1+f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln[1+f(x)]} \xlongequal{\ln[1+f(x)]\sim f(x)} e^{\lim g(x)f(x)}$，则 1^{∞} 型未定式，其底为 e，其幂等于括号中 1 后的变量 $f(x)$（包括符号）与括号右上角的方幂 $g(x)$ 乘积的极限.

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{2}{\tan x}}$.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x)\cdot\dfrac{2}{\tan x} \xlongequal[\tan x\sim x]{\sin x\sim x} \lim\limits_{x\to 0}(-x)\cdot\dfrac{2}{x}=-2$，

则原极限 $=e^{-2}$.

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{x^2}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{x^2+3}\right)^{x^2}=e^{-6}$. （因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{6}{x^2+3}\right)x^2=-6$）

【例 6】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot(1+\sin x)}\cdot\dfrac{1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\sin x)\cos x}=\frac{1}{2},$$

故 原极限 $=e^{\frac{1}{2}}$.

三、$x\to\infty$ 时，$\frac{\infty}{\infty}$ 型的快速定值法

【解题提示】 当 $x\to\infty$ 时，若 $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\text{ 中 }x\text{ 的最高次幂}}{g(x)\text{ 中 }x\text{ 的最高次幂}}.$$（即所谓“抓大头”法）

【例 7】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(100x^{50}-2x^2+5)}{\ln(2x^{10}+x^3-1)}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(100x^{50})}{\ln(2x^{10})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 100+50\ln x}{\ln 2+10\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50\ln x}{10\ln x}=5$.

【例 8】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}[(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{8x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4}.$$

§2　导数运算中的快速解题型

一、利用导数的定义求极限

【解题提示】 导数的定义：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad 或 \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

设 $f'(x_0)$ 存在，如果分子的“被减式”的对应符号内的式子减去“减式”的对应符号内的式子恰等于分母，则极限就等于 $f'(x_0)$；如果以上条件不满足，则凑分母使之满足．例如：设 $f'(x_0)$ 存在，且 $x\to x_0$ 时，$\varphi(x)\to x_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[\varphi(x)]-f(x_0)}{\varphi(x)-x_0}=f'(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[\varphi(x)]-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f[\varphi(x)]-f(x_0)}{\varphi(x)-x_0}\cdot\frac{\varphi(x)-x_0}{x-x_0}$$

$$=f'(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-x_0}{x-x_0}.$$

【例 9】 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}=$ ________；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0)-f(x_0+x)}=$ ________．

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(x_0)$；

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0)-f(x_0+x)}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0)-f(x_0+x)}{-x}}\cdot(-1)$

$=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，$(f'(x_0)\neq 0)$．

【例 10】 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^3\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，令 $F(x)=f[\varphi(x)]$，求 $F'(0)$．

【解】 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3\cos\frac{1}{x})-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3\cos\frac{1}{x})-f(0)}{x^3\cos\frac{1}{x}-0}\cdot\dfrac{x^3\cos\frac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3\cos\frac{1}{x})-f(0)}{x^3\cos\frac{1}{x}-0}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cos\dfrac{1}{x})=f'(0)\cdot 0=0.$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com