大学数学多媒体系列教材

总主编 于义良

线性代数基础教程

主编 王莉琴 李乃华

中国人民大学出版社

大学数学多媒体系列教材
总主编 于义良

线性代数基础教程

主　编 王莉琴 李乃华
副主编 王海明 胡　健

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数基础教程/王莉琴，李乃华主编
北京：中国人民大学出版社，2004
(大学数学多媒体系列教材)
ISBN 7-300-05892-2

Ⅰ.线…
Ⅱ.①王…②李…
Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087819 号

大学数学多媒体系列教材
总主编　于义良
线性代数基础教程
主　编　王莉琴　李乃华
副主编　王海明　胡　健

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242(总编室)		010－62511239(出版部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京东君印刷有限公司		
开　本	787×965 毫米 1/16	版　次	2004 年 8 月第 1 版
印　张	10 插页 1	印　次	2006 年 7 月第 2 次印刷
字　数	184 000	定　价	15.00 元

总　序

随着社会的不断进步，科学和技术的不断创新，越来越需要具有一定数学思维和数学修养的高数学素质人才．因此，在目前高等学校教学计划中，大学数学（包括高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计等）课程的教学都占有重要或首要的地位．

为了主动适应高等教育从精英教育到大众化教育过渡的需要，尤其是许多学校实行按学科大类招生后，对大学数学课程都实行了分层教学，即按照不同的专业需要设计教学要求．这样，过去几乎是“一刀切”的大学数学教学内容和教学要求必然就不适合当前大学数学实际教学的需要．比如理科的应用心理学专业、工科的工业设计专业、管理学科的公共事业管理专业、人文学科的语言类专业或法学专业、高职高专等，这此专业开设大学数学课程的共同点是课时少、大部分学生的数学基础薄弱，是以培养学生数学思维、数学习惯和数学素质的应用数学能力为目的．所以要选择一套适宜的教材，目前尚不容易．由此，我们在主持完成天津市教学改革项目《经济数学与信息技术课程整合的研究和实践》的过程中，便萌生了编写一套适应上述新形势需要的大学数学系列教材的想法．经过近三年的教学实践摸索，两届学生的教学试点经验总结，组织具有多年丰富教学经验的教师通力协作，这套“大学数学多媒体系列教材”终于与大家见面了．

这套教材具有以下显著特点：

1．传统内容与信息技术的有机融合．自始至终以培养学生应用数学能力为宗

旨，在激发学生学习兴趣，以及教会学、教会用上下功夫，把信息技术（如 Excel、Mathematica）融入传统教学内容中，每一章都增加了一节数学实验内容，突出学、做相互渗透，将过去只会解条件理想化的书本题目转化为主动去解决自己身边的实际课题.

2. 基本知识与内容体系的合理整合. 自始至终强调基础知识、基本思想、基本方法，删除了重技巧性的繁、难、偏、旧的内容，适度增加了数学思想背景资料和应用前景案例. 也就是将过去“两头轻、中间重、即使学会也无用”的那一套转化为全程式的双向释译，即由实际问题引入，经过抽象归纳得到理论支持，并提出解决方案，再返回去指导实际，甚至推广到更普遍、更广泛的领域. 高等数学在物理、经济、几何、管理方面的应用普遍，线性代数引入许多生活中的实例，概率论与数理统计突出统计背景与应用等，使内容体系更趋合理，这对少学时的本科专业和多学时的高职高专是适合的.

3. 通过这套多媒体系列教材的学习，学生不仅可以学到必需的大学数学基本知识，而且还可以系统地学会和掌握数学软件 Mathematica 和电子表格软件 Excel 的使用，以及获取信息、处理信息的技术.

4. 这套多媒体系列教材都配有教学光盘，其中模拟演示板块数学思想鲜明，将抽象内容可视化、直观化；教学积件板块是开放式和可组合式的，更便于教师根据自己的思路和学生的层次去设计每一节课的内容；单元测试板块既对学生学习情况进行跟踪检验，又对学生掌握单元知识起着重要的学习指导作用.

5. 这套多媒体系列教材在“化抽象为直观、化枯燥为有趣、化技巧为方法、化繁难为简易、化理论性为应用性”诸方面都做了有益的尝试，并收到良好的效果.

我曾到澳大利亚墨尔本 Latrobe 大学学习考察，亲身体验到他们的大学数学教学没有教考分离，但绝对又不是教什么就练什么考什么；他们所讲的内容比我们容易，但培养出来的学生在创新思想和应用数学解决实际问题的能力方面却很强；他们使用的教材没有统一要求，教材很厚，教师课堂讲的很少，大部分是指导学生去阅读实践，非常注重学生数学能力的培养；他们的数学老师不比我们累，但教学质量却比我们好；等等，这不能不引起我们每一个大学数学教育者的反思. 现在，我们奉献给大家的这套大学数学多媒体系列教材也可以说是反思后的一些实践成果.

尽管我们努力了，但可能还会有不尽如人意的地方，敬请广大读者指正. 联系方式是 Email：yuyil@eyou.com

于义良

2004 年 7 月

前　言

线性代数是代数学科的一个分支，主要用于处理线性关系问题. 向量空间、线性方程组、线性变换以及与此相联系的矩阵理论构成了线性代数的中心内容.线性代数在工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛用途，线性代数的计算方法是计算数学的一个重要方面.

在科学技术迅猛发展的今天，各个领域对于所需人才的数学基础的要求不断提高. 线性代数作为一门数学基础课，其本身理论性强，计算繁杂，学起来感觉枯燥、抽象. 如何改进教学内容和教学方法以能提高学生的兴趣，增强学生学习的主动性？如何将数学的思想方法渗透给学生的同时，又可以使学生掌握目前和日后所需要线性代数方面的计算技能？从这一宗旨出发，我们依据多年积累的教学经验和近年来应用计算机辅助教学的实践，为对数学基础有一定要求的各专业的学生编写了这部教材，期望它能成为一本适用的教材.

本教程具有以下特点：

1. 结构合理，思路流畅，由浅入深，简明易懂，适当结合实例以助理解内容和了解线性代数的应用背景；

2. 减少一些繁琐的定理证明和公式推导，增加了较多的例题；

3. 适当增加了计算机辅助教学的内容，介绍了数学软件 Mathematica4. 0，使

学生能够在学习线性代数的基本概念、基本理论和运算方法的基础之上掌握运用数学软件进行复杂计算的技能.

参加本教材编写的人员有:王莉琴、李乃华、王海明、胡健.

本教程适合学时少的本科专业和高职高专的学生使用,也可作为个人自修线性代数课程的入门参考书,书中带 * 号的内容可根据课时的安排选用.

本教程在编写过程中,参考了多本教程和专著,并引用了其中部分例题和习题,在此一并表示感谢. 由于作者水平有限,难免有错,欢迎批评指正.

编著者

2004 年 6 月

目　录

第1章

向量与矩阵

向量和矩阵是线性代数中的重要概念和工具，矩阵理论和方法贯穿应用于线性代数的各个方面．作为备用知识，我们首先给出向量的基本知识，然后介绍矩阵的概念、运算和部分应用．

引例：一个公司有5家零售店，第一家有10台电视机(t)，15个立体电唱机(s)，9个磁带架(d)，12个录音机(r)；第二家有20t，14s，8d，5r；第三家有16t，8s，15d，6r；第四家有25t，15s，7d，16r；第五家有5t，12s，20d，18r．各家零售店的存货如何表示能够清晰、简洁、一目了然？若公司又发货给它的零售店，新的存货水平分别是多少？若4种商品的价格分别为300元，250元，175元，125元，各个零售店的存货价值是多少？向量与矩阵便是解决这些问题的有力工具．

§1.1　向量基本知识

1.1.1　二维向量和三维向量

1. 二维向量(平面向量)

定义1.1.1　在平面直角坐标系中，取一个固定点O为始点(一般称为原点)，

取另一点 A 为终点，作一线段 OA，该线段既有大小又有方向，这样的线段称为**平面向量**，记作 $\boldsymbol{OA}$ 或 α.

若向量 $\boldsymbol{OA}$ 的终点 A 与始点 O 重合，则该向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$，其大小为零，方向任意.

与向量 $\boldsymbol{OA}$ 大小相等，方向相反的向量称为 $\boldsymbol{OA}$ 的负向量，即 $-\alpha=-\boldsymbol{OA}$.

规定：当两个向量的终点重合时，称这两个向量相等.

下面来定义平面向量的加法和数乘运算. 这两种运算统称**线性运算**.

定义 1.1.2　加法　设 $\alpha=\boldsymbol{OA}$，$\beta=\boldsymbol{OB}$，称 $\alpha+\beta=\gamma$ 为这两个向量的和，$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=\eta$ 为两个向量的差，如图 1.1.1 所示.

图 1.1.1

数乘向量　设 α 为一平面向量，k 为一实数，称 $k\alpha$ 为数 k 与向量 α 的数乘. $k\alpha$ 是大小为 α 的 k 倍的向量，当 $k>0$ 时，方向与 α 相同；当 $k<0$ 时，方向与 α 相反；当 $k=0$ 时，$k\alpha=\mathbf{0}$. 如图 1.1.2 所示.

图 1.1.2

设 α,β,γ 为平面向量，k,m 为任意常数，向量加法和数乘运算满足以下八条规律：

(1) 加法交换律　　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$,

(2) 加法结合律　　$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$,

(3) $\exists$ 零向量 $\mathbf{0}$　　$\alpha+\mathbf{0}=\alpha$,

(4) $\exists$ 负向量 $-\alpha$　　$\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$,

(5) $1\alpha=\alpha$,

(6) $k(m\alpha)=(km)\alpha$,

(7) $(k+m)\alpha = k\alpha + m\alpha$,

(8) $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$.

平面上所有这样的向量构成集合 $\boldsymbol{R}^2$，$\boldsymbol{R}^2$ 对于加法和数乘运算封闭，即若 α，$\beta \in \boldsymbol{R}^2$，则有 $\alpha+\beta \in \boldsymbol{R}^2$，$k\alpha \in \boldsymbol{R}^2$，且满足上述八条运算律，称这样的集合 $\boldsymbol{R}^2$ 为**平面向量空间**.

在平面解析几何中，当引进坐标(或分量)的概念后我们知道，实际上在平面直角坐标系中，一个平面向量惟一对应着一个二维有序数组 (a_1,a_2)，而线性运算可以归结为坐标之间的运算，即

设 $\alpha=(a_1,a_2)$，$\beta=(b_1,b_2)$，则有

$$\alpha+\beta=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2),$$

$$k\alpha=k(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2)\qquad k\in\mathbf{R}$$

因此，平面向量空间 $\boldsymbol{R}^2$ 又称为二维向量空间，$\boldsymbol{R}^2$ 中的平面向量也称为二维向量.

2. 三维向量(空间向量)

依照前面对平面向量的讨论，我们可以得出三维向量和三维向量空间的概念.

定义 1.1.3　设 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ 为空间向量，所有这样的向量构成集合 $\boldsymbol{R}^3$，如果在 $\boldsymbol{R}^3$ 上对于加法和数乘运算封闭，即若 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}^3$，则有 $\alpha+\beta\in\boldsymbol{R}^3$，$k\alpha\in\boldsymbol{R}^3$ 且满足上述的八条运算律，称这样的集合 $\boldsymbol{R}^3$ 为**三维向量空间**.

三维向量空间中的空间向量即为**三维向量**，在空间直角坐标系中，一个三维向量惟一对应着一个三维有序数组 (a_1,a_2,a_3)，三维向量空间中向量的线性运算可以归结为坐标之间的运算，即

设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)$，则有

$$\alpha+\beta=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),$$

$$k\alpha=k(a_1,a_2,a_3)=(ka_1,ka_2,ka_3)\qquad k\in\mathbf{R}$$

在空间解析几何和物理学中，常常涉及到向量的数量积问题.

定义 1.1.4　已知向量 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}^3$，称 $[\alpha,\beta]=|\alpha||\beta|\cos\theta$ 为 α,β 的**数量积**，又称为 α,β 的内积，其中 $|\alpha|$，$|\beta|$ 分别为向量 α,β 的**模**，θ 为 α,β 的**夹角**.

设 α,β 的坐标分别为 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)$，则有

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta]&=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

向量 α,β 相互垂直时，α,β 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则称 α,β **正交**，容易证得两个向量正交的充分必要条件是其内积 $[\alpha,\beta]=0$.

由$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2$,得$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}$.

以上概念和结果都可以推广到n维向量中去,虽然当$n>3$时的向量已经没有直观的几何意义,但是可以借助几何向量的术语将向量推广到n维情形.

1.1.2 n 维向量

定义 1.1.5 n个数组成的有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为**n维向量**,其中$a_i(i=1,2,\cdots,n)$称为n维向量的第i个分量.一般用小写黑斜体希腊字母$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$等来表示向量,记作$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

当$n=2,3$时即为解析几何中的平面向量和空间向量.

分量都是零的n维向量$(0,0,\cdots,0)$称为零向量,用黑体字$\mathbf{0}$表示.

向量可以写成列的形式,如$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$称为列向量,也可以写成行的形式,如$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为行向量.列向量常记作$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,行向量常记作$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

行向量和列向量统称为向量.不需要细分时,记作$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

例如,本章开头例子中给出,四种商品价格可以写作:

$$(300,250,175,125)\text{ 或 }\begin{pmatrix}300\\250\\175\\125\end{pmatrix}.$$

若两个n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$的对应分量都相等,即$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$,则称这两个向量是相等的,记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$称为向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的**负向量**,记作$-\boldsymbol{\alpha}$.

例 1.1.1 若$(a,b)=(3,-2)$,则有$a=3,b=-2$.

例 1.1.2 若$(x,y,z)^{\mathrm{T}}=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$,则有$x=0,y=1,z=2$.

定义 1.1.6 n维向量的线性运算

加法 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是两个$n$维向量,向量$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$称为$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的和,记作$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

减法 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

数乘 设 k 是一个数，向量 $(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与数 k 的数量乘积，简称**数乘**，记作 $k\alpha$.

n 维向量的线性运算满足八条基本运算规律：

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

(2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

(3) $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$,

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$,

(5) $1\alpha = \alpha$,

(6) $k(m\alpha) = (km)\alpha$, （其中 km 为数，α,β,γ 为 n 维向量）

(7) $(k+m)\alpha = k\alpha + m\alpha$,

(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.

另外，由 $k\alpha$ 定义可得：$0\alpha = \mathbf{0}$，$(-1)\alpha = -\alpha$，$k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

若 $k\alpha = \mathbf{0}$ 则有 $k = 0$ 或 $\alpha = \mathbf{0}$.

如果向量分量均为实数，则称该向量为实向量，由实 n 维向量组成的集合，对线性运算封闭，即任取 α,β，有 $\alpha + \beta$，$k\alpha$ 仍属于该集合，且满足上述八条运算律，则称这个集合为 **n 维向量空间**，记作 R^n.

当 $n = 1$ 时，即为直线空间；$n = 2$ 时，即为二维平面空间；$n = 3$ 时，即为三维立体空间.

在实际问题中常常涉及多个指标，这就需要应用 $n > 3$ 的向量进行计算和研究.

例 1.1.3 某仓库储存 4 种货物 A、B、C、D. 存储情况见表 1.1.1.

表 1.1.1

货物品种	A	B	C	D
第一次调进	100	250	500	200
第二次调进	200	-100	0	250
现存货物量	300	150	500	450

注：负号表示调出货物.

设 $\alpha_1 = (100, 250, 500, 200)$，$\alpha_2 = (200, -100, 0, 250)$，则现存货物量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 = (300, 150, 500, 450)$. 这就转化为四维向量的计算问题.

例 1.1.4 n 元线性方程 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$ 的系数可以写作行向量形式，即 $\alpha = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$，各个变量常常写作列向量形式，即为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}.$$

例 1.1.5 已知 n 维向量

$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$，求 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+n\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

解:显然,$\boldsymbol{\beta}=(1,2,\cdots,n)$.

这时我们称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的线性组合.

一般地,我们称由线性运算组合成的式子 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 s 个向量的线性组合,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 n 维向量,$k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为实数.

例 1.1.6 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)$.

(1) 求 $\boldsymbol{\beta}=5\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$;

(2) 若 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\beta})$,求 $\boldsymbol{\beta}$.

解:(1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=(5,5,5,5)+(1,1,-1,-1)\\&\quad-(1,-1,1,-1)-(1,-1,-1,1)\\&=(6,6,4,4)-(2,-2,0,0)=(4,8,4,4).\end{aligned}$$

(2) 由已知可得 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4=(-3,5,3,3)$.

为了便于后面一些问题的讨论,下面介绍 n 维向量的内积.

定义 1.1.7 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是两个 n 维向量,数

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

称为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积.记作$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

若设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是两个 n 维列向量,则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积也可以记作

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

本章开头的引例中,若 4 种商品的价格向量为(300,250,175,125),第二发货

口的存货量为$\begin{pmatrix}20\\14\\8\\5\end{pmatrix}$，则第二发货口的存货价值为

$$(300,250,175,125)\begin{pmatrix}20\\14\\8\\5\end{pmatrix}=11\ 525.$$

向量的内积具有如下性质：

(1) **对称性**　$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$；

(2) **线性性**　对任意实数 k,m，有

$$[k\boldsymbol{\alpha}+m\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[m\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+m[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]；$$

(3) **非负性**　$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$，且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时等号成立.

两个向量的内积$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$ 时，我们称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ **正交**.

由$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2$，得 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}$.

模等于 1 的向量称为单位向量，$\boldsymbol{\alpha}^0=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的单位化向量.

例 1.1.7　已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{\alpha}|$，$\boldsymbol{\beta}^0$ 及 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积，并判定 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是否正交.

解：$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{15}$，

$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{4^2+2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{30}$，

$$\boldsymbol{\beta}^0=\frac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|}=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{\sqrt{30}}\\[2mm]\dfrac{2}{\sqrt{30}}\\[2mm]\dfrac{3}{\sqrt{30}}\\[2mm]\dfrac{-1}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_4b_4 \\ &= 2\times 4 + 1\times 2 + (-3)\times 3 + 1\times(-1) \\ &= 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交.

§1.2 矩阵及其运算

矩阵是线性代数的研究对象和重要工具,许多理论问题和实际问题都可以用矩阵来表示,并通过矩阵方法得以解决. 本节介绍矩阵的概念、运算和矩阵的初等变换等.

1.2.1 矩阵

定义 1.2.1 由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

称为 $m\times n$ 阶的**矩阵**. 矩阵一般用大写黑斜体字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等表示,式(1.2.1)可以表示成 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,$m\times n$ 称为**矩阵的阶数**.

a_{ij} 称为矩阵的元素,简称元. 它位于数表中第 i 行第 j 列($i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$). i,j 分别称为矩阵元素的行标与列标. 本书所讨论的矩阵都是实数矩阵,即元素 a_{ij} 都是实数. 例如:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3} \tag{1.2.2}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 3} \tag{1.2.3}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \tag{1.2.4}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$