数学竞赛题库

LIANSAI chuzhong

全国高中数学联赛

SHUXUE

历届真题全编详解

开明数学工作室 组编

开明出版社

写在前面

在这套《真题》即将出版之际，作为编者，我们有很多话想对读者朋友们说。前人说过，“数学是思维的体操”，“聪明人的游戏”。毫无疑问，作为数学普及活动的各种数学竞赛（大到IMO，小到地区性的赛事），曾经润泽了众多的师生。课外数学活动在启发数学学习兴趣和提高解决数学问题能力方面所发挥的作用，就我国基础教育来说，不是可有可无，而是不可或缺。也正因如此，几十年来，包括数学竞赛在内的数学课外活动受到广大师生和家长的长期欢迎和支持。

早在五十年代，以华罗庚教授为代表的我国老一辈著名数学家就十分重视培养青少年优秀人才，倡导并组织了多次数学竞赛活动，吸引了大批数学爱好者。1981年，“全国高中数学联赛”由中国数学会开始举办，这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大中学师生的欢迎，也得到了教育行政部门、各级科学技术协会以及社会各阶层人士的肯定和支持。“全国高中数学联赛”除作为大众化普及型的数学课外活动，还与“全国中学生数学冬令营”衔接，有选拔的作用。

众所周知，各类数学竞赛的命题大多由术业专攻、经验丰富的专家、老师负责。因此，就题目的质量来说，无论是命题深度，还是解题的灵活度，都远超过同学们日常所做的题目。对“全国高中联赛”历年的试题，经过认真审题，我们努力给出尽可能多并且实用的解法，帮助读者打开思路；对有难度的题目我们会给出最原始的解法，从入手点开始写，这样才能理清思路的来源，进而才能取得“举一反三”的效果。我们尤其注重将正确的思维方法传授给读者，而不是向读者进行高深概念的灌输，使读者得到真正意义上的提高。

本书的大部分编者都很年轻，有一些是刚刚走上工作岗位的青年教师，更多的则是还就读于清华、北大、中科院的研究生，不过有一点我们很值得读者信任，就是我们几乎全部都自小经过各大奥数赛事的历练（我们中有小学奥赛、“我爱数学”夏令营、华罗庚金杯、希望杯、迎春杯、初中数学联赛、高中数学联赛、高中数学冬令营的佼佼者，甚至IMO的金牌），如今又登上奥数讲台，结合我们的亲身经验，从事各类奥数培训。

感谢开明出版社给我们提供了这样一个机会，同时也感谢开明使我们这些人彼此结识，不仅仅我们每个人都多了很多朋友，而且在互相的交流中我们自身也得到了提高。

编　者

2005年1月

目　录

1981 高中数学联赛

试题部分

一、选择题

下面7个题目各提出四个答案，将你认为正确的答案的英文字母代号填写在题后的括号内.

1. 条件甲：两个三角形的面积和二条边对应相等.

条件乙：两个三角形全等.

(A)甲是乙的充分必要条件　　(B)甲是乙的必要条件

(C)甲是乙的充分条件　　(D)甲不是乙的必要条件，也不是充分条件

答(　　)

2. 条件甲：$\sqrt{1+\sin\theta}=a$.

条件乙：$\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=a$.

(A)甲是乙的充分必要条件　　(B)甲是乙的必要条件

(C)甲是乙的充分条件　　(D)甲不是乙的必要条件，也不是充分条件

答(　　)

3. 设 $a\neq\dfrac{k\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，$T\equiv\dfrac{\sin a+\tan a}{\cos a+\cot a}$.

(A) T 取负值　　(B) T 取非负值

(C) T 取正值　　(D) T 取值可正可负

答(　　)

4. 下面四个图形中，哪一个面积最大？

(A) $\triangle ABC$：$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$AC=\sqrt{2}$

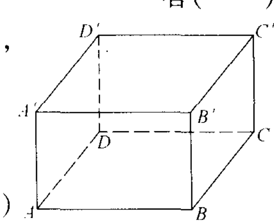
(B)梯形：两对角线长度分别为$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，夹角为75°

(C)圆：半径为1

(D)正方形：对角线的长度为2.5

答(　　)

5. 给出长方体 $ABCD—A'B'C'D'$，下列十二条直线：AB'，BA'，CD'，DC'，AD'，DA'，BC'，CB'，AC，BD，$A'C'$，$B'D'$中有多少对异面直线？



(A)30对　　(B)60对

(C)24对　　(D)48对

答(　　)

6. 在坐标平面上有两个区域 M 和 N. M 是由 $y\geqslant 0$, $y\leqslant x$ 和 $y\leqslant 2-x$ 这三个不等式确定的. N 是随 t 变化的区域,它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 所确定的,t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 1$. 设 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)$. 则 $f(t)$ 为:

(A) $-t^2+t+\frac{1}{2}$　　(B) $-2t^2+2t$

(C) $1-\frac{1}{2}t^2$　　(D) $\frac{1}{2}(t-2)^2$

答(　　)

7. 对方程 $x|x|+px+q=0$ 进行讨论,下面的结论中,哪个是错误的?

(A)至多有三个实根　　(B)至少有一个实根

(C)仅当 $p^2-4q\geqslant 0$ 才有实根　　(D)当 $p<0$ 和 $q>0$ 时,有三个实根

答(　　)

二、下列表中的对数值有两个是错误的,请予纠正.

x	0.021	0.27	1.5	2.8	3	5
$\lg x$	$2a+b+c-3$	$6a-3b-2$	$3a-b+c$	$1-2a+2b-c$	$2a-b$	$a+c$
x	6	7	8	9	14	
$\lg x$	$1+a-b-c$	$2(b+c)$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$1-c+2b$	

三、在圆 O 内,弦 CD 平行于弦 EF,且与直径 AB 交成 $45°$ 角. 若 CD 与 EF 分别交直径 AB 于 P 和 Q,且圆 O 的半径长为 1.

求证:$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$.

四、组装甲、乙、丙三种产品,需用 A,B,C 三种零件. 每件甲需用 A,B 各 2 个;每件乙需用 B,C 各 1 个;每件丙需用 2 个 A 和 1 个 C. 用库存的 A,B,C 三种零件,如组装成 p 件甲产品、q 件乙产品和 r 件丙产品,则剩下 2 个 A 和 1 个 B,但 C 恰好用完. 试证:无论怎样改变产品甲、乙、丙的件数,也不能把库存的 A,B,C 三种零件都恰好用完.

五、一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$. 一个球从 AB 的中点 P 击出,击中 BC 边上的某点 Q,并且依次碰击 CD,DE,EF,FA 各边,最后击中 AB 边上的某一点,设 $\angle BPQ=\theta$,求 θ 的取值范围.

提示:利用入射角等于反射角的原理.

1982 高中数学联赛

试题部分

一、选择题

本题共有 8 个小题，每一小题都有(A)、(B)、(C)、(D)四个答案供选择，其中有一个且只有一个答案是正确的，请把你认为正确的那个答案前的代号写在题后的括号内.

1. 如果凸 n 边形 $F(n\geqslant 4)$ 所有对角线都相等，那么

(A) $F\in\{$四边形$\}$

(B) $F\in\{$五边形$\}$

(C) $F\in\{$四边形$\}\cup\{$五边形$\}$

(D) $F\in\{$各边相等的多边形$\}\cup\{$内角相等的多边形$\}$

答(　　)

2. 极坐标方程 $\dfrac{1}{1-\cos\theta+\sin\theta}$ 所确定的曲线是

(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 双曲线　(D) 抛物线

答(　　)

3. 如果 $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)]=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)]=0$，那么

(A) $z<x<y$　(B) $x<y<z$　(C) $y<z<x$　(D) $z<y<x$

答(　　)

4. 由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线所围成的图形的面积是

(A) 1　(B) 2　(C) π　(D) 4

答(　　)

5. 对任何 $\varphi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，都有

(A) $\sin\sin\varphi<\cos\varphi<\cos\cos\varphi$　(B) $\sin\sin\varphi>\cos\varphi>\cos\cos\varphi$

(A) $\sin\cos\varphi>\cos\varphi>\cos\sin\varphi$　(A) $\sin\cos\varphi<\cos\varphi<\cos\sin\varphi$

答(　　)

6. 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ (k 为实数)的两个实数根，$x_1^2+x_2^2$ 的最大值是

(A) 19　(B) 18　(C) $5\dfrac{5}{9}$　(D) 不存在

答(　　)

7. 设 $M=\{(x,y):|xy|=1,x>0\}$，$N=\{(x,y):\arctan x+\arctan y=\pi\}$，那么

(A) $M\cup N=\{(x,y):|xy|=1\}$

(B) $M\cup N=M$

(C) $M\cup N=N$

(D) $M\cup N=\{(x,y):|xy|=1$,且 x,y 不同时为负数$\}$

答(　　)

8. 当 a,b 是两个不相等的正数时,下列三个代数式:

甲:$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$,　　乙:$(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}})^2$,

丙:$(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b})^2$.

中间,值最大的一个　　答(　　)

(A)必定是甲　　(B)必定是乙

(C)必定是丙　　(D)一般并不确定,而与 a,b 的取值有关

答(　　)

二、已知四面体 $SABC$ 中,$\angle ASB=\frac{\pi}{2}$,$\angle ASC=\alpha(\theta<\alpha<\frac{\pi}{2})$,$\angle BSC=\beta(0<\beta<\frac{\pi}{2})$,以 SC 为棱的二面角的平面角为 θ.

求证:$\theta=\pi-\arccos(\cot\alpha\cot\beta)$.

三、已知:(1)半圆的直径 AB 长为 $2r$;(2)半圆外的直线 L 与 BA 的延长线垂直,垂足为点 T,$|AT|=2a(2a<\frac{r}{2})$;(3)半圆上有相异两点 M,N,它们与直线 l 的距离 $|MP|$、$|NQ|$满足条件 $\frac{|MP|}{|AM|}=\frac{|NQ|}{|AN|}=1$.

求证:$|AM|+|AN|=|AB|$.

四、已知边长为 4 的正三角形 ABC. D,E,F 分别是 BC,CA,AB 上的点,且 $|AE|=|BF|=|CD|=1$,连接 AD,BE,CF,交成 $\triangle RQS$. P 点在 $\triangle RQS$ 内及其边上移动,P 点到 $\triangle ABC$ 三边的距离分别记作 x,y,z.

(1)求证:当 P 点在 $\triangle RQS$ 的顶点位置时,乘积 xyz 有极小值;

(2)求上述乘积 xyz 的最小值.

五、已知圆 $x^2+y^2=r^2$(r 为奇数),交 x 轴于 $A(r,0)$,$B(-r,0)$,交 y 轴于 $C(0,-r)$,$D(0,r)$,$P(u,v)$是圆周上的点,$u=p^m$,$v=q^n$(p,q 都是质数,m,n 都是自然数)且 $u>v$. 点 P 在 x 轴和 y 轴上的射影分别是 M,N.

求证:$|AM|$、$|BM|$、$|CN|$、$|DN|$分别是 1,9,8,2.

1983 高中数学联赛

试题部分

第 一 试

一、选择题

本题共 8 个小题. 每一小题都有代号为(A)、(B)、(C)、(D)四个答案供选择,其中有一个且只有一个答案是正确的,请把你认为正确的那个答案前的代号写在题后的括号内.

1. 设 p,q 是自然数,条件甲:p^3-q^3 是偶数;条件乙:$p+q$ 是偶数,那么,

(A)甲是乙的充分而非必要条件

(B)甲是乙的必要而非充分条件

(C)甲是乙的充要条件

(D)甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答(　　)

2. $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$的值是属于区间

(A)$(-2,-1)$　　　　(B)$(1,2)$

(C)$(-3,-2)$　　　　(D)$(2,3)$

答(　　)

3. 已知等腰$\triangle ABC$ 的底边 BC 及高 AD 的长都是整数,那么 $\sin A$ 和 $\cos A$ 中,

(A)一个是有理数,另一个是无理数

(B)两个都是有理数

(C)两个都是无理数

(D)是有理数还是无理数要根据 BC 和 AD 的数值来确定

答(　　)

4. 已知 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$. 那么,使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是:

(A)$a\geqslant 1\frac{1}{4}$　　(B)$a=1\frac{1}{4}$　　(C)$a\geqslant 1$　　(D)$0<a<1$

答(　　)

5. 已知函数 $f(x)=ax^2-c$ 满足:

$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$,$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$. 那么,$f(3)$应满足:

(A)$7\leqslant f(3)\leqslant 26$　　　　(B)$-4\leqslant (3)\leqslant 15$

(C) $-1 \leqslant f(3) \leqslant 20$　　　　(D) $-\frac{28}{3} \leqslant f(3) \leqslant \frac{35}{3}$

答(　　)

6. 设 a,b,c,d,m,n 都是正实数.

$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}, Q=\sqrt{ma+nc} \cdot \sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$,那么:

(A) $P \geqslant Q$

(B) $P \leqslant Q$

(C) $P<Q$

(D) P,Q 间的大小关系不确定,而与 m,n 的大小有关

答(　　)

7. 在正方形 $ABCD$ 所在平面上有点 P,使 $\triangle PAB$,$\triangle PBC$,$\triangle PCD$,$\triangle PDA$ 都是等腰三角形. 那么,具有这样性质的 P 点个数共有:

(A)9 个　　(B)17 个　　(C)1 个　　(D)5 个

答(　　)

8. 任间 $\triangle ABC$,设它的周长、外接圆半径长与内切圆半径长分别为 l,R 与 r,那么:

(A) $l>R+r$　　(B) $l \leqslant R+r$

(C) $\frac{1}{6}<R+r<6l$　　(D)(A)(B)(C)三种关系都不对

答(　　)

二、填空题

1. 在 $\triangle ABC$ 中 ,$\sin A=\frac{3}{5}$,$\cos B=\frac{5}{13}$,那么 $\cos C$ 的值等于________.

2. 三边均为整数,且最大边长为 11 的三角形,共有________个.

3. 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形,这样两个多面体的内切球的半径之比是一个既约分数 $\frac{m}{n}$. 那么,积 $m \cdot n$ 是________.

第　二　试

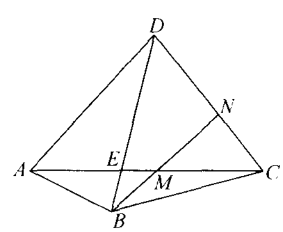
一、求证:$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$,其中 $x \in[-1,1]$.

二、函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义,$f(0)=f(1)$,如果对于任意不同的 $x_1,x_2 \in[0,1]$,都有 $|f(x_2)-f(x)_1|<|x_2-x_1|$.

求证:$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

三、如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\triangle ABD$,$\triangle BCD$,$\triangle ABC$ 的面积比是 3:4:1,点 M,N 分别在 AC,CD 上,满足 $AM:AC=CN:CD$,并且 B,M,N 三点共线.

求证:M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点.



四、在六条棱分别为2,3,3,4,5,5的所有四面体中,最大的体积是多少?证明你的结论.

五、函数 $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A,B 有关.问 A,B 取什么值时 M 为最小?证明你的结论.

1984 高中数学联赛

试题部分

第 一 试

一、选择题

本题共有 8 个小题. 每一小题都给出代号为(A)、(B)、(C)、(D)的四个结论,其中有一个结论是正确的,请把正确结论的代号写在题后的圆括号内.

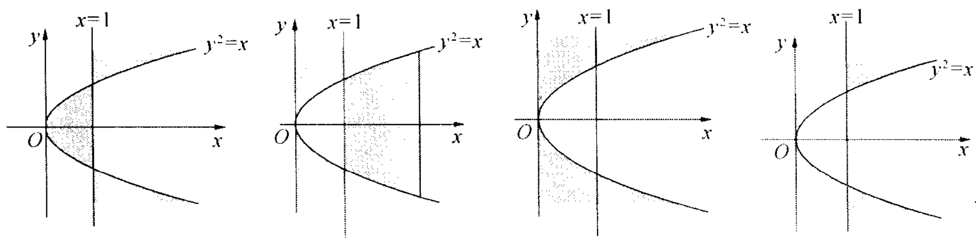
1. 集合 $S=\{\overline{z^2}\mid \arg z=a, a\in\mathbf{R}\}$ 在复平面的图形是

(A)射线 $\arg z=2a$　　(B)射线 $\arg z=-2a$

(C)射线 $\arg z=-a$　　(D)上述答案都不对

答(　　)

2. 下列四个图的阴影部分(不包括边界)满足不等式 $\log_x(\log_x y^2)>0$ 的是



(A)　(B)　(C)　(D)

答(　　)

3. 对所有满足 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$ 的 m,n,极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示的不同双曲线条数是

(A)15　　(B)10

(C)7　　(D)6

答(　　)

4. 方程 $\sin x=\lg x$ 的实根是

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)大于 3

答(　　)

5. 若 $a>0, a\neq 1$, $F(x)$ 是奇函数,则 $G(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 是

(A)奇函数　　(B)偶函数

(C)不是奇函数也不是偶函数　　(D)奇偶性与 a 的具体数值有关

答(　　)

6. 若 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$,则下列等式中正确的是

(A) $F(-2-x)=-2-F(x)$ (B) $F(-x)=F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

(C) $F(x^{-1})=F(x)$ (D) $F(F(x))=-x$

答( )

7. 若动点 $P(x,y)$ 以等角速度 ω 在单位圆上逆时针运动,则点 $Q(-2xy,y^2-x^2)$ 的运动方程是

(A)以角速度 ω 在单位圆上顺时针运动

(B)以角速度 ω 在单位圆上逆时针运动

(C)以角速度 2ω 在单位圆上顺时针运动

(D)以角速度 2ω 在单位圆上逆时针运动

答( )

8. 若四面体的一条棱长是 x,其余棱长都是 1,体积是 $F(x)$,则函数 $F(x)$ 在其定义域上

(A)是增函数但无最大值

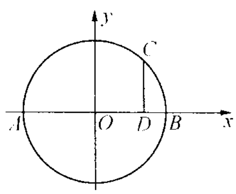
(B)是增函数且有最大值

(C)不是增函数且无最大值

(D)不是增函数但有最大值 答( )

二、填空题

1. 如图,AB 是单位圆的直径,在 AB 上任取一点 D,作 $DC\perp AB$,交圆周于 C. 若 D 点的坐标为 $(x,0)$,则当 $x\in($, $)$ 时,线段 AD,BD,CD 可构成三角形.



2. 方程 $\cos\frac{x}{4}=\cos x$ 的通解是( ),在 $(0,24\pi)$ 内,不相同的解有( )个.

第 二 试

一、下列命题是否正确? 若正确,请给予证明.

1. 若 P,Q 是直线 l 同侧的两个不同点,则必存在两个不同的圆,通过点 P,Q 且和直线 l 相切.

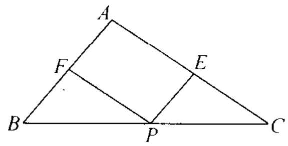
2. 若 $a>0,b>0$ 且 $a\neq1,b\neq1$,则 $\log_a b+\log_b a\geqslant2$.

3. 设 A,B 是坐标平面上的两个点集,$C_r=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$. 若对任何 $r\geqslant0$ 都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$,则必有 $A\subseteq B$.

二、已知两条异面直线 a,b 所成的角为 θ,它们的公垂线 $A'A$ 的长度为 d,在直线 a,b 上分别取点 E,F,设 $A'E=m,AF=n$,求 EF.(A'在直线 a 上,A 在直线 b 上)

三、如图,在 $\triangle ABC$ 中,P 为边 BC 上任意一点,$PE/\!/BA,PF/\!/CA$. 若 $S_{\triangle ABC}=1$,证明 $S_{\triangle BPF}$,

$S_{\triangle PCE}$和$S_{\square PEAF}$,中至少有一个不小于$\frac{4}{9}$.(S表示图形的面积)



四、设a_n是$1^2+2^2+\cdots+n^2$的个位数字,$n=1,2,3,\cdots$试证$\overline{0.a_1a_2\cdots a_n\cdots}$是有理数.

五、设$x_1,x_2,\cdots,x_n$都是正数,求证:

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

1985 高中数学联赛

试题部分

第　一　试

一、选择题

本题共有 6 个小题，每个小题都给出了代号为(A)、(B)、(C)、(D)的四个结论，其中只有一个结论是正确的. 请把正确结论的代号写在题后的圆括号内.

1. 假如有两个命题：

甲：a 是大于零的实数；乙：$a>b$ 且 $a^{-1}>b^{-1}$，那么

(A)甲是乙的充分而不必要条件

(B)甲是乙的必要而不充分条件

(C)甲是乙的充分必要条件

(D)甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答(　　)

2. PQ 为经过抛物线 $y^2=2px$ 焦点的任意一条弦，MN 为 PQ 的准线 l 上的射影，PQ 线 l 转一周所得的旋转面面积为 S_1，以 MN 为直径的球面面积为 S_2，则下面的结论中，正确的是

(A)$S_1>S_2$　　　　(B)$S_1<S_2$

(C)$S_1\geqslant S_2$

(D)有时 $S_1>S_2$，有时 $S_1=S_2$，有时 $S_1<S_2$

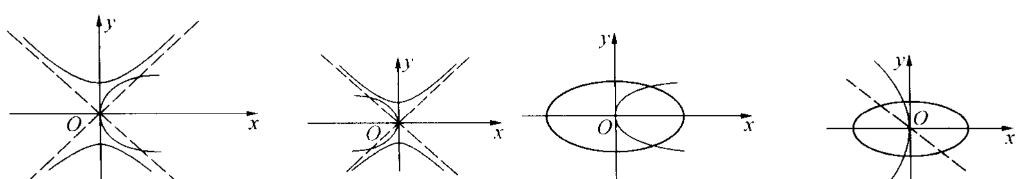
答(　　)

3. 已知方程 $\arccos\frac{4}{5}-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\arcsin x$，则

(A)$x=\frac{24}{25}$　　(B)$x=-\frac{24}{25}$　　(C)$x=0$　　(D)这样的 x 不存在

答(　　)

4. 在下列四个图形中，已知有一个是方程 $mx+ny^2=0$ 与 $mx^2+ny^2=1(m\neq0,n\neq0)$ 在同一坐标系中的示意图，它应是



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

答(　　)

5. 设 Z,W,λ 为复数，$|\lambda|\neq 1$，关于 Z 的方程 $\overline{Z}-\lambda Z=W$ 有下面四个结论：

Ⅰ. $Z=\dfrac{\overline{\lambda}W+\overline{W}}{1-|N|^2}$ 是这个方程的解；　　Ⅱ. 这个方程只有一个解；

Ⅲ. 这个方程有两个解；　　Ⅳ. 这个方程有无穷多解. 则

(A)只有Ⅰ和Ⅱ是正确的　　(B)只有Ⅰ和Ⅲ是正确的

(C)只有Ⅰ和Ⅳ是正确的　　(D)以上(A)、(B)、(C)都不正确

答(　　)

6. 设 $0<a<1$，若 $x_1=a,x_2=a^{x_1},x_3=a^{x_2},\cdots,x_n=a^{x_{n-1}},\cdots$ 则数列 $\{x_n\}$

(A)是递增的　　(B)是递减的

(C)奇数项是递增的，偶数项是递减的　　(D)偶数项是递增的，奇数项是递减的

答(　　)

二、填空题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若角 A,B,C 的大小成等比数列，且 $b^2-a^2=ac$，则角 B 的弧度数等于________.

2. 方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 的非负整数解共有________组.

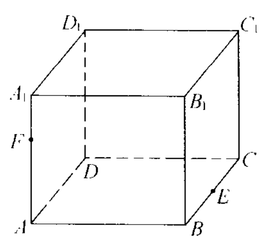
3. 在已知数列 1,4,8,10,16,19,21,25,30,43 中，相领若干数之和能被 11 整除的数组共有________.

4. 对任意实数 x,y，定义运算 $x*y$ 为 $x*y=ax+by+cxy$，其中 a,b,c 为常数，等式右端中的运算是通常的实数加法、乘法运算，现已知 $1*2=3,2*3=4$，并且有一个非零实数 d，使得对于任意实数 x 都有 $x*d=x$，则 $d=$________.

第　二　试

一、在直角坐标系 xOy 中，点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的坐标均为一位正整数，OA 与 x 轴正方向的夹角大于45°，OB 与 x 轴正方向的夹角小于45°，B 在 x 轴上的射影为 B'，A 在 y 轴上的射影为 A'，$\triangle OB'B$ 的面积比 $\triangle OA'A$ 的面积大 33.5，由 x_1,y_1,x_2,y_2 组成四位数，并写出求解过程.

二、如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 的中点，F 在 AA_1 上，且 $A_1F:FA=1:2$，求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角.



三、某足球邀请赛有十六个城市参加，每市派出甲、乙两个队. 根据比赛规则，每两队之间至多赛一场，并且同一城市的两队之间不进行比赛；比赛若干天后进行统计，发现除 A 市甲队外，其它各队已比赛过的场数各不相同. 问 A 市乙队已赛过多少场？请证明你的结论.

四、平面上任给五个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为 λ，求证：$\lambda\geqslant 2\sin 54°$，并讨论等号成立的充要条件.

1986

高中数学联赛

试题部分

第 一 试

一、选择题

本题共有 6 个小题，每个小题都给出了代号为(A)、(B)、(C)、(D)的四个结论，其中只有一个结论是正确的，请把正确结论的代号写在题后的圆括号内.

1. 设 $-1<a<0$，$\theta=\arcsin a$，那么不等式 $\sin x<a$ 的解集为

(A) $\{x \mid 2n\pi+\theta<x<(2n+1)\pi-\theta, n\in\mathbf{Z}\}$

(B) $\{x \mid 2n\pi-\theta<x<(2n+1)\pi+\theta, n\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{x \mid (2n-1)\pi+\theta<x<2n\pi-\theta, n\in\mathbf{Z}\}$

(D) $\{x \mid (2n-1)\pi-\theta<x<2n\pi+\theta, n\in\mathbf{Z}\}$

答(　　)

2. 为 Z 为复数，$M=\{Z \mid (Z-1)^2=|Z-1|^2\}$，那么

(A) $M=\{$纯虚数$\}$　　(B) $M=\{$实数$\}$

(C) $\{$实数$\}\subset M\subset\{$复数$\}$　　(D) $M=\{$复数$\}$

答(　　)

3. 设实数 a,b,c 满足 $\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0\\ b^2+c^2+bc-6a+6=0,\end{cases}$

那么 a 的取值范围是

(A) $(-\infty,+\infty)$　　(B) $(-\infty,1)\cup[9,+\infty]$

(C) $(0,7)$　　(D) $[1,9]$

答(　　)

4. 如果四面体的每一个面都不是等腰三角形，那么其长度不等的棱的条数最少为

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

答(　　)

5. 平面上有一个点集 M 和七个不同的圆 $C_1,C_2,\cdots,C_7$，其中圆 C_7 恰好经过 M 中的 7 个点，圆 C_6 恰好经过 M 中的 6 个点，……，圆 C_1 恰好经过 M 中的 1 个点，那么 M 中的点数最少为

(A) 11　　(B) 12　　(C) 21　　(D) 28

答(　　)

6. 边长为 a,b,c 的三角形，其面积等于 $\frac{1}{4}$，而外接圆半径为 1，若 $s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，$t=\frac{1}{a}+$