

中等职业学校考试复习指导丛书

数学 (第2版)

《中等职业学校考试复习指导丛书》编写组 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

中等职业学校考试复习指导丛书

数 学

(第2版)

《中等职业学校考试复习指导丛书》编写组 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书以教育部颁发的《中等职业学校数学教学大纲》为依据参照《山东省 2006 年高等职业教育对口招生考试纲要》，并结合中等职业学校学生的实际需要编写。本书内容包括集合与数理逻辑用语、不等式、函数、数列、平面向量、三角、平面解析几何、立体几何、概率与二项式定理等，旨在提高学生的数学基础知识、基本技能、运算能力、逻辑思维能力、空间想像力，以及运用所学的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。每章有复习要求、知识要点、例题精选、习题和测试题，书后附有三套综合检测题，以及习题、测试题的答案与提示。

本书可供中等职业学校教师和学生使用，是中职学生系统复习数学知识、形成能力、迎接考试的必备用书。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学 / 《中等职业学校考试复习指导丛书》编写组编著. —2 版. —北京: 电子工业出版社, 2006.1

(中等职业学校考试复习指导丛书)

ISBN 7-121-01947-7

I. 数… II. 中… III. 数学课—专业学校—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 135160 号

责任编辑: 刘文杰 田领红

印 刷: 山东省高唐印刷有限责任公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销: 各地新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 11.5 字数: 291 千字

印 次: 2006 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 14 033 册 定价: 13.00 元

凡购买电子工业出版社的图书, 如有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系。
联系电话: (010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前 言



《中等职业学校考试复习指导丛书》是我们根据当前职业教育改革发展的形势，为适应中等职业学校广大教师和学生的需要，组织富有经验的专家、骨干教师编写的一套考试复习指导丛书。本丛书包括语文、数学和英语。

丛书的编写是以教育部颁发的《中等职业学校文化基础课教学大纲》为依据，以国家规划教材为主要参考，参照《山东省 2006 年高等职业教育对口招生考试纲要》，结合山东省的实际情况，广泛征询广大考生和教师的意见，并吸取当前教学改革的先进成果而编写的。我们在编写时，力求基础知识的整合与系统，强化能力训练，突出对学生解题思路和方法的引导，使学生学会分析问题和解决问题、提高学习能力和应对考试的能力。在内容编排上，三本书的模块大致为：复习要点，即依据考试纲要，明确需要掌握的知识点及其相关联系，提出复习的要求；解题示例，即选择典型例题、考试试题或某一类题型，分析总结规律，举一反三，掌握解题技巧；基础训练，即根据考试纲要要点和相关内容，精心设计了一定数量的练习题，强化训练，巩固知识；模拟考试，参照历年高职考试的试题，设计了 3~6 套模拟考试题，用于学生综合训练，检测复习效果。同时，在采用同一模块的前提下，语文、数学和英语三科根据各自特点，突出学科特色，体现灵活性。因此，本丛书具有较强的针对性、指导性和实用性，便于教师的指导和学生的系统复习，期望能对中等职业学校学生的日常学习以及复习考试等方面有所帮助和指导。

编写此套丛书，由于时间仓促，水平有限，难免有不当之处，恳望广大师生在使用过程中提出宝贵的意见，以便于今后修改和完善。

编写组

2005 年 10 月



目 录



第一章 集合与数理逻辑用语 (1)

复习要求	(1)
知识要点	(1)
例题精选	(2)
习题一	(3)
测试题一	(5)

第二章 不等式 (7)

复习要求	(7)
知识要点	(7)
例题精选	(9)
习题二	(12)
测试题二	(13)

第三章 函数 (17)

复习要求	(17)
知识要点	(17)
例题精选	(20)
习题三	(25)
测试题三	(30)

第四章 数列 (33)

复习要求	(33)
知识要点	(33)
例题精选	(34)
习题四	(38)
测试题四	(40)

第五章 平面向量 (43)

复习要求	(43)
知识要点	(43)
例题精选	(45)
习题五	(50)
测试题五	(53)

第六章 三角	(56)
复习要求	(56)
知识要点	(56)
例题精选	(60)
习题六	(70)
测试题六	(81)
第七章 平面解析几何	(85)
复习要求	(85)
知识要点	(85)
例题精选	(88)
习题七	(105)
测试题七(一)	(109)
测试题七(二)	(111)
第八章 立体几何	(115)
复习要求	(115)
知识要点	(115)
例题精选	(116)
习题八	(124)
测试题八	(130)
第九章 概率与二项式定理	(133)
复习要求	(133)
知识要点	(133)
例题精选	(134)
习题九	(139)
测试题九	(141)
综合检测题(一)	(144)
综合检测题(二)	(147)
综合检测题(三)	(150)
答案与提示	(153)

第一章 集合与数理逻辑用语



【复习要求】

1. 理解集合的概念, 掌握集合的表示方法, 掌握集合的交、并、补运算.
2. 了解逻辑联结词“如果……那么……”的意义, 理解逻辑联结词“且、或、非”的意义.
3. 理解符号 $\subseteq, \supset, \not\subseteq, \not\supset, \subset, \supsetneq, \cap, \cup, C_U A, \in, \notin, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 的含义, 并能用这些符号表示集合与集合、元素与集合、命题与命题之间的关系.
4. 能准确地判断一个命题是否是另一个命题的充分条件、必要条件或充要条件.

【知识要点】

1. 构成集合的元素必须具有三个特性: 确定性、互异性、无序性.
2. 常用数集的符号: $\mathbf{N}=\{\text{自然数}\}$, $\mathbf{Z}=\{\text{整数}\}$, $\mathbf{Q}=\{\text{有理数}\}$, $\mathbf{R}=\{\text{实数}\}$. 注: $0 \in \mathbf{N}$.
3. 元素与集合之间的关系只能是从属关系, 只能用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”之一连接.

4. 集合 A, B 之间的关系可以是: 包含关系: $A \subseteq B \begin{cases} A=B \\ A \subset B \end{cases}$
- 不包含关系: $A \not\subseteq B \begin{cases} A \cap B \neq \emptyset \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$

注: 空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集.

5. 集合的运算

- (1) 交集: 由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有公共元素构成的集合叫做 A, B 的交集, 记作: $A \cap B$.
- (2) 并集: 把集合 A, B 所有元素合并在一起构成的集合叫做 A, B 的并集, 记作: $A \cup B$.
- (3) 补集: 如果集合 A 是全集 U 的一个子集, 由 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合, 叫做 A 在 U 中的补集, 记作: $C_U A$.



6. 逻辑用语

(1) 命题: 能够判断真假的语句叫做命题.

(2) “或”的含义: “或”中含“且”.

例如, “明天刮风或下雨”包含三种情况: ①明天刮风②明天下雨③明天刮风且下雨.

(3) 复合命题: “ p 且 q ”记作 $p \wedge q$; “ p 或 q ”记作 $p \vee q$; “非 p ”记作 $\neg p$; “如果 p , 那么 q ”记作 $p \rightarrow q$.

复合命题真值表见表 1-1.

表 1-1 复合命题真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
真	真	真	真	真
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真
总结		都真才真 有假则假	有真则真 都假才假	只有 p 真 q 假时为假

7. 充分条件与必要条件:

当“如果 p , 那么 q ”是真命题时, 称 p 推出 q , 记作: $p \Rightarrow q$, p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件; 如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 称为 p 是 q 的充分且必要条件, 简称充要条件, 记作 $p \Leftrightarrow q$.

【例题精选】

【例 1】 选择题

(1) 已知集合 $M = \{a, b, c\}$ 中的元素对应着某三角形的三边长, 那么这个三角形一定不是 ().

(A) 直角三角形

(B) 锐角三角形

(C) 钝角三角形

(D) 等腰三角形

分析: 由集合中元素的互异性可知 a, b, c 必是三个互不相等的数. 故选 (D).

(2) (2000 年对口高职题) 设全集 $U = \{0, 1, 2\}$, 集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{0\}$, 则 $C_U M \cap N$ 是 ().

(A) $\emptyset$

(B) M

(C) N

(D) U

分析: 先求 $C_U M = \{0\}$, 再求 $\{0\} \cap \{0\} = N$. 故选 (C).

(3) 下列关系式错误的是 ().

(A) $3 \in \{x | x < 5\}$

(B) $\{3\} \subsetneq \{x | x < 5\}$

(C) $\emptyset \notin \{x | x < 5\}$

(D) $\emptyset \subsetneq \{x | x < 5\}$



分析: 因为空集是任意非空集合的真子集, 故选 (C).

(4) $a=0$ 是 $ab=0$ 的 ().

(A) 充要条件

(B) 必要但不充分条件

(C) 充分但不必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

分析: 由 $a=0$ 可推出 ab 一定为 0; 但由 $ab=0$ 推出三种情况: $a=0$ 或 $b=0$ 或 a, b 同时为 0. 故选 (C).

(5) (2003 年对口高职题) 如果命题 p 是假命题, 命题 q 是真命题, 则下列命题为真命题的是 ().

(A) $\neg q$

(B) $p \wedge q$

(C) $p \vee q$

(D) $\neg p \wedge \neg q$

分析: 先由已知条件得出: $\neg p$ 真 $\neg q$ 假, 淘汰 A; 再注意到选项 (C) 是用“或”联结的, 条件相对“宽松”; p, q 中有真则真, 而已知 q 真, 故选 (C).

【例 2】 写出下列命题的非命题并判断真假.

p : 12 是 6 的倍数;

q : 对 $\forall$ 实数 x , 都有 $x-1=0$;

r : 高一(二)班全体同学的身高都是 1.80m;

s : 对顶角相等且 $2>1$.

解: $\neg p$: 12 不是 6 的倍数 (假);

$\neg q$: $\exists$ 实数 x , 使 $x-1 \neq 0$ (真);

$\neg r$: 高一(二)班同学的身高不都是 1.80m (真);

$\neg s$: 对顶角不相等或 $2 \leq 1$ (假).

【例 3】 已知集合 $M = \{a, b\}$, $N = \{1, 3a\}$, 且 $M = N$, 求 a 与 b 的值.

解: $\because M = N$, $\therefore$ 集合 M 与 N 中的元素完全相同, 应有以下两种情况:

$$\textcircled{1} \begin{cases} a=1 \\ b=3a \end{cases} \text{ 或 } \textcircled{2} \begin{cases} a=3a \\ b=1 \end{cases}, \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}.$$

习 题 一

1. 选择题

(1) 下面给出的对象中, 构成集合的是 ().

(A) 图书馆内好书的全体

(B) 所有较聪明的同学

(C) 不小于 2 的实数

(D) “走红”歌手的全体

(2) 下面四个写法中, 错误的是 ().

(A) $1 \in \{0, 1, 2\}$

(B) $\{1\} \in \{0, 1, 2\}$

(C) $\{0, 1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$

(D) $\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\}$

(3) 设集合 $M = \{0, 1\}$, $N = \{1, 2\}$, $P = \{1, 2, 3\}$, 则 $(M \cup N) \cap P$ 是 ().



- (A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{1, 2\}$ (C) $\{1\}$ (D) $\{3\}$
- (4) 已知全集 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, 集合 $M = \{a, b, c\}$, $N = \{d, e, f\}$, 则 $C_U M \cap N$ 为 ().
- (A) U (B) M (C) N (D) $\emptyset$
- (5) 设集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | ax = 12\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 a 的值是 ().
- (A) 2, 3 (B) -2, -3 (C) 1, -4 (D) 4, 6
- (6) 设集合 $M = \{1, 2, m^2 - 3m - 1\}$, $P = \{-1, 3\}$, $M \cap P = \{3\}$, 则 m 的值是 ().
- (A) 4 (B) -1 (C) 1, -4 (D) 4, -1
- (7) 若集合 $A = \{(x, y) | 2x + y = 4\}$, $B = \{(x, y) | x - y + 1 = 0\}$, 则 $A \cap B$ 用列举法表示为 ().
- (A) $\{1, 2\}$ (B) $\{(1, 2)\}$ (C) $\{1, -2\}$ (D) $\{(1, -2)\}$
- (8) 下列命题是真命题的是 ().
- (A) 3 是 9 的约数或 5 是 8 的约数 (B) $5 > 3$ 且 $2 < 1$
- (C) $\exists$ 一个实数 x , 使 $x^2 < 0$ (D) 对 $\forall$ 实数 x , 都有 $x + 1 > 0$
- (9) 给出下列命题
- ① $0 \in \mathbf{N}$ 且 $-2 \in \mathbf{Z}$; ② $7 \leq 8$; ③ -5 是方程 $x^2 = 25$ 的根; ④ 矩形的对角线相等.
- 其中假命题的个数是 ().
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- (10) 已知集合 $M = \{1, 3\}$, $N = \{x | x - 2 = 0\}$, 集合 $P = M \cup N$, 则集合 P 的真子集个数是 ().
- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
- (11) 已知 p 是假命题, q 是真命题, 那么下列命题中的真命题是 ().
- ① $\neg p$; ② $p \wedge q$; ③ $p \vee q$; ④ $\neg q$; ⑤ $p \rightarrow q$; ⑥ $p \rightarrow \neg q$.
- (A) ①③⑤⑥ (B) ①②⑤ (C) ①②⑥ (D) ②④⑥
- (12) $x + 1 = 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的 ().
- (A) 充分且不必要条件 (B) 必要且不充分条件
- (C) 充要条件 (D) 既不是充分也不是必要条件
- (13) 设 p, q 是两个命题, 若 “ p 或 q ” 的否定是真命题, 则必有 ().
- (A) p 真 q 真 (B) p 假 q 真
- (C) p 真 q 假 (D) p 假 q 假
- (14) 设命题 $p: \emptyset = \{0\}$; $q: 7 > 3$. 则下列命题: ① $p \vee q$; ② $p \wedge q$; ③ $\neg p$; ④ $\neg q$. 真命题的个数是 ().
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- (15) 已知命题 p 是 q 的必要条件, s 是 r 的充分条件, p 是 s 的充要条件, 则 q 是 r 的 ().
- (A) 充分且不必要条件 (B) 必要且不充分条件
- (C) 充要条件 (D) 既不是充分也不是必要条件



2. 填空题

(1) 用适当的符号 $\in, \notin, =, \subsetneq, \supsetneq$ 填空:

① $\frac{1}{2} \underline{\hspace{1cm}} N$; ② $0 \underline{\hspace{1cm}} N$; ③ $\emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{0\}$; ④ $\{1\} \underline{\hspace{1cm}} \{1, 2, 3\}$;

⑤ $1 \underline{\hspace{1cm}} \{1, 2, 3\}$; ⑥ $\{a, b, c\} \underline{\hspace{1cm}} \{a, b\}$; ⑦ $a \underline{\hspace{1cm}} \{a\}$; ⑧ $\{a, b\} \underline{\hspace{1cm}} \{b, a\}$;

⑨ $\emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{x | x^2 = -1\}$.

(2) 全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$;

$A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$; $C_U A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cup C_U B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 已知集合 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | x < a\}$, 且 $A \supseteq B$, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 解答题

(1) 写出下列命题的非:

p : $5 + 10 \times 3 = 20$;

s : $\exists$ 实数 x , 使 $x + 2 = 3$;

q : 全班同学都是山东人;

m : 角 $\alpha = 30^\circ$ 或 $\alpha = 150^\circ$;

r : 对 $\forall$ 实数 x , 都使 $x^2 = 1$.

(2) 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ ① 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;② 若 A 中有 2 个元素, 求 a 的取值范围.(3) 设全集 $U = \{3, 4, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{a + 1, 2a\}$, $C_U A = \{5\}$, 求 a 的值.

测试题一

(时间为 45 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

1. 下列表示集合的方法中, 正确的是 ().

(A) 不等式 $x^2 + 1 > 0$ 的解集是 $\{\mathbf{R}\}$

(B) 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内的解集为 $\{\emptyset\}$

(C) 集合 $A = \{x | x^2 = x\}$ 用列举法可表示为 $\{0, 1\}$

(D) 方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ 的解集为 $\{2, -1\}$

2. 设集合 $M = \{1, 2, 5, 6\}$, $N = \{0, 1, 2, 3\}$, $Q = \{3, 5, 9\}$, 则 $(M \cup N) \cap Q = ()$.

(A) $\{1, 2, 5, 6\}$

(B) $\{1, 3, 5, 6\}$

(C) $\{3\}$

(D) $\{3, 5\}$

3. 设全集 $U = \{a, b, c, d, e\}$, 集合 $A = \{a, b\}$, 则 $C_U A$ 的子集个数是 ().

(A) 8

(B) 7

(C) 6

(D) 5

4. 设 $A = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{y | y = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 ().

(A) $A \cap B = \emptyset$

(B) $A \subseteq B$

(C) $A = B$

(D) $A \supseteq B$



5. 设 $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则集合 M 的个数为 ().
(A) 10 (B) 8 (C) 6 (D) 4
6. 下列命题中的真命题是 ().
(A) $\exists$ 实数 x , 使 $x^2 + 1 \leq 0$ (B) $1 < 5$ 且 $1 > 2$
(C) 如果 $1 > 2$, 那么盐是甜的 (D) $1 > 2$ 或 $3 > 4$
7. $a = b$ 是 $a^2 = b^2$ 的 ().
(A) 充分且不必要条件 (B) 必要且不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不是充分也不是必要条件
8. 下列命题是假命题的是 ().
(A) $x^2 - 4 = 0$ 是 $x - 2 = 0$ 的充分条件 (B) $a = b$ 是 $a^3 = b^3$ 的充要条件
(C) $\sin \alpha = \sin \beta$ 是 $\alpha = \beta$ 的必要条件 (D) $x < 5$ 是 $x < 3$ 的必要条件

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

9. 若集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C_U A = \{2, 4, 6, 8\}$, $C_U B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$, 则 $B =$ _____.
10. 设集合 $A = \{x | x < 5\}$, $B = \{x | x \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
11. 命题 “ $3 \geq 2$ ” 的非是 _____.
12. 命题 “ $3 > 2$ 且 $4 = 5$ ” 的非是 _____.
13. “ $a = 0$ 且 $b = 0$ ” 是 “ $a^2 + b^2 = 0$ ” 的 _____ 条件.
14. “ x 是整数” 是 “ x 是自然数” 的 _____ 条件.

三、解答题 (每小题 8 分, 共 16 分)

15. 已知集合 $A = \{2, 9, x\}$, $B = \{x^2, 2\}$, 且 $A \cap B = B$, 求 x 的值.
16. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{2, 3\}$, $N = \{1, 3, 6\}$, 求 $[C_U (M \cup N)] \cap (M \cap N)$.

第二章 不等式

【复习要求】

1. 会解一元一次不等式(组).
2. 会解形如 $|ax+b| \geq c$ 或 $|ax+b| \leq c$ 的含有绝对值的不等式.
3. 会解一元二次不等式.
4. 会解形如 $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ 的分式不等式.
5. 掌握不等式的性质及重要不等式($a^2 \geq 0, a \in \mathbf{R}; a^2+b^2 \geq 2ab$), 会用比较法证明简单不等式.

【知识要点】

1. 不等式的性质与证明

(1) 实数大小的基本性质

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $a-b > 0 \Leftrightarrow a > b$; $a-b = 0 \Leftrightarrow a = b$; $a-b < 0 \Leftrightarrow a < b$.

(2) 不等式的性质

- ① 对称性: $a > b \Leftrightarrow b < a$;
- ② 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;
- ③ 加法法则: $a > b \Leftrightarrow a+c > b+c$;
- ④ 移项法则: $a+b > c \Leftrightarrow a > c-b$;
- ⑤ 乘法法则: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$; $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$;
- ⑥ 同向相加: $\left. \begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a+c > b+d$;
- ⑦ 同向相乘: $\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$;
- ⑧ 乘方法则: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}, n > 1)$;
- ⑨ 开方法则: $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}, n > 1)$.

(3) 不等式证明

作差比较法: 作差 $\rightarrow$ 整理变形 $\rightarrow$ 判断符号 $\rightarrow$ 得出结论.

(4) 重要不等式

- ① $a^2 \geq 0$;
- ② $(a-b)^2 \geq 0$;
- ③ $a^2+b^2 \geq 2ab$;
- ④ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a > 0, b > 0)$.



2. 不等式的解法

(1) 一元一次不等式(组)的解法

① 一元一次不等式经同解变形可转化为 $ax > b$ ($a \neq 0$) 的形式.当 $a > 0$ 时, 解集是 $\left\{x \mid x > \frac{b}{a}\right\}$; 当 $a < 0$ 时, 解集是 $\left\{x \mid x < \frac{b}{a}\right\}$.

② 一元一次不等式组的解集就是该不等式组中每个不等式解集的交集.

(2) 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解法(对于 $a < 0$ 的情况,通常在已知不等式的两端同乘上 -1 , 可转化为 $a > 0$ 的情况求解)① 当 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, 其中 x_1 与 x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实根.

解法一: $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$

$$ax^2 + bx + c < 0$$
 ($a > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$

解法二: 根据二次函数的图像及二次方程的根, 写出解集, 如表 2-1 所示.

② 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 如表 2-1 所示, 直接写出解集.

表 2-1 图 像 法

$\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根		x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图像				
解 集	$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$(-\infty, -\frac{b}{2a}) \cup (-\frac{b}{2a}, +\infty)$	$\mathbf{R}$
	$ax^2 + bx + c < 0$	(x_1, x_2)	$\emptyset$	$\emptyset$

(3) 分式不等式的解法

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \Leftrightarrow (ax+b)(cx+d) > 0$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} < 0 \Leftrightarrow (ax+b)(cx+d) < 0$$

(4) 含绝对值不等式的解法:

$$|ax+b| \geq c \Leftrightarrow ax+b \geq c \text{ 或 } ax+b \leq -c$$

$$|ax+b| \leq c \Leftrightarrow -c \leq ax+b \leq c$$



【例题精选】

【例 1】 选择题

(1) 下列命题中的真命题是 ().

(A) $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$

(B) $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$

(C) $a > b, ab \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(D) $a > b, c > d \Rightarrow ac > bd$

分析: 本题考察的是不等式性质的应用, 其中 (A) 中 $c=0$ 时不成立; (C) 中 $a>0, b<0$ 时错误; (D) 中不满足 $a>b>0, c>d>0$; 对于 (B), 由条件可得 $c^2 \neq 0$, 于是在不等式两边同乘以 $\frac{1}{c^2}$, 得 $a > b$. 故选 (B).

点评: 在运用不等式性质的推理过程中应注意不等式性质的条件是否具备.

(2) (2001 年对口高考题) 已知下列命题:

① $x + \frac{1}{x} \geq 2 (x > 0)$;

② 若 $a > b, c > d$, 则 $a - c > b - d$;

③ 若 $(\frac{4}{5})^m < (\frac{4}{5})^n$, 则 $m > n$;

④ 若 $a > b$, 则 $ac > bc$.

其中正确的命题是 ().

(A) ①③

(B) ②③

(C) ①②

(D) ③④

分析: ① 考察均值定理 $a + b \geq 2\sqrt{ab} (a > 0, b > 0)$, 显然正确; ② 考察不等式加法法则, 由 $c > d$ 得 $-d > -c$, 与 $a > b$ 相加, 得 $a - d > b - c$, 故错误; ③ 考察指数函数的单调性, 因函数 $y = (\frac{4}{5})^x$ 是减函数, 故正确; ④ 考察不等式乘法法则, 当 $c < 0$ 时, $ac < bc$, 故错误. 故选 (A).

(3) (2000 年对口高考题) 若函数 $y = x^2 + 2(a-b)x + a^2$ 与 x 轴有两个交点, 且 $b < 0$, 则 a 与 b 的关系是 ().

(A) $a > b$

(B) $a > 2b$

(C) $a > \frac{b}{2}$

(D) $a < b$

分析: $\because$ 函数 $y = x^2 + 2(a-b)x + a^2$ 与 x 轴有两个交点.

$\therefore$ 方程 $x^2 + 2(a-b)x + a^2 = 0$ 的判别式 $\Delta = 4(a-b)^2 - 4a^2 > 0$.

整理, 得 $2ab < b^2$.

又 $\because b < 0, \therefore a > \frac{b}{2}$. 故选 (C).

点评: 本题考察二次函数与一元二次方程的关系问题, 同时又考察了不等式的性质, 要注意题目中的条件 $b < 0$, 否则容易出错.

(4) (2001 年对口高考题) 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 ().

(A) $\mathbf{R}$

(B) (x_1, x_2)

(C) $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ (D) $\emptyset$

答案: (B).

【例2】 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 求证: $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$.

$$\begin{aligned}
 \text{证明: } & \because \left(a^2 + b^2 + \frac{1}{2}\right) - (a + b) \\
 &= \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) \\
 &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \\
 & a, b \in \mathbf{R}, \\
 & \therefore \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \quad \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0. \\
 & \therefore \left(a^2 + b^2 + \frac{1}{2}\right) - (a + b) \geq 0. \\
 & \therefore a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b.
 \end{aligned}$$

点评: 作差比较法是证明不等式的常用方法, 其关键是将“差式”通过因式分解或配方等进行恒等变形, 以便于判断“差式”的符号.

【例3】 解不等式 $\log_3(x^2 - 2x - 3) < \log_3(x + 7)$.

$$\text{解: } \because \text{原不等式同解于不等式组} \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x + 7 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 < x + 7 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x > 3 \text{ 或 } x < -1 \\ x > -7 \\ -2 < x < 5 \end{cases}$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(3, 5) \cup (-2, -1)$.

点评: 解对数不等式时, 除了要根据对数函数的单调性, 将对数不等式化归为整式(分式)不等式, 还要考虑对数的底数及真数的取值范围, 避免将解集扩大.

【例4】 已知 $|x - a| < b$ 的解集是 $\{x | -3 < x < 9\}$, 求 a 和 b .

解: 由题意可得 $b > 0$, 解不等式 $|x - a| < b$, 得 $-b < x - a < b$, $a - b < x < a + b$.

$\therefore |x - a| < b$ 的解集是 $\{x | -3 < x < 9\}$,

$$\therefore \begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = -3 \end{cases} \quad \text{解得 } a = 3, b = 6.$$

【例5】 解不等式 $\frac{x+1}{3-x} \geq 1$.

解: 将原不等式变形为 $\frac{x+1}{3-x} - 1 \geq 0$, 即 $\frac{2x-2}{x-3} \leq 0$,

所以原不等式等价于不等式组:

$$(1) \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad (2) \begin{cases} 2x - 2 \leq 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

(1) 的解集是 $[1, 3]$, (2) 的解集是 $\emptyset$.

所以原不等式的解集为 $[1, 3] \cup \emptyset = [1, 3]$.

【例 6】 若一元二次不等式 $(a^2 - 1)x^2 - (a + 1)x - 1 < 0$ 的解集是全体实数, 求实数 a 的范围.

分析: 利用二次函数、一元二次方程与一元二次不等式的关系, 讨论不等式恒成立的条件.

解: $\because$ 一元二次不等式 $(a^2 - 1)x^2 - (a + 1)x - 1 < 0$ 的解集是全体实数,

$\therefore$ 二次函数 $y = (a^2 - 1)x^2 - (a + 1)x - 1$ 的图像开口向下且与 x 轴没有交点, 则有

$$\begin{cases} a^2 - 1 < 0 \\ \Delta = (a + 1)^2 + 4(a^2 - 1) < 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -\frac{3}{5} < a < 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 实数 a 的范围是 $-\frac{3}{5} < a < 1$.

点评: 二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 恒成立的条件是 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$, $ax^2 + bx + c < 0$ 恒成立的条件是 $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

【例 7】 实数 m 在什么范围时, 关于 x 的二次方程 $mx^2 + 2x + m - 2 = 0$ 有两个不相等的负根?

解: 设 x_1 与 x_2 为方程的两个负根, 且 $x_1 \neq x_2$, 则

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 4 - 4m(m - 2) > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{2}{m} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 2}{m} > 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2} \\ m > 0 \\ m > 2 \text{ 或 } m < 0 \end{cases}$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $2 < m < \sqrt{2} + 1$.

点评: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 两实根的符号与系数 a, b, c 的关系, 见表 2-2.

表 2-2 根的符号与系数的关系

根的情况	两个正根	两个负根	一正根一负根	有一个零根
满足的条件	$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$	$c = 0$

【例 8】 国家收购某种农产品的价格为每吨 120 元, 其中征税标准为每 100 元征收 8 元 (称税率为 8 个百分点), 计划可以收购 100 万吨. 为了减轻农民负担, 决定税率降低 x 个百分点, 预计收购量增加 $2x$ 万吨. 要使此项税收在税率调整后不低于原计划的 78%, 试