研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

材料加工理论与数值模拟

Materials Processing Theory and Numerical Simulation

董湘怀　主编

李　赞　魏伯康　陈立亮　熊建钢　参编

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

材料加工理论与数值模拟

Materials Processing Theory and Numerical Simulation

董湘怀　主编

李　赞　魏伯康　陈立亮　熊建钢　参编

高等教育出版社

内容提要

本书首先较系统地介绍了作为材料成形理论基础的连续介质力学和凝固理论的基础知识，然后较全面地介绍了有限元法和有限差分法这两种主要的数值分析方法的概念、公式和实施步骤，数值分析方法在锻压、铸造和焊接等材料成形过程计算机模拟中的应用。这些内容将为读者提供材料成形工艺研究和应用模拟软件分析材料成形问题所必需的较为完整的知识。

本书是为高等院校专业调整后的材料加工工程专业硕士研究生编写的教材，也可供材料学科其它专业、机械学科有关专业的师生以及从事材料加工和机械制造的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料加工理论与数值模拟／董湘怀主编．—北京：高等教育出版社，2005.8

ISBN 7-04-017378-6

Ⅰ.材… Ⅱ.董… Ⅲ.①工程材料-加工-理论-研究生-教材②工程材料-加工-数值模拟-研究生-教材 Ⅳ.TB3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 077018 号

策划编辑 林 琳 **责任编辑** 陈大力 **封面设计** 李卫青
责任绘图 尹 莉 **版式设计** 史新薇 **责任校对** 王 超
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京中科印刷有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2005 年 8 月第 1 版
印 张	17	印 次	2005 年 8 月第 1 次印刷
字 数	280 000	定 价	27.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 17378-00

前　　言

材料加工过程数值模拟技术在工业发达国家已进入应用和普及的阶段,它给材料加工工艺设计和工装模具设计带来了革命性的变化。设计人员通过计算机模拟能及时预测加工过程中可能出现的各种问题,从而及时修改设计。这就为工艺优化、并行工程、虚拟制造等现代设计方法奠定了科学的基础。

近年来,为了拓宽学生的专业口径,增强适应社会需求的能力,大学本科阶段由原铸造、塑性加工、焊接和热处理等有关专业合并后成立了材料成形及控制工程专业,相应地,在硕士研究生阶段也合并组成了新的材料加工工程专业。针对材料成形及控制工程专业本科教学的需要,现已编写和出版了一系列有关材料成形原理和数值模拟技术的教材,如陈平昌主编的《材料成形原理》和董湘怀主编的《材料成形计算机模拟》等。本书是与上述本科教材相衔接的材料加工工程专业硕士学位课程的教材。在本书的编写中,我们力图在本科课程的基础上,使硕士研究生掌握本学科所涉及的更宽广和深入的理论基础和建立在这些基础上的数值模拟方法;另一方面,我们也力图从多方面展示数值模拟技术在材料成形工程领域中实际应用的现状和前景。为了与大学本科课程紧密衔接,同时尽量节省篇幅,对于本科教材已经详细介绍过的内容本书只作简述。不熟悉这些内容的读者,可参阅有关的本科教材。

本书包括两部分内容。第一部分为第一章至第六章,主要介绍材料加工理论基础,包括张量分析、连续介质力学和凝固理论的基础知识,其中注有*的内容较深,供选学用;第二部分为第七章至第十一章,主要介绍材料成形过程的数值模拟,包括有限元法和有限差分法这两种数值模拟基本方法及其在塑性成形、铸造成形和焊接成形过程模拟中的应用。全书共包含11章,其中第一章、第二章的第一节至第四节由李赞编写,第二章的第五节、第三章、第七章、第九章由董湘怀编写,第四章至第六章由魏伯康编写,第八章、第十章由陈立亮编写,第十一章由熊建钢编写。全书由董湘怀主编。

材料加工是一个多学科交叉、融合的领域,目前国内外均缺乏综合论述该领域基础理论和数值模拟方法的著作和教材。我们在编写过程中参考了大量文献,主要文献的目录都列在全书的末尾,供读者参考。限于编

者的学识和水平，书中难免有错误与疏漏之处，同时本课程开设的时间还不长，教学经验的积累还不充分，课程内容的安排也难免有不当之处，敬请读者批评指正。

编者

2005年4月

郑 重 声 明

目　　录

第一章　运动与变形

第一节　笛卡儿张量的定义及其代数运算

一、张量的意义

张量是用来描述客观存在的物理量的。物理量本身是不依赖于坐标系而存在的，但是，为了在数量上对物理量进行表征和计算，并使用代数和分析数学的方法来研究物理量及其运动，必须引进坐标系。由于坐标系的选择带有一定的任意性，而且同一物理量在不同坐标系会有不同的数量表征，由此得到的分析结果常常带有所选取的坐标系的特征，且可能使问题复杂化。因此，希望有一种数学工具，用它来描述物理量及其运动，所得到的数量表征和解析结果，在任何坐标系下都具有不变形式。换言之，这些表征和结果所反映的物理事实与坐标系的选择无关，这一数学工具就是张量。

物理学以及连续介质力学所研究的对象都是不依赖坐标系的物理量，因此自然要用到这一数学工具。连续介质力学的运动规律都是用张量方程来表达的，它要对各个坐标系都成立。在本章中，只讨论欧氏空间[①]内的笛卡儿直角坐标系中的张量，即笛卡儿张量，至于普遍的张量理论，读者可查阅有关的专著。

二、求和约定

一般说来，在欧氏空间内引进坐标系后，所描述的物理量的分量都会出现指标(本书中写成下标的形式)，以表明该分量和某一坐标系的关系。为书写简便，我们约定，在 3 维的欧氏空间内，如果某一指标在同一项中重复出现，就表示要对这个指标从 1 到 3 求和，例如：

$$u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

---

① 本书中的欧氏空间都是实欧氏空间。

及
$$u_{ij}v_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_{ij}v_{ij}$$

对于 n 维的欧氏空间内的求和约定可作同样的处理，只不过求和是从 1 到 n。重复出现的指标称为哑标，哑标与所采用的字母无关，即可用任一别的字母来代替。只出现一次的指标称为自由指标。

为避免误解，还作如下规定：在一个等式中，如果同一个指标字母，在其中的一项中只出现了一次，则它即使在其它项中重复出现，对该指标也不约定求和。例如：

$$F_i = A_{ii}$$

右边就不约定求和。另外，如果在一个重复出现的指标字母的下面加一短横，对该指标也不约定求和，例如 $A_{\underline{i}\,\underline{i}}$ 就不约定求和，只表示一个特定的项 A_{ii}。

三、笛卡儿直角坐标系中的基矢

在本书中，讨论的欧氏空间的维数，除另有说明外，均指 3 维。设在欧氏空间中，引进符合右手规则的直角坐标系 $ox_1x_2x_3$，称为笛卡儿坐标系，如图 1－1 所示，设 $\boldsymbol{e}_k(k=1,2,3)$，为沿 ox_k 轴的单位矢量，称为基矢量或基矢。

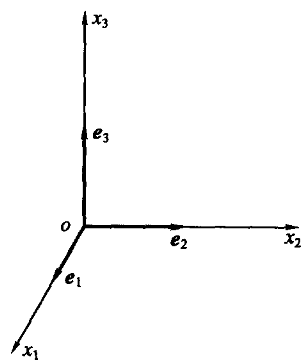

图 1－1 笛卡儿坐标系中的基矢

定义基矢的点积或标量积为

$$\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l = \delta_{kl} \qquad (1-1)$$

其中 δ_{kl} 为 Kronecker 符号，其定义为

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, k = l \\ 0, k \neq l \end{cases} \qquad (1-2)$$

定义基矢的叉积或矢量积为

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \in_{ijk}\boldsymbol{e}_k \qquad (1-3)$$

其中 $\in_{ijk}$ 为置换符号，在直角坐标系中的定义为

$$\in_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{如果 } i,j,k \text{ 为顺序 } 1,2,3 \text{ 的偶排列} \\ -1, \text{如果 } i,j,k \text{ 为顺序 } 1,2,3 \text{ 的奇排列} \\ 0, \text{其它} \end{cases} \qquad (1-4)$$

因此，$\in_{ijk}$ 名义上有 27 个分量，但只有 6 个分量不为零。

利用置换符号 $\in_{ijk}$，三阶行列式 $|a_{kl}|$ 可展开成

$$|a_{kl}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \in_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$= \in_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = \frac{1}{6} \in_{ijk} \in_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} \quad (1-5)$$

四、笛卡儿坐标系的变换

把笛卡儿坐标系 $ox_1x_2x_3$ 变换为另一个笛卡儿坐标系 $o'x_1'x_2'x_3'$，如图 1-2 所示。新坐标系的基矢记为 $\boldsymbol{e}_k'(k=1,2,3)$，则有 $\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j' = \delta_{ij}$。记 $o'x_i'$ 轴与 ox_j 轴的夹角的方向余弦为

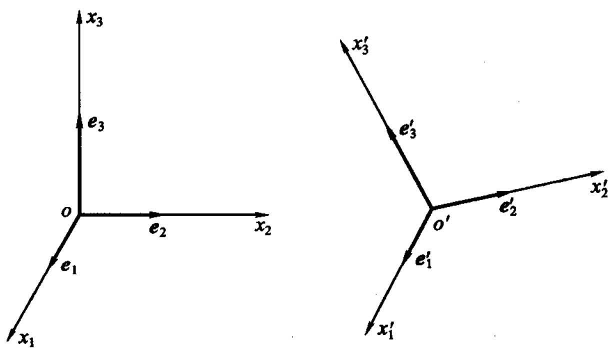

图 1-2　笛卡儿坐标变换

$$Q_{ij} = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j \quad (1-6)$$

Q_{ij}共有 9 个分量，构成坐标变换矩阵$[Q_{ij}]_{3\times3}$。由此可得

$$\boldsymbol{e}_i' = Q_{ij}\boldsymbol{e}_j \quad (1-7a)$$

$$\boldsymbol{e}_i' = Q_{ji}\boldsymbol{e}_j' \quad (1-7b)$$

由于 $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij}$，从而有

$$Q_{ik}Q_{jk} = Q_{ki}Q_{kj} = \delta_{ij} \quad (1-8)$$

即$[Q_{ij}]$是正交矩阵。

记矢量 $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{oo'}$，它在坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中的分量（也即点 o'在该坐标系中的坐标）为 c_i，则 $\boldsymbol{c} = c_i\boldsymbol{e}_i$。在空间任取一点 P，点 P 在两坐标系中的坐标分别记为 x_i 和 x_i'，则由

$$\overrightarrow{oP} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'P}$$

得

$$x_i\boldsymbol{e}_i = x_j'\boldsymbol{e}_j' + c_i\boldsymbol{e}_i$$

分别用 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{e}'_i$ 点乘上式，可得

$$x_i = Q_{ji}x'_j + c_i \tag{1-9}$$

及

$$x'_i = Q_{ij}x_j - c'_i \tag{1-10}$$

式中：$c'_i = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{e}'_i = Q_{ij}c_j$。

坐标变换式(1-9)和(1-10)称为刚体运动变换，其中 $\boldsymbol{c}$ 表示坐标系标架①的刚体平移，矩阵$[Q_{ij}]$表示坐标系标架的刚体旋转。

五、张量的定义

张量理论的表述有两种方式。第一种方式是把张量看成是张量分量的集合，张量的运算就归结为张量分量的运算。第二种方式是把张量看成是张量分量与基张量的组合，把张量整体作为研究对象，对它进行运算。这两种方式各有其优点，第一种方式便于实际计算，第二种方式表述简单利落。下面按两种方式分别给出张量的定义。

张量分量中所含指标的个数称为张量的阶。在 3 维空间中，每个指标可取 1,2,3 之值，故 n 阶张量共有 3^n 个分量。在本书中，用黑体小写英文字母，如 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 等表示一阶张量，用黑体大写英文字母，如 $\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 等表示二阶及二阶以上的张量。

1. 张量的分量表示法

在笛卡儿张量理论中，坐标系的变换是指坐标系标架的刚体旋转，即一个笛卡儿直角坐标系变为同一原点的另一个笛卡儿直角坐标系。这时，笛卡儿张量的定义如下：

(1) 零阶张量(即标量)ϕ

它只有一个分量，且其值不随坐标系改变，即标量 ϕ 是坐标系变换下的不变量。

(2) 一阶张量(即矢量)$\boldsymbol{u}$

它有三个分量，分量随坐标系变换的规律为

$$u'_i = Q_{ij}u_j, \quad u_i = Q_{ji}u'_j \tag{1-11}$$

式中，u'_i与 u_i分别是一阶张量 $\boldsymbol{u}$ 在新、旧坐标系中的分量。

(3) 二阶张量 $\boldsymbol{T}$

它有 9 个分量，分量随坐标系变换的规律为

$$T'_{ij} = Q_{im}Q_{jn}T_{mn}, \quad T_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T'_{mn} \tag{1-12a}$$

写成矩阵的形式，就是

$$[T'_{ij}] = [Q_{ij}][T_{ij}][Q_{ij}]^{\mathrm{T}}, \quad [T_{ij}] = [Q_{ij}]^{\mathrm{T}}[T'_{ij}][Q_{ij}] \tag{1-12b}$$

① 坐标系的原点和过原点的三个基矢量称为坐标系标架。

(4) n 阶张量 $\boldsymbol{T}$

它有 3^n 个分量,分量随坐标系变换的规律为

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} \cdots Q_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \cdots j_n} \tag{1-13}$$

2. 张量的整体表示法(并矢法)

(1) 零阶张量 ϕ

它的定义与前面相同。

(2) 一阶张量 $\boldsymbol{u}$

它在任何坐标系中均可以表示为

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i \tag{1-14}$$

式中: u_i——$\boldsymbol{u}$ 在坐标系中的分量;

$\boldsymbol{e}_i$——坐标系的基矢。

(3) 二阶张量 $\boldsymbol{T}$

它在任何坐标系中均可表示为

$$\boldsymbol{T} = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{1-15}$$

式中: T_{ij}——$\boldsymbol{T}$ 在坐标系中的分量;

$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$——坐标系的基矢的并矢,称为基张量。

(4) n 阶张量 $\boldsymbol{T}$

它在任何坐标系中均可表示为

$$\boldsymbol{T} = T_{i_1 i_2 \cdots i_n} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \tag{1-16}$$

张量的这两种表示法,本书将同时采用。定义单位张量 $\boldsymbol{I}$ 和置换张量 $\boldsymbol{\epsilon}$ 分别为

$$\boldsymbol{I} = \delta_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{1-17}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \in_{ijk} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \tag{1-18}$$

由(1-18)式定义的 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的确是张量的证明,留作练习,请读者完成。

显然,一阶张量可以用列阵来表示,二阶张量可以用方阵来表示。采用矩阵表示后,不但对张量的具体运算带来许多方便,而且线性代数理论中的许多有用结果可直接引入张量分析中。在本书中,用下列记法表示一、二阶张量所对应的矩阵:

$$[\boldsymbol{u}] = [u_i], [\boldsymbol{T}] = [T_{ij}] \tag{1-19}$$

虽然一、二阶张量可以用矩阵来表示,但是列阵和方阵却不都可以表示为张量,除非当坐标系变换时,该矩阵的元素满足式(1-11)和(1-12)。本书为书写方便,将变换矩阵$[Q_{ij}]$写成张量的形式:

$$\boldsymbol{Q} = Q_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j, \quad [\boldsymbol{Q}] = [Q_{ij}] \tag{1-20}$$

称为坐标变换张量。注意,坐标变换张量不是真正意义上的张量,只是一种书写形式而已。

命题 1 设矢量 $\boldsymbol{u}=u_k\boldsymbol{e}_k$,则有

$$u_k=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_k \tag{1-21}$$

证 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_k=(u_i\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{e}_k=u_i\delta_{ik}=u_k$。

证毕。

六、张量的代数运算

1. 张量相等

两个张量相等,是指这两个张量的阶数相同,且在同一坐标系中的对应分量都相等。例如,设 $\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{S}=S_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$,则 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}$,当且仅当对于所有的 i,j,有

$$T_{ij}=S_{ij}$$

2. 张量的加减

阶数相同的张量可以相加减,并得到同阶的张量。例如 $\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{S}=S_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{T}\pm\boldsymbol{S}$ 定义为

$$\boldsymbol{T}\pm\boldsymbol{S}=(T_{ij}\pm S_{ij})\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

3. 张量与标量相乘

设 α 是标量,$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$,则 $\alpha\boldsymbol{T}$ 定义为

$$\alpha\boldsymbol{T}=\alpha T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{1-22}$$

4. 张量相乘

两个张量 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的乘积(也称为张量积)记为 $\boldsymbol{TS}$,$\boldsymbol{TS}$ 的阶数等于 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的阶数的和。例如,$\boldsymbol{TS}$ 与 $\boldsymbol{Tu}$ 分别定义为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{TS}&=T_{ij}S_{kl}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l\\ \boldsymbol{Tu}&=T_{ij}u_k\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\end{aligned}\right. \tag{1-23}$$

它们分别是四阶与三阶的张量。两个一阶张量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的乘积

$$\boldsymbol{uv}=u_iv_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

是一个二阶张量。

5. 张量的点积

二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的点积(又称为内积)定义为二个张量的分量相乘,相邻的基矢取点积,记为 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$。因此,每点积一次,基矢减少两个。例如

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}&=(T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\cdot(S_{kl}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\\&=T_{ij}S_{kl}(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_l=T_{ik}S_{kl}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_l\end{aligned} \tag{1-24}$$

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=(T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\cdot(u_k\boldsymbol{e}_k)=T_{ik}u_k\boldsymbol{e}_i$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}&=(u_k\boldsymbol{e}_k)\cdot(T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)=T_{kj}u_k\boldsymbol{e}_j\\&=T_{ki}u_k\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

两个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的双点积(也称为标量积)定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S} &= (T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j):(S_{kl}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\\ &= T_{ij}S_{kl}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_l) = T_{kl}S_{kl}\\ \boldsymbol{T}\cdot\cdot\boldsymbol{S} &= (T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\cdot\cdot(S_{kl}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\\ &= T_{ij}S_{kl}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k) = T_{lk}S_{kl}\end{aligned}\tag{1-25}$$

6. 张量的缩并

如果对基张量中的任意两个基矢进行点积,便得到比原张量低二阶的张量,称为张量的缩并。例如,对四阶张量 $\boldsymbol{T}=T_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l$ 中的基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_k$ 进行点积,便得到二阶张量 $\boldsymbol{S}=T_{kjkl}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_l$。

命题 2　张量在同一坐标系中的分量是唯一确定的。

证　以二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 为例,设 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=S_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

对于任一确定的 $k(k=1,2,3)$,用 $\boldsymbol{e}_k$ 右点乘上式的两边,可得

$$T_{ik}\boldsymbol{e}_i=S_{ik}\boldsymbol{e}_i$$

由于基矢 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$ 线性无关,从而有

$$T_{ik}=S_{ik}(i,k=1,2,3)$$

证毕。

命题 3　张量的分量表示法与并矢表示法是等价的。

证　以二阶张量为例来证明张量的这两种表示法是等价的。

设二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的分量表示式(1-12)成立,由式(1-7b)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = T_{ij}(Q_{mi}\boldsymbol{e}'_m)\otimes(Q_{nj}\boldsymbol{e}'_n)\\ &= (Q_{mi}Q_{nj}T_{ij})\boldsymbol{e}'_m\otimes\boldsymbol{e}'_n = T'_{mn}\boldsymbol{e}'_m\otimes\boldsymbol{e}'_n = T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j\end{aligned}$$

因此张量 $\boldsymbol{T}$ 的并矢表示式(1-15)成立。反之,如果式(1-15)成立,则由式(1-7b)有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = (Q_{mi}Q_{nj}T_{ij})\boldsymbol{e}'_m\otimes\boldsymbol{e}'_n\\ &= (Q_{im}Q_{jn}T_{mn})\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j = T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j\end{aligned}$$

得

$$T'_{ij}=Q_{im}Q_{jn}T_{mn}$$

同理,由式(1-15),(1-7a)可得

$$T_{ij}=Q_{mi}Q_{nj}T'_{mn}$$

因此,张量的分量表示式(1-12)成立。

证毕。

对于一、二阶张量,采用矩阵写法后,则张量的加减、数乘及点积都有对应的矩阵运算,而张量的乘法及缩并则没有对应的矩阵运算。例如,对于张量的点积有:

$$
\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}\Leftrightarrow[\boldsymbol{T}][\boldsymbol{S}]\\
&\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\Leftrightarrow[\boldsymbol{T}][\boldsymbol{u}]\\
&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\Leftrightarrow[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{u}]\\
&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\Leftrightarrow[\boldsymbol{u}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{v}]
\end{aligned}\right\} \tag{1-26}
$$

这里,“$\Leftrightarrow$”的意义为等价于。

本节最后介绍张量运算中的一个非常有用的定理——商定理或商法则。它可表述为:如果带有 n 个指标的变量集合$\{T_{i_1i_2\cdots i_n}\}$,与任一矢量 $\boldsymbol{u}$ 的点积 $T_{ki_2\cdots i_n}u_k$ 是 $n-1$ 阶张量,则$\{T_{i_1i_2\cdots i_n}\}$表示 n 阶张量。证明如下:

由于 $T_{ki_2\cdots i_n}u_k$ 是 $n-1$ 阶张量,于是有

$$
\begin{aligned}
T'_{li_2\cdots i_n}u'_l &= T'_{li_2\cdots i_n}Q_{lk}u_k\\
&= Q_{i_2j_2}\cdots Q_{i_nj_n}T_{kj_2\cdots j_n}u_k
\end{aligned}
$$

由于 u_k 的任意性,可得

$$
T'_{li_2\cdots i_n}Q_{lk} = Q_{i_2j_2\cdots}Q_{i_nj_n}T_{kj_2\cdots j_n}
$$

上式两边同乘以 Q_{i_1k}并求和,由式(1-8)可得

$$
\begin{aligned}
T'_{li_2\cdots i_n}(Q_{lk}Q_{i_1k}) &= T'_{i_1i_2\cdots i_n}\\
&= Q_{i_1k}Q_{i_2j_2\cdots}Q_{i_nj_n}T_{kj_2\cdots j_n}
\end{aligned}
$$

即
$$
T'_{i_1i_2\cdots i_n}=Q_{i_1j_1}Q_{i_2j_2}\cdots Q_{i_nj_n}T_{j_1j_2\cdots j_n}
$$

因此,集合$\{T_{i_1i_2\cdots i_n}\}$是 n 阶张量。

第二节 二阶张量、各向同性张量

由于笛卡儿张量是欧氏空间中的笛卡儿直角坐标系中的张量,故笛卡儿张量的分量都是实数,因此是实张量,所对应的矩阵是实矩阵,以后不再另加说明。

一、二阶张量的一些简单性质

设二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 为

$$
\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j
$$

1. 转置张量

张量 $\boldsymbol{T}$ 的转置张量 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 定义为

$$
\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = T_{ij}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i = T_{ji}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{1-27}
$$

于是有

$$
[\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}] = [T^{\mathrm{T}}_{ij}] = [T_{ji}] = [T_{ij}]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}} \tag{1-28}
$$

2. 逆张量

如果 $\det\boldsymbol{T}=\det([T_{ij}])\neq0$，则称张量 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异的。对于非奇异的张量 $\boldsymbol{T}$，必有张量 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 存在，使得

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}=\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{1-29}$$

张量 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 与张量 $\boldsymbol{T}$ 互为逆张量。

由于 $\det\boldsymbol{T}=\det([T_{ij}])\neq0$，由矩阵理论可知，必有矩阵 $[S_{ij}]=[T_{ij}]^{-1}$ 存在，即

$$T_{ik}S_{kj}=S_{ik}T_{kj}=\delta_{ij}$$

记 $\boldsymbol{S}=S_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$，由式(1-24)及上式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}&=(T_{im}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_m)\cdot(S_{kj}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_j)\\&=T_{ik}S_{kj}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

同理可得

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}=\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{I}$$

所以，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}^{-1}$。因此，如果张量 $\boldsymbol{T}$ 非奇异，则必有逆张量 $\boldsymbol{T}^{-1}$，且有

$$[\boldsymbol{T}^{-1}]=[\boldsymbol{T}]^{-1} \tag{1-30}$$

利用张量的并矢记法，还可以证明：

$$(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T},\quad(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{1-31}$$

$$(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}^{-1},\quad(\boldsymbol{T}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{T}^{-\mathrm{T}} \tag{1-32}$$

3. 对角张量

如果对于任意的 $i\neq j$，恒有 $T_{ij}=0$，则称 $\boldsymbol{T}$ 为对角张量。对角张量 $\boldsymbol{T}$ 可表示为

$$\boldsymbol{T}=\delta_{ij}T_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=T_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i \tag{1-33}$$

4. 对称张量与反对称张量

如果 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$，即 $T_{ji}=T_{ij}$ 恒成立，则称 $\boldsymbol{T}$ 是对称张量。显然，对角张量一定是对称张量。

如果 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{T}$，即 $T_{ji}=-T_{ij}$ 恒成立，则称 $\boldsymbol{T}$ 是反对称张量。

例　设 $\boldsymbol{u}$ 是一阶张量，$\boldsymbol{T}$ 是二阶张量，试证明

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u} \tag{1-34}$$

证　由张量点积的定义可得

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=(u_k\boldsymbol{e}_k)\cdot(T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)=T_{kj}u_k\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}=(T_{ij}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i)\cdot(u_k\boldsymbol{e}_k)=T_{kj}u_k\boldsymbol{e}_j$$

故

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}$$

如果 $\boldsymbol{T}$ 是对称张量，即 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$，则有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u} \tag{1-35}$$

二阶对称张量可用 6 个分量来表征，而二阶反对称张量可用 3 个分量来