经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

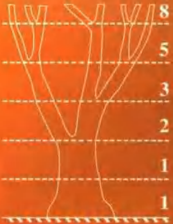
普通高中课程标准实验教科书

（必修）

数学

SHU XUE

5



凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书

（必修）数学

主　编：单　墫
副主编：李善良　陈永高　王巧林

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书
书　　名　数学5(必修)
责任编辑　蔡　立
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市马家街31号 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　扬中市印刷有限公司
厂　　址　江苏扬中科技园区东进大道6号(邮编 212212)
电　　话　0511-8420818
开　　本　890×1240毫米　1/16
印　　张　6.75
版　　次　2005年12月第2版
　　　　　2005年12月第1次印刷
书　　号　ISBN 7-5343-6529-5/G·6224
定　　价　7.40元
邮购电话　025-85400774,8008289797
盗版举报　025-83204538

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

本册主编　徐稼红

编写人员　徐稼红　董林伟　陆云泉　樊亚东　陈跃辉　李善良

参与设计　尤建功　夏建国　张乃达　陈光立

责任编辑　蔡　立

数学是科学的大门和钥匙.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学,你感到高中阶段的学习生活有趣吗?

我们知道,数学与生活紧密相连.数学可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活.数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题,我们要认真观察、实验、归纳,大胆提出猜想.为了证实或推翻提出的猜想,我们要通过分析,概括、抽象出数学概念,通过探究、推理,建立数学理论.我们要积极地运用这些理论去解决问题.在探究与应用过程中,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展.在数学学习过程中,我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要,本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的"感受・理解"部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系.它体现了教材的基本要求,是所有学生应当掌握的内容.相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容,包括思考、探究、链接,以及习题中的"思考・运用"、"探究・拓展"等,以激发你探索数学的兴趣.在掌握基本内容之后,选择其中一些内容作思考与探究,你会更加喜欢数学.

说　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作.参与本册讨论与审稿的专家与教师有:葛军、石志群、仇炳生、寇恒清、于明、孙旭东、张松年、卫刚、王红兵、祁建新、冯惠愚、周敏泽、丁世明、罗强、袁亚良等,在此向他们深表感谢!

本书编写组

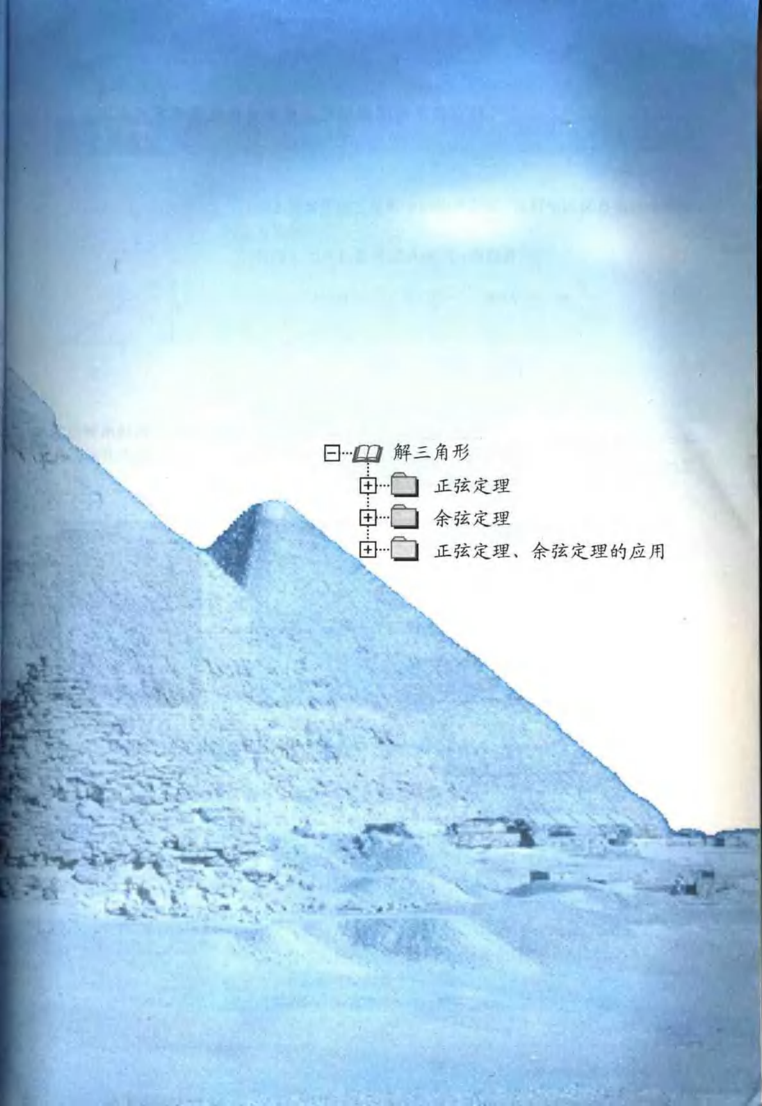
2005年11月

目　录

本书部分常用符号

$\sin A$	角 A 的正弦
$\cos A$	角 A 的余弦
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\mathbf{0}$	零向量
$\overrightarrow{AB}$	起点为 A、终点为 B 的向量
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模(或长度)
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$	向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的数量积
$S_{\triangle ABC}$	$\triangle ABC$ 的面积
a_n	数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项
S_n	数列的前 n 项和
$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{N}^*$	正整数集
$\varnothing$	空集
$\mathbf{R}$	实数集

第 1 章　解三角形



解三角形

- 正弦定理
- 余弦定理
- 正弦定理、余弦定理的应用

对自然界的深刻研究是数学发现的最丰富的来源.

——傅里叶

从金字塔的建造到尼罗河两岸的土地丈量，从大禹治水到都江堰的修建，从天文观测到精密仪器的制造……人们都离不开对几何图形的测量、设计和计算.

例如，测量河流两岸码头之间的距离，确定待建隧道的长度，计算卫星的角度与高度……

许多实际问题都可以转化为求三角形的边或角的问题. 我们已经知道直角三角形中的边角关系，那么，

- 任意三角形的边与角之间存在怎样的关系?
- 如何利用这些关系解决实际问题?

1.1 正弦定理

为了探索任意三角形中的边角关系，我们先回忆直角三角形中的边角关系.

如图 1-1-1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，我们有

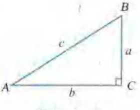


图 1-1-1

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c},\ \sin C=1=\frac{c}{c}.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

● 上述结论，对任意三角形也成立吗？

如图 1-1-2 所示，任意画一个三角形，然后测量此三角形三个内角的大小及三条边的长，再对每条边计算其长度与它的对角的正弦值之比，三个比值相等吗？改变三角形的形状再试一试.

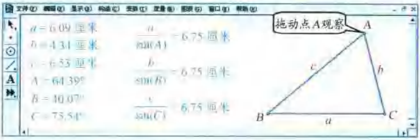


图 1-1-2

本章如无特别说明，a，b，c 分别表示 $\triangle ABC$ 中角 A，B，C 所对边的长.

于是我们猜想：对于任意三角形 ABC，都有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

即在一个三角形中，各边和它所对角的正弦之比相等.

我们可以通过下面的途径尝试证明上述结论：

(1) 转化为直角三角形中的边角关系；

(2) 建立直角坐标系，利用三角函数的定义；

(3) 通过三角形的外接圆，将任意三角形问题转化为直角三角形问题；

(4) 利用向量的投影或向量的数量积(产生三角函数).

证法 1 不妨设$\angle C$ 为最大角.

(1) 若$\angle C$ 为直角，我们已经证得结论成立.

(2) 若$\angle C$为锐角(图1-1-3(1)),过点A作$AD \perp BC$于D,此时有

$$\sin B = \frac{AD}{c},\ \sin C = \frac{AD}{b},$$

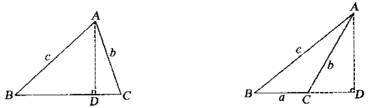
所以$c\sin B = b\sin C$,即

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理可得 $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



(1)　　(2)

图1-1-3

(3) 若$\angle C$为钝角(图1-1-3(2)),过点A作$AD \perp BC$,交BC的延长线于D,此时也有

$$\sin B = \frac{AD}{c},$$

且

$$\sin \angle ACB = \sin(180^\circ - \angle ACB) = \frac{AD}{b}.$$

仿(2)可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

由(1),(2),(3)知,结论成立.

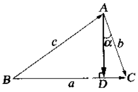


图1-1-4

向量的数量积是将向量等式转化为数量等式的常用工具.

证法2 在$\triangle ABC$中,有$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.不妨设$\angle C$为最大角,过点$A$作$AD \perp BC$于$D$(图1-1-4),于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

即

$$0 = |\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{AD}|\cos(90^\circ + B) + |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AD}|\cos\alpha,$$

其中,当$\angle C$为锐角或直角时,$\alpha = 90^\circ - C$;当$\angle C$为钝角时,$\alpha = C - 90^\circ$.

故可得

$$c\sin B - b\sin C = 0,$$

即

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理可得 $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

上述等式表明，三角形的各边和它所对角的正弦之比相等. 这样，我们得到正弦定理(sine theorem)：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

思考

尝试用其他方法证明正弦定理.

例1 如图 1-1-5，在△ABC 中，$A = 30°$，$C = 100°$，$a = 10$，求 b，c(精确到 0.01).

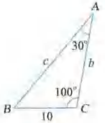


图1-1-5

解 因为 $A = 30°$，$C = 100°$，所以 $B = 50°$.

因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$，所以

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{10\sin 50°}{\sin 30°} \approx 15.32,$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{10\sin 100°}{\sin 30°} \approx 19.70.$$

因此，b，c 的长分别为 15.32 和 19.70.

解斜三角形是指由六个元素(三条边和三个角)中的三个元素(至少有一个是边)，求其余三个未知元素的过程.

例2 根据下列条件解三角形(边长精确到 0.01，角度精确到 0.1°)：

(1) $a = 16$，$b = 26$，$A = 30°$；

(2) $a = 30$，$b = 26$，$A = 30°$.

解 (1) 由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

得

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{26\sin 30°}{16} = \frac{13}{16},$$

所以 $B_1 \approx 54.3^\circ$，或 $B_2 = 180^\circ - 54.3^\circ = 125.7^\circ$.

由于 $B_2 + A = 125.7^\circ + 30^\circ = 155.7^\circ < 180^\circ$，故 B_2 也符合要求. 从而 B 有两解(图 1-1-6)：

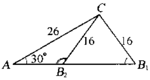


图 1-1-6

$$B_1 = 54.3^\circ，或 B_2 = 125.7^\circ.$$

当 $B_1 = 54.3^\circ$ 时，

$$\begin{aligned} C_1 &= 180^\circ - (A + B_1) = 180^\circ - (30^\circ + 54.3^\circ) \\ &= 95.7^\circ, \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A} = \frac{16\sin 95.7^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 31.84.$$

当 $B_2 = 125.7^\circ$ 时，

$$\begin{aligned} C_2 &= 180^\circ - (A + B_2) = 180^\circ - (30^\circ + 125.7^\circ) \\ &= 24.3^\circ, \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A} = \frac{16\sin 24.3^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 13.17.$$

(2) 由正弦定理，得

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{26\sin 30^\circ}{30} = \frac{13}{30},$$

所以 $B_1 = 25.7^\circ$，或 $B_2 = 180^\circ - 25.7^\circ = 154.3^\circ$.

由于 $B_2 + A = 154.3^\circ + 30^\circ = 184.3^\circ > 180^\circ$，故 B_2 不符合要求，从而 B 只有一解(图 1-1-7)，

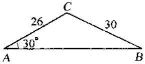


图 1-1-7

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (30^\circ + 25.7^\circ) \\ &= 124.3^\circ, \end{aligned}$$

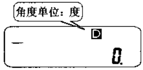
$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{30\sin 124.3^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 49.57.$$

利用正弦定理，可以解决以下两类解斜三角形的问题：

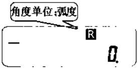
(1) 已知两角与任一边，求其他两边和一角；

(2) 已知两边与其中一边的对角，求另一边的对角(从而进一步求出其他的边和角).

CALCULATOR



(1) 在上面例 2(1)中，用计算器由 $\sin B = \frac{13}{16}$ 求锐角 B 时，要先确认角度的显示单位. 按 [MODE] [MODE] [1] 键，以度为单位显示结果；按 [MODE] [MODE] [2] 键，则以弧度为单位显示结果. 然后按 [SHIFT] [$\sin^{-1}$] [(] [1] [3] [÷] [1] [6] [)] [=] 键，得锐角 B，这里的括号不能省.



(2) B 型函数(如 sin, cos, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, log, 10^x, $\sqrt{\ }$ 等)值的计算,应先按函数键再输入数值,且这类函数前的乘号可省,如计算 $\dfrac{16\sin 95.7^\circ}{\sin 30^\circ}$ 时,只需按 [1] [6] [sin] [9] [5] [ ] [7] [÷] [sin] [3] [0] [=].

1. 一个三角形的两个内角分别为 30°和 45°,如果 45°角所对的边长为 8,那么 30°角所对边的长是(　　).

A. 4　　　B. $4\sqrt{2}$　　　C. $4\sqrt{3}$　　　D. $4\sqrt{6}$

2. 在$\triangle ABC$中,

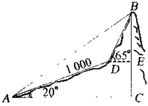
(1) 已知 $A=75^\circ$, $B=45^\circ$, $c=3\sqrt{2}$,求 a, b;

(2) 已知 $A=30^\circ$, $B=120^\circ$, $b=12$,求 a, c.

3. 根据下列条件解三角形:

(1) $b=40$, $c=20$, $C=25^\circ$;

(2) $b=13$, $a=26$, $B=30^\circ$.



如图 1-1-8,某登山队在山脚 A 处测得山顶 B 的仰角为 35°,沿倾斜角为 20°的斜坡前进 1 000 m 后到达 D 处,又测得山顶的仰角为 65°,求山的高度 BC(精确到 1 m).

分析　要求 BC,只要求 AB,为此考虑解$\triangle ABD$.

解　过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E,因为 $\angle DAC=20^\circ$,所以 $\angle ADE=160^\circ$,于是

$$\angle ADB=360^\circ-160^\circ-65^\circ=135^\circ.$$

又 $\angle BAD=35^\circ-20^\circ=15^\circ$,所以 $\angle ABD=30^\circ$.

在$\triangle ABD$中,由正弦定理,得

$$AB=\frac{AD\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\frac{1\,000\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}=1\,000\sqrt{2}(\text{m}).$$

在 Rt$\triangle ABC$ 中,

$$BC=AB\sin 35^\circ=1\,000\sqrt{2}\sin 35^\circ\approx 811(\text{m}).$$

答　山的高度约为 811 m.

在$\triangle ABC$中,已知 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$,试判断$\triangle ABC$的形状.

解　令 $\dfrac{a}{\sin A}=k$,由正弦定理,得

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$$

代入已知条件，得

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C},$$

即

$$\tan A=\tan B=\tan C.$$

又 $A, B, C\in(0, \pi)$，所以 $A=B=C$，从而$\triangle ABC$为正三角形.

在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线(图 1－1－9)，用正弦定理证明

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

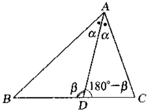


图 1－1－9

证　设 $\angle BAD=\alpha$, $\angle BDA=\beta$，则 $\angle CAD=\alpha$, $\angle CDA=180^\circ-\beta$. 在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中分别运用正弦定理，得

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

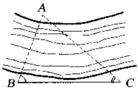
$$\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(180^\circ-\beta)}{\sin\alpha}.$$

又 $\sin(180^\circ-\beta)=\sin\beta$，所以

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC},$$

即

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$



(第1题)

1. 为了在一条河上建一座桥，施工前在河两岸打上两个桥位桩 A, B(如图). 要测算出 A, B 两点间的距离，测量人员在岸边定出基线 BC，测得 $BC=78.35\ \mathrm{m}$, $\angle B=69^\circ43'$, $\angle C=41^\circ12'$，试计算 AB 的长(精确到 0.01 m).
2. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$的形状：
   (1) $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$;
   (2) $a\cos A=b\cos B$.
3. 在$\triangle ABC$中，若 $A=60^\circ$, $a=\sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$等于(　　).

   A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$