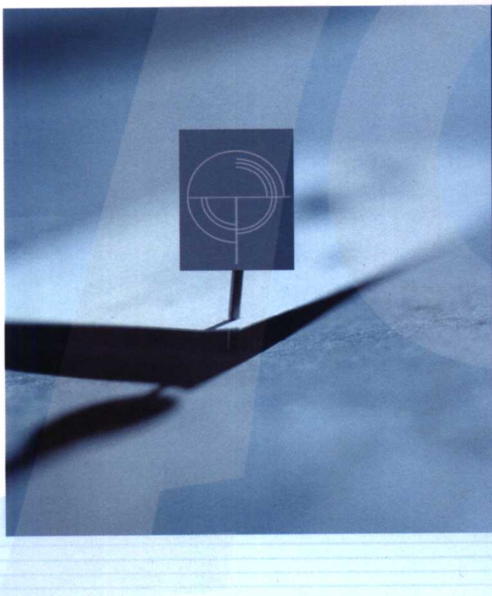
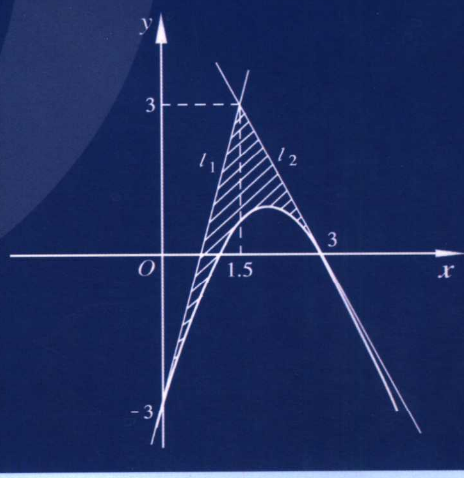
高职高专“十一五”规划教材

Gaodeng Shuxue

高等数学

马晓明 易同贸 主编





华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

高职高专“十一五”规划教材

高等数学

主　编　马晓明　易同贸

参　编　李伟文　熊松柏　姚文功

陈　婷　郭文婷　花　威

熊应竹　吴章文　阚远辉

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/马晓明　易同贸　主编
武汉：华中科技大学出版社，2006 年 9 月
ISBN 7-5609-3827-2

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①马…　②易…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

高等数学　　　　马晓明　易同贸　主编

责任编辑：徐正达　　　　封面设计：刘　卉
责任校对：陈　骏　　　　责任监印：张正林

出版发行：华中科技大学出版社
武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437

录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：湖北开元印务有限公司

开本：787×1092　1/16　　印张：11.5　　字数：269 000
版次：2006 年 9 月第 1 版　　印次：2006 年 9 月第 1 次印刷　　定价：18.00 元
ISBN 7-5609-3827-2/O・397

内容提要

本书是高职高专“十一五”规划教材，是根据高职高专“理工类高等数学课程教学基本要求”编写的.

本书坚持理论“以必需，够用为度”的原则，结合学生的学习特点，教学内容上做了精心安排，起点较低，循序渐进，逐步提高学生的数学素质与数学感悟能力. 坚持贯彻以应用为目的. 书中列举了许多实例，以提高学生的学习兴趣和运用数学知识解决实际问题的能力.

本书主要内容为一元函数微积分学，包括极限、连续、导数、微分和积分等部分. 另外，多元函数微积分学初步知识为选学内容，供不同专业选择.

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，例题丰富，便于自学，可供高职高专学校及教学要求相当的学校选用.

前　言

当前,我国高职高专教育已成为社会关注的热点,面临着大好的发展机遇. 高职高专教育的根本任务是培养生产、建设和管理第一线的技术应用型人才. 如何发挥高等数学在21世纪培养技术应用型人才中的作用,是数学教学改革的重点. 我们认为,数学教育不仅仅是要教给学生数学知识,还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力,让学生学会用数学的思维方式观察周围的事物,能用数学的思维方法分析和借助计算机解决实际问题.

同时,随着高校不断扩招,进入高职高专学校学生的基础参差不齐,学生对学习数学的热情不高已很普遍,如何提高学生的积极性和主动性也是很值得我们注意的. 另外,不同专业对数学的要求也有所不同,这也使得我们在教学过程要区别对待.

基于上述考虑,并结合我院实际,在总结多年教学改革经验的基础上,我们编写了这本面向高职高专的数学教材. 本教材主要体现以下几个特点:

(1) 教学定位适当. 大量借助数表和图像,将抽象的数学知识生动直观地表现出来,增强学生的感性认识. 知识过渡自然,引例浅显,案例生动,具有较强的可读性和可施教性.

(2) 重点突出. 以数学知识的"产生—形成—应用"为主线,强化数学的基本思想和基本方法. 对基本知识详细介绍它的实际背景、来源分析、处理方法、结果含义解释等,让学生"透彻"理解主要基本知识的实质和所含的基本的数学思想.

(3) 理论与实际相结合,强调数学知识的应用. 引用一些贴近生活实际的例子,提高学生的学习兴趣,培养学生应用数学的意识.

(4) 结构合理. 将定积分和不定积分融合为一章,先讲定积分的概念和性质后,再讲不定积分,并通过微积分基本定理建立起定积分与原函数(不定积分)的关系,最后讲基本积分方法,这样既突出了重点,又便于理解.

(5) 每章安排演示与实验部分. 对复杂一些的例子作为演示与实验部分,主要由教师组织进行演示,有条件的学校可以让学生在教师指导下进行实验. 一方面加深概念的理解,巩固前面已学内容. 另一方面,将数学建模的思想和方法融入教材,选编了丰富的数学应用案例以培养学生的数学应用能力.

该书由易同贸副教授总策划、负责组织实施,由马晓明副教授最终定稿. 参与编写的人员有李伟文副教授、熊松柏副教授、吴章文副教授、熊应竹副教授和花威、姚文功、陈婷、郭文婷、阙远辉等教师.

由于我们的水平有限,本教材难免存在缺点和错误,敬请广大师生、读者批评指正.

编者

2006.7

目　　录

第一章　函数的极限和连续 …………（1）
第一节　函数 …………（1）
习题1-1 …………（9）
第二节　数列的极限 …………（10）
习题1-2 …………（15）
第三节　函数的极限 …………（15）
习题1-3 …………（20）
第四节　无穷大与无穷小 …………（20）
习题1-4 …………（22）
第五节　函数极限的计算 …………（22）
习题1-5 …………（28）
第六节　函数的连续性 …………（29）
习题1-6 …………（33）
演示与实验一 …………（35）
第二章　导数与微分 …………（39）
第一节　导数的概念 …………（39）
习题2-1 …………（45）
第二节　函数的和、差、积、商的求导法则 …………（46）
习题2-2 …………（48）
第三节　复合函数的求导法则 …………（49）
习题2-3 …………（51）
第四节　隐函数及参数方程所确定函数的求导法 …………（51）
习题2-4 …………（53）
第五节　高阶导数 …………（54）
习题2-5 …………（56）
第六节　函数的微分 …………（56）
习题2-6 …………（61）
演示与实验二 …………（63）
第三章　导数的应用 …………（66）
第一节　中值定理和洛必达法则 …………（66）
习题3-1 …………（69）
第二节　函数的单调性和极值 …………（69）
习题3-2 …………（73）
第三节　函数的最大值与最小值 …………（74）
习题3-3 …………（75）
第四节　曲线的凹凸性与拐点 …………（76）
习题3-4 …………（79）
第五节　函数图形的描绘 …………（79）
习题3-5 …………（81）

第六节　曲率 …… (81)
习题 3-6 …… (84)
演示与实验三 …… (85)
第四章　一元积分学 …… (87)
第一节　定积分的概念与性质 …… (87)
习题 4-1 …… (94)
第二节　不定积分的概念与性质 …… (95)
习题 4-2 …… (98)
第三节　不定积分的换元积分法 …… (99)
习题 4-3 …… (104)
第四节　不定积分的分部积分法 …… (104)
习题 4-4 …… (107)
第五节　微积分基本公式 …… (107)
习题 4-5 …… (111)
第六节　定积分的计算 …… (113)
习题 4-6 …… (113)
第七节　广义积分 …… (115)
习题 4-7 …… (115)
演示与实验四 …… (117)
第五章　定积分的应用 …… (119)
第一节　定积分的微元法 …… (119)
习题 5-1 …… (121)
第二节　定积分的几何应用 …… (121)
习题 5-2 …… (128)
第三节　定积分的物理应用 …… (129)
习题 5-3 …… (132)
演示与实验五 …… (133)
第六章　多元微积分简介 …… (139)
第一节　空间解析几何简介 …… (139)
习题 6-1 …… (142)
第二节　多元函数的概念、极限和连续性 …… (142)
习题 6-2 …… (146)
第三节　偏导数与全微分 …… (146)
习题 6-3 …… (152)
第四节　多元复合函数与隐函数的求导法则 …… (152)
习题 6-4 …… (156)
第五节　多元函数的极值 …… (157)
习题 6-5 …… (159)
第六节　二重积分 …… (159)
习题 6-6 …… (164)
演示与实验六 …… (165)
附录A　基本初等函数的图像 …… (167)
附录B　数学软件Mathematica 使用简介 …… (169)

第一章　函数的极限和连续

我们知道，用代数和几何等初等数学知识能处理很多问题，但在许多技术领域还有大量问题用初等数学知识不能解决. 因此，必须引入一套新的数学方法. 高等数学的主要内容是微分学与积分学. 高等数学与初等数学有很大区别. 初等数学主要研究事物相对静止状态下的数量关系，而高等数学则主要研究事物运动、变化过程中的数量关系. 极限方法是高等数学中处理问题的最基本的方法，高等数学中的概念、性质和法则都是极限法推导出来的. 因此，极限是高等数学中最基本的概念.

本章讨论函数的极限和连续的基本概念、基本性质和基本计算方法，并介绍它们的一些实际应用.

第一节　函　　数

引问　一天的温度是变化的，它与时间的关系如何？记忆力与时间又是什么关系？ 我国的个人所得税与工资水平之间的关系是什么？

请列举生活中的一些函数关系.

生活中有大量因素，这些因素之间常存在着某种联系，如何表示因素之间的这种联系呢？公元1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet)提出现今通用的函数概念，使不同因素间的关系更加明确，从而推动了数学的发展和应用. 在研究事物内部事物与事物各因素间的关系时，我们常常通过对客观事物的分析，用函数建立各因素之间的依赖关系式，并且通过研究函数以及函数的性质，进一步了解事物的发展规律. 函数概念是数学中的一个基本而重要的概念. 下面就函数知识进行简要地介绍和复习.

一、变量与区间

1. 常量与变量

实际生活中有两种量：常量和变量. 在某一过程中始终保持一定数值的量称为**常量**，常用 a,b,c 等符号表示；而在过程进行中可以取不同数值的量称为**变量**，常用 x,y,z 等符号表示. 如：加热密闭容器内的气体，气体的体积和气体的分子个数保持一定，是常量，而气体的温度和压力是变量.

注　一个量是常量还是变量，要具体情况具体分析.

思考题　在大学学习期间，一个班上的学生人数是常量还是变量？请列举生活中的一些常量和变量.

任何一个变量，都有确定的变化范围. 我们常用集合、区间以及邻域三种形式表示变量的变化范围.

2. 集合

一般地，一些对象组成的总体称为**集合**，通常用大写的英文字母 A,B,C，…表示，常见的有$\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 等集合. 集合中的一个对象称为**元素**，通常用小写的英文字母 a,b,c，…表示.

辨一辨：元素与集合间有什么关系？

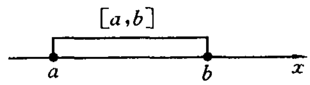
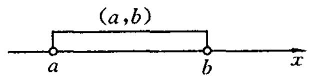
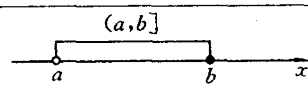
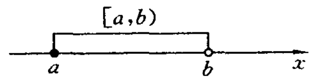
用集合描述对象时，常用列举法或描述法表示，并且集合中的元素是具有确定性、互异性、无序性的.

如用集合表示小于3的自然数：$A=\{0,1,2\}$或$A=\{x\mid x<3,x\in\mathbf{N}\}$.

3. 区间

在数轴上来说，**区间**是指介于某两点之间的线段上点的全体. 设a,b是两个实数，且$a<b$，特作如表1-1所示的规定. 其中a,b是区间的端点，数$b-a$是区间的长度.

表1-1

区间的名称	区间的满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$	$(a,b]$或$[a,b)$	

∞是数吗？

表1-1所述的都是有限区间. 除此之外，还有无限区间：

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=R$，….

注　$-\infty$和$+\infty$分别读作"负无穷大"和"正无穷大"，它们不是数，仅仅是记号.

4. 邻域

设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，记$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$为$a$的**$\delta$邻域**. $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$称为$a$的**$\delta$去心邻域**. 其中$a$称为这个**邻域的中心**，$\delta$称为这个**邻域的半径**(图1-1).

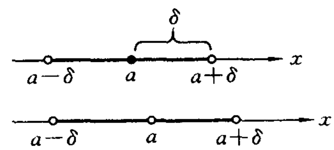


图1-1

二、函数的定义和表示

在同一自然现象或技术过程中，往往有多个变量在变化着，这些变量并不是孤立地在变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 这些规律都可以用函数表示出来.

1. 函数的定义

定义1　设x,y是两个变量，D是一给定的数集. 如果对于D中的每一个x，按照一定的法则总有确定的数值y与之对应，则称y是x的**函数**，记为

$$y=f(x).$$

因变量　自变量

法则

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**；自变量的取值范围称为**定义域**(D)，对应的因变量取值范围称为**值域**(M).

显然，一个函数是由三要素构成的：定义域、值域以及对应法则. 一般地，当函数的定义域和对应法则确定时，它的值域是确定的，那么这个函数就是确定的；而当两个函数的定义域和对应法则完全相等时，这两个函数就相等. 如 $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 两个函数相等，$f(x)=2\ln x$ 与 $g(x)=\ln x^2$ 不等.

注 1　对于上述定义中，如果自变量在定义域内任取一个确定的 x 时，函数只有一个确定的 y 值与之对应，这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**. 如 $y=\sin x$ 是单值函数，$y^2=2x$ 是多值函数. 除非特殊声明，一般函数都指的是单值函数.

注 2　形式上，函数可以用记号 $y=f(x)$，$y=F(x)$ 等来表示. 这里的字母"f,F,x,y"是可以任意采用其他字母来表示的，这并不影响函数的关系式. 进一步说，函数的本质反映的是一种关系，一种法则，一种映射.

函数的本质是什么？

2. 反函数

定义 2　设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y，都可以从 $y=f(x)$ 中找到确定的 x 值与之对应，那么因此所确定的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$. 它的定义域为 M，值域为 D.

习惯上，函数的自变量以 x 表示，所以，反函数一般都表示为 $y=f^{-1}(x)$.

易证：在同一直角坐标系中，反函数图形与原函数图形关于 $y=x$ 对称.

反函数仍是函数.

3. 函数的表示方法

函数常用的表示法有三种：解析法、列表法和图示法.

(1) 解析法.

用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法.

显函数形式：$y=f(x)$，如 $y=2x+1$.

隐函数形式：由方程 $f(x,y)=0$ 确定的函数，如 $x^2+y^2=1$.

参数方程确定的函数：$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\end{cases}$ 如 $\begin{cases}x=r\cos t,\\y=r\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi, r>0)$.

(2) 列表法.

将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是列表法.

例 1[个人所得税]　我国于 2006 年 1 月 1 日实施的《中华人民共和国个人所得税法》规定月收入超过 1600 元为应纳税所得额，纳税所得额不同，所对应的税率也不同，如表 1-2 所示(注：表 1-2 所称全月应纳税所得额是指依照规定，以每月收入额减除费用 1600 元后的余额或者减除附加减除费用后的余额).

(3) 图示法.

用坐标平面上曲线来表示函数的方法即是图示法. 一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量.（有一些情况恰恰相反，如在测量学里面.）

表 1-2

全月应纳税所得额 x/元	所交税 y/元
$0\leqslant x\leqslant 500$	$x\times 5\%$
$500<x\leqslant 2000$	$x\times 10\%$
$2000<x\leqslant 5000$	$x\times 15\%$
$5000<x\leqslant 20000$	$x\times 20\%$
$20000<x\leqslant 40000$	$x\times 25\%$
$40000<x\leqslant 60000$	$x\times 30\%$
$60000<x\leqslant 80000$	$x\times 35\%$
$80000<x\leqslant 100000$	$x\times 40\%$
$100000<x$	$x\times 45\%$

在电子科学中，有大量波形函数；在生活中，我们也会遇到一些函数图形．如人们在研究记忆力的时候，发现记忆的保持在时间上是不同的，有短时的记忆和长时的记忆两种．德国一位名叫艾宾浩斯的著名心理学家经过大量的实验总结出了一个非常有名的揭示遗忘规律的曲线：艾宾浩斯遗忘曲线．

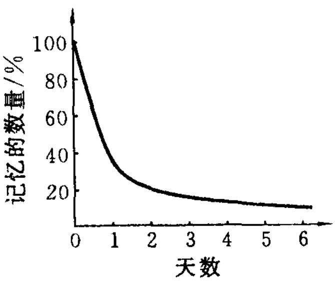


图 1-2

思考题 将图 1-2 所确定的函数用解析法表示出来．

4．举例

例 2 求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$ 的定义域．

分析 定义域的求法原则如下：

1° 分母不为零； 2° $\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$；

3° 负数和 0 没有对数； 4° $\arcsin x,\arccos x$，$-1\leqslant x\leqslant 1$；

5° 同时含有上述四项时，要求使各部分都成立的交集．

解 由 $4-x^2\geqslant 0$，有 $-2\leqslant x\leqslant 2$；由 $x^2-1\geqslant 0$，有 $x<-1$ 或 $x>1$．所以定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,2]$．

例 3 已知函数 $y=f(x)=3x+1$，D：$[-1,2]$，求 $f(0)$，$f(1)$．

解 因为 $0\in[-1,2]$，所以 $f[0]=3\times 0+1=1$；

因为 $1\in[-1,2]$，所以 $f[1]=3\times 1+1=4$．

思考题 (1) 计算 $f(3)$； (2) 求 $f(1+t)$ 及定义域； (3) 比较 $f(1+x)$ 与 $f(1+t)$．

例 4 求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数．

分析 由定义可以总结出求反函数的“三部曲”：**反解**（把解析式看作 x 的方程，求出反函数的解析式）$\longrightarrow$**互换**（求出所给函数的值域并把它改换成反函数的定义域）$\longrightarrow$**改写**（将函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式）．

解 反解：因为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，所以 $2y=e^x-e^{-x}$，从而

$$e^{2x}-2ye^{x}-1=0,$$

解得
$$e^{x}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

由于$e^x>0$,所以上式舍去负值,得$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$,于是有

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),\quad y\in\mathbf{R}$$

互换、改写:反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad D=\mathbf{R}$$

三、函数举例

我们经常会遇到下面这些函数.

1. 基本初等函数

(1) 常数函数 $y=c$, c是常数.

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$, μ是常数.

(3) 指数函数 $y=a^x$, a是常数,$a>0$且$a\neq1$;特别地,$y=e^x$.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$,a是常数,$a>0$且$a\neq1$;特别地,$y=\lg x$,$y=\ln x$.

(5) 三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$.

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数

定义3 由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的并且可以用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

如$y=\ln(\sin2x)+x^2$,$y=e^{\sqrt{\arctan x}}+\cos x$ 等都是初等函数.

事实上,大量函数并不完全是基本初等函数,而是由基本初等函数构成的函数.如函数$y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$可以看成$y=f(u)=\sqrt{u}$和$u=g(x)=4-x^2$复合而成,即$y=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{4-x^2}$,如图1-3所示.

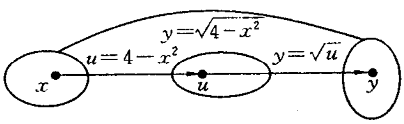


图1-3

3. 复合函数

定义4 设u是x的函数$u=\varphi(x)$,其定义域为D,y是u的函数$y=f(u)$.如果对于D或者D的子集上的每一个x,通过$u=\varphi(x)$与$y=f(u)$所确定的y值与之对应,由此产生的一个以x为自变量、y为因变量的新函数,则称为y是x的函数,记为

$$y=f(\varphi(x)).$$

因变量 外部函数 内部函数

这个函数叫做由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**,u称为**中间变量**.

注 对于两个函数$y=f(u)$和$u=g(x)$，有

1° 若函数$u=g(x)$的值域完全不在函数$y=f(u)$的定义域内，则二者不能复合. 如$y=\sqrt{u}$与$u=\sin x-2$就不能复合；

2° 一般地，函数$u=g(x)$的值域可能只有部分落在函数$y=f(u)$的定义域内，复合后的函数的定义域和值域要根据复合后的形式综合考虑；

3° 复合可以推广到两个以上的函数

4. 分段函数

另有一类常见函数——分段函数，它在不同的定义区间上，对应法则用不同的函数表达式表示. 如下面几个常见的特殊函数.

(1) 绝对值函数(图1-4).

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

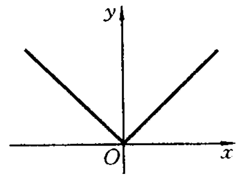


图1-4

(2) 特征函数.

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

其中A是具有某种属性的元素的集合. 此函数常用于计数统计.

特别地有，狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这是一个病态函数，很有用处，却无法画出它的图形. 它是周期函数，但却没有最小周期，事实上任一有理数都是它的周期.

(3) 符号函数(图1-5).

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

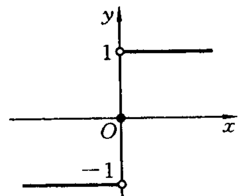


图1-5

(4) 最大整数函数.

不超过x的最大整数部分，记为$y=[x]$，如图1-6所示，如$[3.7]=3$，$[-3.7]=-4$.

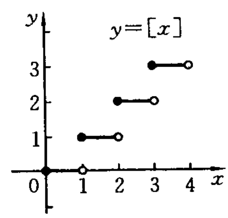


图1-6

初等函数是常见的重要函数，但是在工程技术中，非初等函数也会经常遇到，符号函数，取整函数$y=[x]$等一些分段函数就是非初等函数.

注 分段函数和初等函数并没有很明确的分界线，上述的两个分段函数就是非初等函数，但绝对值函数$y=|x|=\sqrt{x^2}$也是初等函数.

5. 举例

例5 指出以下函数的复合过程(将其分解为基本初等函数或它们的四则运算构成的函数)以及定义域：

(1) $y=\arcsin\sqrt{x}$；　　(2) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$.

解　(1) $y=\arcsin\sqrt{x}$ 是由 $y=\arcsin u$ 与 $u=\sqrt{x}$ 复合而成的，且能复合的前提条件是 $-1\leqslant u\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\sqrt{x}\leqslant 1$ 解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以 $D:[0,1]$.

(2) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$ 是由 $y=\lg u, u=1+\sqrt{v}$ 与 $v=1+x^2$ 复合而成的，且 $D=\mathbf{R}$.

例 6　已知 $g(x)=x\operatorname{sgn}x^2$，求出解析式与定义域.

解　因为 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 又 $x^2\geqslant 0$，所以

$$\operatorname{sgn}x^2=\begin{cases}1, & x^2>0,\\ 0, & x^2=0,\end{cases}\quad 即\quad \operatorname{sgn}x^2=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即
$$g(x)=x\operatorname{sgn}x^2=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad 即\quad g(x)=x,$$

且 $D=\mathbf{R}$.

思考题　计算 $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$ 与 $g(x)=|\operatorname{sgn}x|$.

四、函数的几种特性

下面介绍函数的几种特性，它对研究函数的性质、几何特征等有重要意义.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义.

(1) 有界性.

若存在正数 M，使得函数满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上是有界的，否则是无界的.

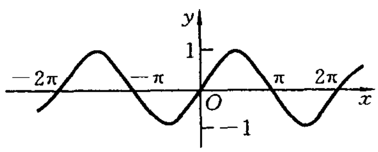


图 1-7

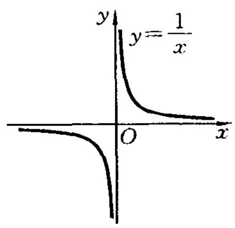


图 1-8

如：$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $|\sin x|\leqslant 1$，故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数(图 1-7)；$y=1/x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数，在 $[1,2]$ 上是有界的函数(图 1-8). 所以不能笼统地说函数是有界的还是无界的，一定要强调区间上的有界无界性.

(2) 单调性.

对于 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的. 即：在区间 I 上，函数(值)随着自变量的增大而增大的是增函数，函数值随着自变量的增大而减小的是减函数.

如：$y=\sin x$ 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上是单调增加函数(图 1-7)，$y=1/x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少函数(图 1-8).

(3) 奇偶性.

若对任意$x\in I$,有$-x\in I$,且有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数$f(x)$是**偶函数**;若有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数$f(x)$是**奇函数**.

从图形上来说,偶函数图形关于y轴对称,奇函数图形关于原点对称.

如:$y=\sin x$在$\mathbf{R}$上是偶函数,$y=1/x$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上是奇函数;又如:$f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$是偶函数,$f(x)=x(x-1)(x+1)$是奇函数;而$f(x)=\sin x-\cos x+1$是非奇非偶函数.

例7 证明$f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>0$且$a\neq1)$是偶函数.

证 因为$f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$,$D=\mathbf{R}$关于原点对称,所以

$$f(-x)=(-x)\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=(-x)\frac{a^x(a^{-x}-1)}{a^x(a^{-x}+1)}=(-x)\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x),$$

因此$f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>0$且$a\neq1)$是偶函数.

(4) 周期性.

若函数$f(x)$满足$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$是**周期函数**.周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

如$y=\sin x$,$y=\cos x$都是以2π为周期的周期函数,而$y=\tan x$,$y=\cot x$是以π为周期的周期函数.

思考题 函数的上述四种特性表现在图像上有何特点?

五、函数关系模型的建立

在解决实际问题时,有时要通过建立函数关系,然后进一步分析、计算,因此,有必要掌握建立函数关系式的方法.下面,从简单的实际问题入手,说明建立函数关系的过程.

例8[客房定价] 一旅馆有200间客房间,如果每间租金定价不超过40元,则可全部出租.若每间定价高出1元,则会少出租4间.设客房出租后的服务成本费为8元,试建立旅馆利润与房价间的函数.

解 设旅馆房价为x元.

若$x<40$,出租的客房数为200间,旅馆的利润为$y=200(x-8)$.

若$x>40$,出租的客房数为$200-4(x-40)$间,旅馆的利润为

$$y=[200-4(x-40)](x-8).$$

旅馆利润与客房租金之间的函数为

$$y=\begin{cases}200(x-8), & x\leqslant40,\\ [200-4(x-40)](x-8), & x>40.\end{cases}$$

从上面的例子可以看出,建立函数关系时,首先要弄清题意,分析问题中哪些是变量,哪些是常量;其次,分清变量中哪个应作为自变量,哪个作为函数,

并用习惯上用的字母区分它们；然后，把变量暂固定，利用几何关系、物理定理或其他知识，列出变量间的等量关系，并进行化简，便能得到所需要的函数关系；找出函数关系后，一般还要根据题意写出函数的定义域.

习　题　1-1

一、概念回顾

1. 函数$f(x)=\frac{1}{x-1}$是否为基本初等函数？

2. 函数$y=|x|$是否为初等函数？

二、计算题

1. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{4-x^2}{x^2-x-6}$；　　(2) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=t^{\frac{3}{2}}-4$；　　(4) $y=\sqrt{(x+1)^{-1}}$；

(5) $y=\sqrt{\cos x}$；　　(6) $y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\lg(5-x)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　　(8) $y=\begin{cases} -x, & -1\leqslant x<0, \\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2. \end{cases}$

2. 已知$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求$f(-x)$，$f(x)+1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$.

3. 下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$；

(2) $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=2\lg x$.

4. 设$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\pi/3, \\ 0, & |x|\geqslant\pi/3, \end{cases}$求$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$.

5. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x+1$；　　(2) $f(x)=3x^2+2x-1$；

(3) $f(x)=|x|/x$；　　(4) $f(x)=a^x$ $(a>0, a\neq 0)$.

6. 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\cos x^4$；　　(2) $y=\sqrt{\sin^2x}$；

(3) $y=\frac{1}{\arccos\sqrt{x}}$；　　(4) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$.

三、应用题

1. [运动方程]　设火车从甲站出发，以 0.5 $\mathrm{km/min^2}$ 的加速度匀加速前进，经过2 min 后开始匀速行驶，在经过7 min 后以-0.5 $\mathrm{km/min^2}$ 的加速度匀减速到达乙站. 试将火车在这段时间内所行驶的路程s表示为时间t的函数，并作出其图形.

2. [生产利润]　某一玩具公司生产x件玩具将花费$400+5\sqrt{x(x-4)}$元，如果每件玩具卖48 元，那么公司生产x件玩具获得的净利润是多少？

3. [生产费用]　某工厂生产计算机的日生产能力为0 到100 台，工厂维持

生产的日固定费用为 4 万元，生产一台计算机的直接费用（含材料费和劳务费）是4250 元. 试建立该厂日生产 x 台计算机的总费用函数，并指出其定义域.

4. ［汽车租赁］　一汽车租凭公司出租某种车的收费标准为：每天的基本租金 200 元，另外每千米收费为 15 元.（1）试建立每天租车费与行车路程 x（单位：km）间的函数关系；（2）若某人有天付了 400 元租车费，他开了多长路程？

第二节　数列的极限

引问

1. ［弹球模型］　一球从1 m 高处落下，每次弹回的高度为上次高度的2/3，这样运动下去，用第 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 次的高度来表示球的运动规律，则为数列

$$1,\ \frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ \cdots,\quad 或\quad \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\},$$

试问它有何变化规律.

2. 在《庄子 · 天下篇》中，有这样的记载：一尺之棰，日取其半，万世不竭. 试问它有什么含义（图 1-9）.

3. 不用圆面积的计算公式，能计算出圆的面积么？

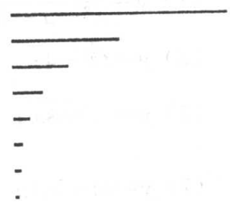


图 1-9

一、割圆术

该如何计算圆面积呢？在很长一段时间，人们试图采用各种方法去近似计算圆的面积. 在国外，公元前 480 年，希腊人提出：化圆为方，但一直没有一个理想的结果. 公元前 430 年，希腊的安提丰提出穷竭法，用不断平分弧段的办法使多边形的边数不断增加，多边形的面积便逐渐接近圆的面积. 如果不断增加边的数目，最后一定能“耗尽”多边形和圆之间的弓形面积，因而达到求面积的目的. 与他同时代的白莱生还考虑了圆外切多边形，认为真正的面积乃是两者的算术平均值. 在我国，约公元 263 年，三国的魏人刘徽注解《九章算术》，提出了“割圆术”，将圆周用内接或外切正多边形穷竭的方法求圆面积和圆周长. 他利用割圆术科学地求出了圆周率 $\pi=3.14\cdots$ 的结果，其中包含了丰富的极限思想.

“割圆术”求圆面积的做法和思路是：先作圆的内接正 3 边形，其面积记为 S_1；再作内接正 6 边形，其面积记为 S_2；再作内接正 12 边形，其面积记为 S_3……照此下去，把内接正 $3\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 S_n（图 1-10）. 这样得到一数列：$S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n,\cdots$.

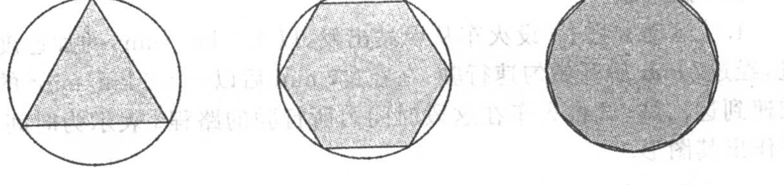


图 1-10

直观上不难看出：随着圆内接正多边形边数的增加，内接正多边形的面积与圆的面积越来越接近，可以想象：当边数 n 无限增大时，内接正 n 边形的面积