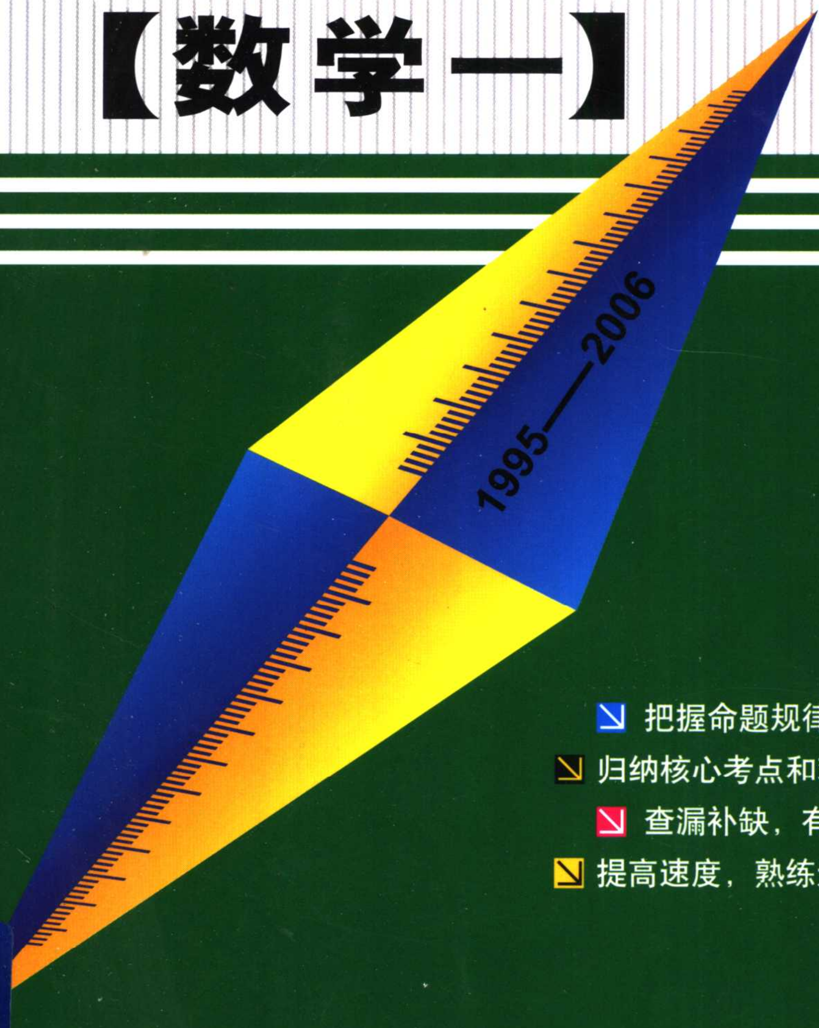
易过新理念丛书

易过

2007年

考研数学历年真题

【数学一】详解



主 编：黄庆怀

- 把握命题规律与趋势
- 归纳核心考点和难点
- 查漏补缺，有的放矢推进复习
- 提高速度，熟练运用答题技巧

中国社会出版社

2007年
考研数学历年真题详解
【数学一】

主　编：黄庆怀
编　者：葛余博（清华大学教授）
　　　　杨　鸿（北京理工大学教授）

中国社会出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题详解·数学一/黄庆怀 主编．—北京：中国社会出版社，2005.4
(考研数学历年真题详解)
ISBN 7－5087－0470－3
Ⅰ.考… Ⅱ.黄… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028357 号

丛 书 名:考研数学历年真题详解
书　　名:考研数学历年真题详解·数学一
主　　编:黄庆怀
责任编辑:杨　晖　张国洪

出版发行:中国社会出版社　　邮政编码:100032
通联发行:北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦
电话:66016392　　传真:66016392
欢迎读者拨打免费热线 8008108114 或登录 www.bj114.com.cn 查询相关信息
经　　销:各地新华书店

印刷装订:北京高岭印刷有限公司
开　　本:787×1092 毫米　1/16
印　　张:50.25
字　　数:842 千字
版　　次:2006 年 3 月第 2 版
印　　次:2006 年 3 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7－5087－0470－3/O·10
定　　价:70.80 元(全四册)

前　言

在高等教育大众化的今天，考研热已逐步形成，众所周知，考研的难点在数学，数学是一道门槛。硕士研究生入学考试的数学试题题量适当，主、客观性试题在试卷中占分比例为7:3，主观性试题包括计算题，证明题，综合题和应用题，客观性试题有填空题和选择题。纵观几年来的试卷，试题主要以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上注重考查学生的抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力。填空题是主要用于考查“三基”以及数学重要性质，以中等难度试题为主；选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解并能进行简单推论、判定和比较；综合题考查的是知识点之间的有机结合；应用题一般结合与考生专业具有共性的相关背景知识。从而既有利于国家对高等层次人才的选拔，也利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高。本套丛书共分四册，本册为《考研数学历年真题及详解・数学一》。丛书以教育部公布的最新考试大纲为基础，紧扣考试大纲，注重解题方法与技巧，并结合名校名师多年来对考研试题研究的经验和考研高分考生的心得精心编著而成。本册《考研数学历年真题及详解・数学一》收录了1995年～2006年12套全国硕士研究生入学考试数学一试题。这些试题凝聚了12年来参加命题的专家、教授的集体智慧，是一份十分宝贵的资料。这些试题既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力的测试要求，又充分体现了命题专家和教授们进行数学命题的基本指导思想和基本原则，而且还能全面地展现试卷的结构、题型的特点，使考生能及早地体会到考研数学试题的“形势”，以便尽早做出自己的复习计划。

本书在结构和试题编排上采纳了各名校专家、教授的意见，并通过高分考生的意见反馈对本书进行了如下编排：

1. 在第一部分，我们汇编了1995年～2006年的全部数学一试题。试题按照2006～1995的顺序编排，以便考生能尽快地了解最近几年的考研数学的试题结构、题型特点、试题难度及分值分配等。这样的顺序编排完全是为了让考生能在第一时间里了解考研数学的最新基本形势。

2. 在第二部分，我们对1995年～2006年的全部数学一试题根据《数学考试大纲(数学一)》的考查要求按照学科和知识点进行科学地编排，做到既能紧扣《数学考试大纲》，又能突出解题技巧；既能使各知识点层次清晰，又能使考生融会贯通，灵活运用。在试题分析、详解及评注上，我们把相同或相近的知识点摘录到一起进行解析，这样做便于考生进行比较分析，同时也给考生提供了一个重要信息，即：考生会发现相同或相近的知识点在相隔多年后会重新进行命题以及掌握考查的知识点和题型的变化情况，以增强考生对命题基本规律的感性认识。本部分对每道试题都做出了答案、分析、详解及评注，其中，答案部分用以检验考生的答题正确率；分析部分主要给考生以提示，即解题思路，使考生迅速联想相关知识点寻找解题方法，以期加强考生的数学思维能力的培养，提高考生的破题能力；详解部分给出了本题的详细解答过程

及步骤，使考生除了正确解答此题之外，能规范自己的书写过程，在平时就达到实战效果；评注部分主要根据本题进行知识点的扩展，引导考生能够做到举一反三，触类旁通。

为了配合本书的使用，我们的建议如下：

(1)注重基础知识

这几年考研数学试题的难度变化不大(但计算量比较大)，基本题约占百分之七十，另外的百分之三十略有难度。这就要求考生对基本知识要熟练掌握，但仅仅是对本科教材熟练掌握还是不行的，这是因为考研题有自己的风格和出题思路，需要辅导教师有重点的辅导。

(2)注重解题方法、技巧的训练

一方面由于考研出题的总的思路是数学知识的掌握及其运用能力，考题的计算量较大，同样一道题，解题方法不一样，花费的时间也不一样。

(3)注重答题方式

平时训练应按考研评分标准解题，对不能给出解答的题尽量写出采分点。

(4)注重合理分配答题时间

历年的考试中，都有很多学生并没有答完题。其实没做的题有些是非常简单的，有的学生甚至还没来得及看，这就要求考生平时在做3个小时的套题时，在不会做或较长时间没有做出正确结果的题上不要"恋战"，从大局出发，总体把握做题时间，对没有做好的题3小时以后再研究。

参与本书编辑和出版的工作人员在整个过程中时刻本着对广大考生负责的态度，高标准、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有不足和不尽人意之处。敬请广大考生与专家、同行不吝赐教和批评指正。

最后，预祝广大考生复习顺利，考研成功！

编　者

2006年3月

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分 线性代数

第三部分　概率论与数理统计

历年数学一考研试题分析、详解及评注

第一部分　高等数学

硕士研究生入学数学考试历来是考生头疼的问题，数学试卷具有内容多、知识面广、综合性和技巧性较强的特点. 在这里，我们结合部分高分考生的复习经验，提出几点建议，供考生参考：

1. 制订周密的复习计划；
2. 吃透考试大纲；
3. 重视基础知识；
4. 认真分析每一道真题；
5. 练习计算能力；
6. 调整好心态.

下表是 1995—2006 年高等数学各章分值分布情况，望考生把握好重点.

1995—2006 年高等数学各章分值分布

内容 / 分值 / 年份	函数极限连续	一元函数微分学	一元函数积分学	向量代数与空间解析几何	多元函数微分学	多元函数积分学	无穷级数	常微分方程
1995	3	6	3	6	5	19	12	7
1996	8	11		3	12	11	10	10
1997	6	3	12	6	10	10	8	5
1998	9	9	3	5	3	16	5	9
1999	3	9	6		5	12	10	9
2000	5	9	3	3	5	23	9	3
2001		13	6		12	18	8	3
2002	6	6	10		10	15	10	3
2003	8	4	20	4	4	22	16	12
2004	4	20	8		12	12	15	15
2005		20	15		12	27	12	4
2006	4	18	16		12	25	13	5
合计	56	128	102	27	102	210	128	85

第一章　函数、极限、连续

“函数、极限、连续”这一部分的概念及运算是高等数学的基础，它们是每年必考的内容之一，数学一中本部分分数平均每年占高等数学部分的 10%.

考生复习本部分时应重点把握以下内容：

(1)理解函数的概念，会进行函数记号的运算，并会建立简单应用问题中的函数关系式；了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形.

(2)理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系；掌握极限的性质及四则运算法则；掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限；掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小、无穷大的概念；掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

(3)理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)；会判断函数间断点的类型；了解连续函数的性质和初等函数的连续性；了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

一、函数的基本性质

1. (99，填(1)题，3 分)$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=$ $\underline{\frac{1}{3}}$.

【分析】 本题是“$\infty-\infty$”型未定式，首先要进行式子转化，使其转化为基本形式，然后用洛必达法则求解.

【详解 1】

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

【详解 2】 $$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$$

【评注】 对于“0－0”或“$\infty-\infty$”未定式求极限，一般需要先进行通分，转化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，然后再利用洛必达法则或者用等价无穷小代换进行求解.

小结

1. 函数的单调性常利用单调的定义或导数来研究.

2. 周期性的证明,就是寻求 $T\neq 0$,使 $f(x+T)=f(x)$.

3. 奇偶性的判定常从 $f(-x)$ 出发:若 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 为奇函数.

4. 函数的有界性中,要正确区分无穷大和无界变量,无穷大量一定是无界变量,而无界变量不一定是无穷大量.

二、数列极限

1. (96,三(2)题,5 分) 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求此极限.

【分析】 本题是有关极限问题的证明题,一般方法是通过数列的单调性来确定极限是否存在.

【详解】 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=4$ 知,$x_1>x_2$.

设对某个正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$ 则

$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$.

故由归纳法知,对一切正整数 n,都有 $x_n>x_{n+1}$,即数列 $\{x_n\}$ 为单调递减数列.

又显然有 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 即 $\{x_n\}$ 有下界,根据单调有界数列必有极限知,数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限,得 $a=\sqrt{6+a}$,

从而 $a^2-a-6=0$

解得 $a=3$ 或 $a=-2$(舍去,因为 $x_n>0$)故所求极限值为 $a=3$.

【评注】 用单调有界准则求递归数列($x_{n+1}=f(x_n)$)的极限,首先证明 x_n 单调有界,存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,由 $a=f(a)$ 解出 a.

2. (98,七题,6 分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【分析】 本题主要考查利用夹逼定理或定积分定义求某些和式的极限. 本题是两种方法的结合,先用夹逼定理,然后在夹逼的左、右两边再化为积分和式.

【详解】 由于

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}, i=1,2,3,\cdots,n.$$

于是$\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+\dfrac{i}{n}}<\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=1\cdot\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$.

故根据夹逼定理知,原式$=\dfrac{2}{\pi}$.

【评注】 以上只是求极限问题的一种基本方法,除此之外,常用方法还有将求数列极限转化为求函数极限,用单调有界准则求递归数列($x_{n+1}=f(x_n)$)的极限,利用定积分定义求某些和式的极限,望考生对列举的几种基本方法熟练掌握.

3.(03,选(2)题,4分)设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A)$a_n<b_n$对任意n成立.　　(B)$b_n<c_n$对任意n成立.

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在.　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

【　　】

【答】 应选(D).

【分析】 本题可通过排除法找出正确答案.

【详解】 用举反例法,取$a_n=\dfrac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\dfrac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$,则可立即排除(A),(B),(C),因此正确选项为(D).

【评注】 关于∞的确定型还有:$(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)$,$\infty\cdot\infty=\infty$,
$\infty\pm(\text{有界})=\infty$;但要注意:$\infty\cdot(\text{有界})$不一定为$\infty$.

4.(06,(16)题,12分)设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$,$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$

(Ⅰ)证明$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

【分析】 本题应先运用单调有界性说明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,再计算极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$和(Ⅱ)

【详解】 (Ⅰ)由于$0<x_1<\pi$,得

$$0<x_2=\sin x_1\leqslant 1<\frac{\pi}{2},$$

所以

$$x_2=\sin x_1<x_1,$$

$$0 < x_3 = \sin x_2 < x_2$$

依此类推,得数列$\{x_n\}$单调下降有下界零,故极限$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在,记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,对计算式$x_{n+1} = \sin x_n$两边取极限,得$x_0$满足方程

$$x_0 = \sin x_0$$

设$f(x) = x - \sin x$,那么$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续且单调上升,从而方程$f(x) = 0$有惟一零点$x_0 = 0$.

即

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$$

(Ⅱ)注意到

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n^2} = +\infty,$$

此极限可利用重要极限计算,从而

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{\sin x_n}{x_n} - 1\right)^{\frac{x_n}{\sin x_n - x_n}}\right]^{\frac{\sin_n - x_n}{x_n}\cdot\frac{1}{x_n^2}}$$

由于$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$,于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x_n - x_n}{x_n^3} &= \lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

故原极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

【评注】 本题属于极限计算综合题,涉及知识较多,极限的单调有界收敛准则,重要极限计算,洛必达法则和单调连续函数性质都是本题的考点.

小 结

判别数列收敛的主要方法有:

(1)数列收敛定义.用定义判断数列收敛是考题难点,需要严密的推理.

(2)单调有界准则.证明数列$\{a_n\}$有界且单调,主要针对递推数列.

(3)夹逼定理.须将函数适当放大或缩小而且要求放大或缩小的两个函数具有相同的极限.

三、函数极限

1. (95,填(1)题,3 分) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ __e^6__.

【分析】 本题主要考查"1^{∞}"型未定式,可用第二类重要极限或化为指数函数求极限.

【详解 1】 用第二类重要极限:

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right\}^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6.$$

【详解 2】 化为指数函数求极限:

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\ln(1+3x)}{3x}}=e^6.$$

【评注】 显然,本题可直接用公式求解.对于"1^{∞}"型未定式,最简单的处理方法是利用极限,即:

$$\lim u^v=\lim[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha v}=e^{\lim \alpha v},(\alpha=u-1).$$

也就是说,对于"1^{∞}"型未定式,求 $\lim u^v$ 归结为求 $\lim(u-1)v$.

2. (96,填(1)题,3 分)设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$ __$\ln 2$__.

【分析】 本题是要确定极限中的参数,首先确定它是"1^{∞}"型未定式,因此可用处理"1^{∞}"型未定式的方法解决.

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$,于是 $e^{3a}=8$ 于是 $a=\ln 2$.

【评注】 对于此类问题,几乎每年的考题中都出现,考查频率极高.对于含有一个参数的极限问题,一般是先求出极限(含有参数),然后解出参数;对于含有多个参数的问题,一般是通过代数、三角的恒等变形,或通过等价代换,或通过洛必达法则,或通过泰勒—皮亚诺公式化简极限式,从而得到确定参数的方程组.

3. (97,填(1)题,3 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ __$\frac{3}{2}$__.

【分析】 本题是"$\frac{0}{0}$"型极限,可用两个特殊极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. 将原式的分子、分母同除以 x.

【详解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}+0=\dfrac{3}{2}.$

【评注】 对于这种题型,用洛必达法则是无效的,解答此类题型时一般要先进行化简,转换为简单的未定式或特殊极限的形式,再进行求解.

4.(98,填(1)题,3分)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ $\underline{\quad -\dfrac{1}{4}\quad}$.

【分析】 本题为“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,可用四则运算、等价无穷小量代换、洛必达法则或泰勒—皮亚诺公式等多种方法解答.

【详解1】 用四则运算将分子化简,再用等价无穷小因子代换,

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{4x^2}$$

因 $\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

【详解2】 采用洛必达法则,

$$原式\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$$

$\sqrt{1-x^2}\sim1(x\to0)$可求出

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}.$$

【详解3】 采用$(1+u)^\lambda$的麦克劳林展开式,此时余项用皮亚诺余项较简便.

当$u\to0$时

$$(1+u)^\lambda=1+\lambda u+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}u^2+o(u^2),$$

所以$x\to0$时

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o(x^2),$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o(x^2),$$

于是

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

【评注】 做此类问题需要注意的是，在乘除法中可用等价无穷小代换，而在加减法中不要用等价无穷小代换.

5. (00，三题，5 分) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

【分析】 本题函数表达式中含有绝对值，事实上是分段函数，需要注意的是在极值点处需通过左、右极限进行讨论.

【详解】 因为

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

故原式等于 1.

【评注】 考生做此类问题的典型错误是将原式分解成两个极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$和$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$去讨论，而这两个极限是不存在的. 要注意$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 均不存在，但$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]$ 可能存在.

6. (03，填(1) 题，3 分) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ = $\underline{\quad\frac{1}{\sqrt{e}}\quad}$.

【分析】 本题属于常见的"1^∞"型未定式. 可利用等价无穷小因子替换或转化为指数函数求极限，也可直接利用公式 $\lim f(x)^{g(x)}(1^\infty\text{ 型})=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$ 求解.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}$,

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2},$$

故原式 $=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

【评注】 本题可直接用公式求解. 对于"1^∞"型未定式，最简单的处理方法是利用极限，即：

$\lim u^v=\lim[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha v}=e^{\lim\alpha v}$，$(\alpha=u-1)$.

也就是说，对于 1^∞ 型未定式，求 $\lim u^v$ 归结为求 $\lim((u-1)v)$.

7. (06，(1) 题，4 分) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$ = ________.

【分析】 本题为极限计算题，应利用等价无穷小替换计算.

【详解】 由于当 $x\to 0$ 时，有

$$\ln(1+x)\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}2=2$$

【评注】 本题属于极限计算基本题型,利用等价无穷小替换计算极限是本题的知识点和考点.

小 结

准确理解极限的概念,熟练掌握求极限的方法是“函数、极限、连续”的核心. 求极限的方法如下:

(1) 根据极限定义证明某些极限.

(2) 一些初等方法. 比如,有理化分子(分母);因式分解;同乘(除)一个因式等等.

(3) 利用重要极限及它们的变形,利用无穷小量与有界变量乘积为无穷小量.

(4) 根据“单调有界数列必收敛”的准则,先证明数列极限存在,再求极限.

(5) 利用夹逼定理.

(6) 等价无穷小代换.

(7) 把函数展开为泰勒多项式.

(8) 洛必达法则. 这是求“未定型”极限的有力工具. 但有时未必是简单的,如能把上述一些方法综合使用,会简化计算.

(9) 利用定积分概念. 把某些数列的极限转化为求一个函数在闭区间上的定积分.

四、无穷小及其阶

1. (02,三题,6分) 设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有一阶连续导数,且$f(0)\neq0,f'(0)\neq0$,若$af(h)+bf(2h)-f(0)$在$h\to0$时是比h高阶的无穷小,试确定a,b的值.

【分析】 本题考查的是无穷小及其阶,可用洛必达法则,泰勒一皮亚诺公式或导数的定义求解.

【详解 1】 由题设,知
$$\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0,$$
于是$\lim\limits_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0.$

由于$f(0)\neq0$,故必有
$$a+b-1=0.$$
又由洛必达法则,有
$$0=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0),$$
因$f'(0)\neq0$,故$a+2b=0$,于是可解得$a=2,b=-1$.