

锦囊妙解

中学生 数理化系列

主编/江华平
罗燕红

不可不读的题 九年级数学

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



锦囊妙解

中学生数理化系列

不可不读的题

九年级数学

总策划	司马文			
丛书主编	万强华			
编委	刘芬	江华平	欧阳晔	郑永盛
	吴小平	管厚坤	胡志芳	吴小菲
	王智军	张和良	张延良	黄维
本册主编	江华平	罗燕红		
编者	杨忠凤	徐仁明	刘明和	吴欢
	胡炳华	陈远富	张文军	施伟斌
	许俊妮			



机械工业出版社

本书是“锦囊妙解中学生数理化系列”《不可不读的题 九年级数学》分册,它体现了新课标改革精神,不受任何版本限制。书中每章节按选择题、填空题、解答题等题型分开编写。题目选取大部分以近两年的中考题或模拟试题为主,经典题为辅。题型全,解析简要,解答规范。本书内容新颖,题材广泛,目的是要从本质上提高学生的知识理解能力,以及分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

不可不读的题. 九年级数学/江华平,罗燕红主编. --北京:
机械工业出版社,2006.6
(锦囊妙解中学生数理化系列)
ISBN 7-111-18907-8

I. 不... II. ①江...②罗... III. 数学课—初中—
习题 IV. G631.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006)第 056610 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:石晓芬 责任编辑:石晓芬 李学峰

责任印制:洪汉军

北京双青印刷厂印刷

2006 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷

169mm×230mm·12 印张·293 千字

定价:17.50 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话:(010)68326294

编辑热线:(010)88379037

封面无防伪标均为盗版

前言

Preface

武林竞技,想要取胜,或“一把枪舞得风雨不透”,或有独门绝技,三招之内,挑敌于马下。古有“锦囊妙计”,今有“锦囊妙解”辅导系列。继“锦囊妙解——中学生英语系列”、“锦囊妙解——中学生语文系列”之后,我们又隆重推出了“锦囊妙解——中学生数理化系列”。

这是一套充满智慧的系列丛书,能使你身怀绝技,轻松过关斩将,技增艺长。这更是一套充满谋略的系列丛书,能使你做到“风雨不透”,意外脱颖而出,圆名校梦。

这套丛书紧密结合教材内容,力求将教学需求和实际中高考要求完美结合。在体例设计,内容编排,方法运用,训练考查等方面都充分考虑各个年级学生的实际,由浅入深,循序渐进,稳步提高,并适度、前瞻性地把握中高考动态和趋向,在基础教学中渗透中高考意识。

本丛书作者均为多年在初中、高中一线教学的精英,每册都由有关专家最后审稿定稿。

这套丛书按中高考数、理、化必考的知识点分成三大系列:《不可不读的题》、《不可不知的素材》和《不可不做的实验》。从七年级到高考,并按数学、物理、化学分类,配套中学新课标教材,兼顾老教材,共有36册。

本丛书有如下特点:

1. 选材面广,知识点细,针对性强

在《不可不读的题》中,我们尽量选用当前的热点题,近几年各地的中高考题,并有自编的创新题。在《不可不知的素材》中,我们力求做到:知识面广,知识点细而全,知识网络清晰,并增加一些中高考的边缘知识和前瞻性知识。在《不可不做的实验》中,我们针对目前中学生实验水平低、实验技能差、实验知识缺乏的情况,结合教材的知识网络,详细而全面地介绍了实验。有实验目的、原理、步骤、仪器,实验现象、结论、问题探讨,并增加了实验的一般思路和方法。除介绍课本上的学生实验和教师的演示实验外,还增加了很多中高考中出现的课外实验和探究实验。

2. 指导到位

本丛书在指导学生处理好学习中的基础知识的掌握、解题能力的娴熟、实验能力的提高方面,有意想不到的功效。选择本丛书潜心修炼,定能助你考场



上游刃有余,一路顺风,高唱凯歌。

3. 目标明确

在强调学生分析问题和解决问题能力的同时,在习题、内容上严格对应中高考命题方式,充分体现最新中高考的考试大纲原则和命题趋势。

梦想与你同在,我们与你同行。我们期盼:静静的考场上,有你自信的身影。我们坚信:闪光的金榜上,有你灿烂的笑颜。

本丛书特邀江西师范大学附属中学高级老师、南昌市学科带头人万强华为主编。本分册由江华平、罗燕红主编。

我们全体策编人员殷切期待广大读者对丛书提出宝贵意见。无边的学海仍然警示着我们:只有不懈努力,才会取得胜利,走向辉煌。

编 者
2006年6月

目 录

Contents

前言

第一章 一元二次方程 1

第一节 一元二次方程 基础 1

第二节 一元二次方程根 与系数的关系 4

第三节 一元二次方程的 应用 14

第二章 二次函数 21

第一节 二次函数的图像与 性质 21

第二节 二次函数的 应用 37

第三章 相似图形 57

第一节 相似三角形 57

第二节 相似三角形的 应用 70

第四章 视图与投影 82

第五章 直角三角形 87

第一节 直角三角形的边角 关系 87

第二节 解直角三角形及其 应用 92

第六章 圆 107

第一节 圆及其有关 性质 107

第二节 直线与圆 圆 与圆 126

第三节 与圆有关的其他 问题 147

第七章 概率与统计 156

第一节 频率与概率 156

第二节 统计初步 167

第一章 一元二次方程



第一节 一元二次方程基础

一、选择题

题1 (2004 云南)用配方法解一元二次方程 $x^2+8x+7=0$, 则方程可变形为 () ☆

- A. $(x-4)^2=9$ B. $(x+4)^2=9$ ☆
C. $(x-8)^2=16$ D. $(x+8)^2=57$ ☆

解 此题考查配方法. 配方时, 先把常数项移到方程右边, 再在方程两边同时加上一半项系数一半的平方, 再把左边配成一个完全平方式, 即得答案 B.

点评 注意: 不可出现只在方程一边加上一半项系数一半的平方这种错误的情况.

题2 (2004 辽宁大连)一元二次方程 $x^2+2x+4=0$ 的根的情况是 () ☆

- A. 有一个实数根
B. 有两个相等的实数根
C. 有两个不相等的实数根
D. 没有实数根

解 $\because \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$,
 $\therefore$ 方程无实根, 故选 D.

题3 (2005 浙江)根据下列表格的对应值:

x	3.23	3.24	3.25	3.26
ax^2+bx+c	-0.06	-0.02	0.03	0.09

判断方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0, a, b, c$ 为常数) 一个解 x 的范围是 () ☆

- A. $3 < x < 3.23$ B. $3.23 < x < 3.24$ ☆
C. $3.24 < x < 3.25$ D. $3.25 < x < 3.26$ ☆

解 由题知: $y = ax^2 + bx + c$ 在 $3.23 \leq x \leq 3.26$ 上随 x 的增大 y 也增大.

又当 $x = 3.24$ 时, $y = -0.02 < 0$,
当 $x = 3.25$ 时, $y = 0.03 > 0$.

$\therefore$ 在 $3.24 < x < 3.25$ 内存在一个 x 使得 $y = 0$, 故选 C.

题4 (2005 河北)解一元二次方程 $x^2 - x - 12 = 0$, 结果正确的是 () ☆

- A. $x_1 = -4, x_2 = 3$ B. $x_1 = 4, x_2 = -3$ ☆
C. $x_1 = -4, x_2 = -3$ D. $x_1 = 4, x_2 = 3$ ☆

解 用因式分解或公式法或配方法解简单的数字系数的一元二次方程.

由题得 $(x-4)(x+3) = 0$

$\therefore x-4=0$ 或 $x+3=0$

$\therefore x=4$ 或 $x=-3$.

故选 B.

点评 注意本题中易将根的符号弄错(特别是考生在使用补充内容: 十字相乘法求解时).

题2 (2005 四川)已知关于 x 的方程 $x^2 - (2k-1)x + k^2 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 k 的最大整数值是 () ☆

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1 ☆

解 由题知: $\Delta > 0$, 即 $(2k-1)^2 - 4k^2 > 0$,
 $\therefore -4k+1 > 0, \therefore k < \frac{1}{4}$, 故选 C.

题6 (2005 黄冈·多选)下列关于一元二次方程的四种说法, 你认为正确的有 () ☆

- A. 方程 $2y^2 - y + 2 = 0$ 必有实数根
B. 方程 $-x^2 + 2x + 1 = 0$ 的两个实数根之积为 -1
C. 以 -1, 2 两数为根的一元二次方程可记为 $x^2 + x - 2 = 0$
D. 一元二次方程 $2x^2 + 4x + 3m = 0$ 的两个实数根的平方和为 7, 则 $m = -1$



解 $A: \Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -15 < 0$,

故 A 错.

$B: x_1 \cdot x_2 = -1$, 正确.

$C: x_1 + x_2 = -1 + 2 = 1 \neq -1$, 错误.

$D: \because x_1^2 + x_2^2 = 7$, 又 $\because x_1 + x_2 = -2$,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{3m}{2}$, $\therefore m = -1$. 正确.

故选 B、D

题 7 (2005 河南) 下列各数中, 适合方程 $a^4 + a^2 = 3a + 3$ 的一个近似值(精确到 0.1) 是 ()

A. 1.5 B. 1.6 C. 1.7 D. 1.8

解 由题得: $a^2(a+1) - 3(a+1) = 0$

$\therefore (a+1)(a^2-3) = 0$

$\therefore a = -1$ 或 $a = \sqrt{3}$ 或 $a = -\sqrt{3}$

$\because \sqrt{3} = 1.732 \approx 1.7$, 故选 C.

题 8 (2005 内蒙古包头) 若 $x=0$ 是一元二次方程 $x^2 + 3x + m = 0$ 的一个根, 则 m 的值是 ()

A. 0 B. -1 C. 3 D. -3

解 $\because x=0$ 是方程的根,

$\therefore 0^2 + 3 \times 0 + m = 0$,

即 $m=0$, 故选 A.

题 9 (2004 年青海湟中县) 三角形两边长分别为 3 和 6, 第三边是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的解, 则这个三角形的周长是 ()

A. 11 B. 13
C. 11 或 13 D. 11 和 13

解 $\because$ 方程的解为 $x=2$ 或 $x=4$,

但两边之和大于第三边,

故 $x=4$.

$\therefore$ 这个三角形的周长是 $3+6+4=13$, 选 B

二、填空题

题 10 (2004 无锡) 如图 1-1 所示, 某计算装置有一数据输入入口 A 和一运算结果输出口 B, 下表是小明输入的一些数据和这些数据经该装置计算后输出的相

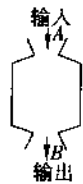


图 1-1-1

应结果:

A	1	2	3	4	5
B	2	5	10	17	26

按照这个计算装置的计算规律, 若输入的数是 10, 则输出的数是_____.

解 由上表知:

(1) $A=1$ 时 $B=2=1+1^2$

(2) $A=2$ 时 $B=5=1+2^2$

(3) $A=3$ 时 $B=10=1+3^2$

(4) $A=4$ 时 $B=17=1+4^2$

(5) $A=5$ 时 $B=26=1+5^2$

故 $A=10$ 时 $B=1+10^2=101$.

题 11 (2005 南京) 写出两个一元二次方程, 使每个方程都有一个根为 0, 并且二次项系数都为 1:_____.

解 例如: $x^2=0$, $x^2-x=0$.

答案不唯一, 只要满足题意即可.

题 12 (2005 江西) 若方程 $x^2 - m = 0$ 有整数根, 则 m 的值可以是_____ (只填一个).

解 例如: $m=0, 1, 4, 9, \dots$

只要符合题意即可.

题 13 (2004 山西太原市) 方程 $\frac{4}{x^2+x} = \frac{1}{x}$ 的解是_____.

解 两边同乘以 $x(x+1)$, 化为一次方程: $4=x+1$, $\therefore x=3$

经检验 $x=3$ 是原方程的解, $\therefore x=3$.

题 14 (2002 河北) 已知方程 $x^2 - 5x - \sqrt{x^2 - 5x} = 2$. 用换元法解此方程时, 如果设 $y = \sqrt{x^2 - 5x}$, 那么得到关于 y 的方程是_____ (用一元二次方程的形式表示).

解 $\because y = \sqrt{x^2 - 5x}$, $\therefore x^2 - 5x = y^2$

$\therefore$ 原方程变为: $y^2 - y = 2$

即 $y^2 - y - 2 = 0$.

题 15 (2002 湖北荆州) 方程 $\sqrt{x+2} + x=0$ 的解是_____.

解 移项,得 $\sqrt{x+2} = -x$.

两边平方,整理,得 $x^2 - x - 2 = 0$.

$\therefore x = 2$ 或 $x = -1$.

经检验, $x = 2$ 是增根,

$\therefore x = -1$.

题 16 (2005 哈尔滨) 函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2 - x - 2}$

中,自变量 x 的取值范围是_____.

解 由 $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \neq 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq -1, x \neq 2 \end{cases}$

题 16 (2002 浙江绍兴) 若一个三角形的三边长均满足方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$, 则此三角形的周长为_____.

解 $\because$ 方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两根为 2 和 4,

①若三边都是 2, 则周长为 6.

②若一边为 2, 另一边为 4, 则第三边必为 4, 周长为 10.

③若三边都是 4, 则周长为 12.

答案 6, 10 或 12.

题 21 (2004 北京海淀) 方程组

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+xy-2y^2=0 \end{cases} \text{可化两个方程组}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x+y=5 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

解 因为 $x^2+xy-2y^2 = (x-y)(x+2y)$,

$\therefore$ 原方程组等价于 $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+y=5 \\ x+2y=0 \end{cases}$.

题 16 (2002 福建厦门) 如果方程组

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=2x+m \end{cases} \text{只有一个实数解, 则 } m \text{ 的取值为}$$

解 方程组只有一个实数解, 就是消元后的一元二次方程有两个相等的实数根.

方程组消去 x , 得

$$\text{即} \begin{cases} y^2=2(y-m) \\ y^2-2y+2m=0 \end{cases}$$

由 $\Delta = 4 - 8m = 0$, 得 $m = \frac{1}{2}$.

题 20 (2005 广西桂林) 已知一元二次

方程 $x^2 - 4x + k = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 如果 k 是符合条件的最大整数, 且一元二次方程 $x^2 - 4x + k = 0$ 与 $x^2 + mx - 1 = 0$ 有一个相同的根, 求此时 m 的值.

解 (1) $\because$ 方程有两个不相等的实数根,

$\therefore b^2 - 4ac = 16 - 4k > 0$, $\therefore k < 4$.

(2) 当 k 取最大整数时, 即 $k = 3$, 这时方程为 $x^2 - 4x + 3 = 0$, $\therefore x_1 = 1, x_2 = 3$.

当相同根为 $x = 1$ 时, 有 $1 + m - 1 = 0$, $m = 0$.

当相同根为 $x = 3$ 时, 有 $9 + 3m - 1 = 0$, $m = -\frac{8}{3}$.

$\therefore m$ 的值是 0 或 $-\frac{8}{3}$.

题 21 (2005 广州) 解方程组: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases}$

$$\text{解法 1} \quad \begin{cases} x+y=3 & \text{①} \\ xy=-10 & \text{②} \end{cases}$$

由①得 $y = 3 - x$ ③

把③代入②, 得 $x(3-x) = -10$,

即 $x^2 - 3x - 10 = 0$,

解这个方程, 得 $x_1 = 5, x_2 = -2$.

将 $x_1 = 5, x_2 = -2$ 代入③, 得 $y_1 = -2, y_2 = 5$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=5 \\ y_1=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=5 \end{cases}$.

解法 2 将 x, y 看成是方程 $a^2 - 3a - 10 = 0$ 的两个根.

解 $a^2 - 3a - 10 = 0$, 得 $a_1 = 5, a_2 = -2$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=5 \\ y_1=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=5 \end{cases}$.

题 16 (2004 深圳南山) 解方程: $\frac{2}{x} +$

$$\frac{x}{x+3} = 1.$$



解 方程两边同乘以 $x(x+3)$, 得 $2(x+3)+x^2=x(x+3)$ $2x+6+x^2=x^2+3x$,

所以 $x=6$.

检验: 把 $x=6$ 代入 $x(x+3)=54 \neq 0$

所以原方程的解为 $x=6$.

题 23 (2005 北京) 用配方法解方程 $x^2-4x+1=0$.

解 移项, 得: $x^2-4x=-1$,

配方, 得: $x^2-4x+(-2)^2=-1+(-2)^2$,
($x-2$)²=3,

解这个方程, 得: $x-2=\pm\sqrt{3}$,

即 $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=2-\sqrt{3}$.

点评 考查配方法解方程, 移项时注意负号的变化.

题 23 (2005 山西) 解方程: $3x^2-6x+1=0$.

解 $3x^2-6x+1=0$, 这里 $a=3$, $b=-6$, $c=1$.

$\because \Delta=b^2-4ac=36-12=24>0$,

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2 \times 3} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

即 $x_1 = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$ (或 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$).

题 25 (2002 江苏盐城)

解方程 $\sqrt{\frac{2x-1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{2x-1}} = \frac{5}{2}$.

解 设 $\sqrt{\frac{2x-1}{x}} = t$, 原方程化为

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2},$$

即 $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

解得 $t=2$ 或 $t=\frac{1}{2}$.

当 $t=2$ 时, 由 $\sqrt{\frac{2x-1}{x}}=2$, 得 $2x-1=4x$,
 $x=-\frac{1}{2}$;

当 $t=\frac{1}{2}$ 时, 由 $\sqrt{\frac{2x-1}{x}}=\frac{1}{2}$,

得 $8x-4=1$, $\therefore$ 经检验, $x=-\frac{1}{2}$ 和 $x=-\frac{4}{7}$ 都是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{4}{7}$.

题 23 (2004 宁波) 解方程 $(\frac{x}{x+1})^2 - 2(\frac{x}{x+1}) - 8 = 0$.

解 利用换元法.

令 $y = \frac{x}{x+1}$, 得 $y^2 - 2y - 8 = 0$,

$\therefore (y-4)(y+2) = 0$, $\therefore y_1 = 4$, $y_2 = -2$.

当 $y_1 = 4$ 时, $\frac{x}{x+1} = 4$, 解得 $x_1 = -\frac{4}{3}$;

当 $y_2 = -2$ 时, $\frac{x}{x+1} = -2$,

解得 $x_2 = -\frac{2}{3}$. 经检验 $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$ 都是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的根是 $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.



第二节 一元二次方程根与系数的关系

一、选择题

题 23 (2003 黄石) 关于 x 的方程 $k^2x^2 + (2k-1)x + 1 = 0$ 有实数根, 则下列结论正确的

是

()

A. 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 方程两根互为相反数

B. 当 $k = 0$ 时, 方程的根是 $x = -1$

C. 当 $k=\pm 1$ 时, 方程两根互为倒数

D. 当 $k \leq \frac{1}{4}$ 时, 方程有实数根

解 排除法. $\because$ 方程有实数根.

①当 $k^2=0$, 即 $k=0$ 时, 方程为 $-x+1=0$.

则 $x=1$. 故 $k=0$ 时, 方程只有一个实根.

②当 $k \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程.

$\therefore$ 方程有两个实根.

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (2k-1)^2 - 4k^2 \geq 0 \\ k^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4} \text{ 且 } k \neq 0.$$

由①、②讨论得, 当 $k \leq \frac{1}{4}$ 时, 方程有实根.

选项 A 中 $k=\frac{1}{2}$ 不在 $k \leq \frac{1}{4}$ 内, 故排除 A.

选项 B 中 $k=0$ 时, 方程的根应为 $x=1$, 故排除 B.

选项 C 中 $k=1$ 不在 $k \leq \frac{1}{4}$ 内, 故排除 C. 因此答案选 D.

题 28 (2003 杭州) 设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的两根, x_1+1, x_2+1 是关于 x 的方程 $x^2+qx+p=0$ 的两根, 则 p, q 的值分别等于 ()

- A. 1, -3 B. 1, 3
C. -1, -3 D. -1, 3

解 直接选择法. $\because x_1, x_2$ 是第一个方程的两根, $\therefore x_1+x_2=-p, x_1 \cdot x_2=q$.

又 $\because x_1+1, x_2+1$ 是第二个方程的两根,

$$\therefore x_1+x_2+2=-q,$$

$$(x_1+1)(x_2+1)=x_1 \cdot x_2 + (x_1+x_2) + 1 = p.$$

$$\therefore -p+2=-q, \text{ 且 } q-p+1=p, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} p-q=2 \\ 2p-q=1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} p=-1 \\ q=-3 \end{cases}$$

将 p, q 的值分别代入各方程的判别式计算, 均符合要求, 故 $p=-1, q=-3$. 选 C.

题 31 (2002 湖北荆州) 已知一直角三角形的三边为 $a, b, c, \angle B=90^\circ$, 那么关于 x 的

方程 $a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0$ 的根的情况为 ()

- A. 有两个相等的实数根
B. 有两个不相等的实数根
C. 没有实数根
D. 无法确定

解 $\because \triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$

$$\therefore b^2=a^2+c^2.$$

$$\text{方程 } a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0,$$

$$\text{整理得 } (a+b)x^2-2cx+b-a=0.$$

$$\Delta = 4c^2 - 4(a+b)(b-a)$$

$$= 4c^2 - 4b^2 + 4a^2 = 0.$$

$\therefore$ 方程有两个相等的实数根. 故选 A.

题 30 (2002 浙江绍兴) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(R+r)x+\frac{1}{4}d^2=0$ 没有实数根, 其中 R, r 分别为 $\odot O_1, \odot O_2$ 的半径, d 为此两圆的圆心距, 则 $\odot O_1, \odot O_2$ 的位置关系是 ()

- A. 外离 B. 相切 C. 相交 D. 内含

解 $\because \Delta < 0$,

$$\therefore (R+r)^2 - 4 \times \frac{1}{4}d^2 < 0.$$

$$\because R+r > 0 \text{ 且 } d > 0, \therefore R+r < d.$$

$\therefore$ 两圆外离. 故选 A.

题 31 (2004 宁夏) 关于 x 的一元二次方程 $(2a-1)x^2+(a+1)x+1=0$ 的两个根相等, 那么 a 等于 ()

- A. 1 或 5 B. -1 或 5
C. 1 或 -5 D. -1 或 -5

解 $\because$ 方程为一元二次方程, $\therefore 2a-1 \neq 0$.

$$\because \text{方程有两等根}, \therefore \Delta = (a+1)^2 - 4(2a-1) = 0.$$

$$\therefore \begin{cases} 2a-1 \neq 0 \\ (a+1)^2 - 4(2a-1) = 0 \end{cases}$$

解得 $a=1$ 或 5. 故选 A.

点评 注意解此题时不仅要考虑 $\Delta=0$, 而且还要考虑二次系数 $2a-1 \neq 0$ 这一前提

条件.

题 32 (2004 西宁) 以 $5-2\sqrt{6}$ 和 $5+2\sqrt{6}$ 为根的一元二次方程是 ()

A. $x^2-10x+1=0$ B. $x^2+10x-1=0$

C. $x^2+10x+1=0$ D. $x^2-10x-1=0$

解 $\because 5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}=10, (5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=-1,$

$\therefore$ 所求方程为 $x^2-10x+1=0$. 故选 A.

点评 已知方程两根, 构造一元二次方程时, 一定要注意一次项系数的符号. 记住公式 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

题 32 (2004 河北) 若 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $2x^2-3x+1=0$ 的两个根, 则 $x_1^2+x_2^2$ 的值是 ()

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{11}{4}$ D. 7

解 $\because x_1, x_2$ 为方程的两实根,

$\therefore x_1+x_2=\frac{3}{2}, x_1x_2=\frac{1}{2}.$

则 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(\frac{3}{2})^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$. 故选 A.

点评 注意求已知方程根的“对称式”值时, 要把所求式子变成两根和、两根积的形式, 否则无法得出结果.

题 34 (2004 河南) 如果关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 的两个根的差为 1, 那么 m 等于 ()

A. ± 2 B. $\pm\sqrt{3}$ C. $\pm\sqrt{5}$ D. $\pm\sqrt{6}$

解 设方程两根分别为 $x_1, x_2 (x_1 > x_2)$, 则 $x_1-x_2=1$.

$\therefore (x_1-x_2)^2=1, (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1.$

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-m, x_1x_2=1$.

$\therefore (-m)^2-4\times 1=1, m^2=5.$

$\therefore m=\pm\sqrt{5}$. 故选 C.

点评 注意①利用根与系数的关系求未知系数的值时, 必须想办法把已知等式化成“两根和、两根积”的形式, 才能转化为求未知

系数的方程. ②求出 m 的值后, 还要检验判别式的值是否大于 0.

题 35 (2005 浙江宁波) 一元二次方程 $x^2+2x-5=0$ 的两个根的倒数和等于 ()

A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$

解 设原方程的两根为 x_1, x_2 .

由韦达定理有: $x_1+x_2=-2, x_1 \cdot x_2=-5$

$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$. 故选 A.

题 35 (2004 黑龙江) 若 $|x+y-5|+(xy-6)^2=0$, 则 x^2+y^2 的值为 ()

A. 13 B. 26 C. 28 D. 37

解 由绝对值和平方的非负性得

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=25-12=13.$

$\therefore$ 答案选 A.

题 37 (2002 江苏淮安) 一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 3 和 -4, 那么二次三项式 x^2+px+q 可分解为 ()

A. $(x-3)(x+4)$ B. $(x+3)(x-4)$

C. $(x-3)(x-4)$ D. $(x+3)(x+4)$

解 $\because$ 方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 3 和 -4. $\therefore p=3+(-4)=-1, q=3\times(-4)=-12.$

$\therefore x^2+px+q$

$=x^2-x-12$

$=(x+3)(x-4)$. 故选 B.

二、填空题

题 38 (2004 宁夏) 已知一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两个根 x_1, x_2 , 那么 $(1+x_1)(1+x_2)$ 的值等于_____.

解 由根与系数的关系: $x_1+x_2=-3, x_1x_2=1$.

$\therefore (1+x_1)(1+x_2)$

$=1+x_1+x_2+x_1x_2=1-3+1=-1.$

题 39 (2002 湖北黄冈) 如果 a, b 是方程 $x^2+x-1=0$ 的两个根, 那么代数式 a^3+

$a^2b+ab^2+b^3$ 的值是_____.

解 由韦达定理,可知 $a+b=-1$ 且 $ab=-1$.

$$\begin{aligned} & \text{而 } a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ &= a^2(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)[(a+b)^2-2ab]=-3. \end{aligned}$$

题 40 (2003 四川) 已知关于 x 的一元二次方程 $8x^2+(m+1)x+m-7=0$ 有两个负实数根,那么实数 m 的取值范围是_____.

解 根据题意,得

$$\begin{cases} (m+1)^2-32(m-7) \geq 0 \\ -\frac{m+1}{8} < 0 \\ \frac{m-7}{8} > 0 \end{cases}$$

解得 $m > 7$.

题 41 (2004 吉林) 已知 m 是方程 $x^2-x-2=0$ 的一个根,则代数式 m^2-m 的值等于_____.

解 由已知,得 $m^2-m-2=0$,
 $\therefore m^2-m=2$.

题 45 (2004 大连) 关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根为 $x_1=1, x_2=2$,则 x^2+bx+c 分解因式的结果为_____.

解 由根的意义可得: x^2+bx+c 分解因式的结果为 $(x-1)(x-2)$

题 43 (2004 温州) 方程 $(x-1)(x+2)(x-3)=0$ 的根是_____.

解 由题知: $x-1=0$ 或 $x+2=0$ 或 $x-3=0$

$$\therefore x_1=1, x_2=-2, x_3=3.$$

题 45 (2004 上海) 用换元法解方程: $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=4$,可设 $y=x+\frac{1}{x}$,则原方程化为关于 y 的整式方程是_____.

$$\text{解 } \because y=x+\frac{1}{x}$$

$$\therefore y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2, \text{即 } x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$\therefore$ 换元后原方程变为 $(y^2-2)+y=4$ 即

$$y^2+y-6=0.$$

题 45 (2004 天津) 已知 $x^2+y^2=25, x+y=7$, 且 $x>y$, 则 $x-y$ 的值等于_____.

$$\begin{aligned} \text{解 } \because (x-y)^2 &= x^2-2xy+y^2 \\ &= 2(x^2+y^2)-(x^2+2xy+y^2) \\ &= 2(x^2+y^2)-(x+y)^2 \\ \therefore (x-y)^2 &= 50-49=1 \end{aligned}$$

$$\text{又 } \because x>y, \therefore x-y=1.$$

题 45 (2003 青岛) 九年义务教育三年制初级中学教科书《代数》第三册第 52 页的例 2 是这样的:“解方程: $x^4-6x^2+5=0$ ”,这是一个一元四次方程,根据该方程的特点,它的解法通常是:设 $x^2=y$,那么 $x^4=y^2$,于是原方程可变为“ $y^2-6y+5=0$ ”①,解这个方程得 $y_1=1, y_2=5$. 当 $y=1$ 时, $x^2=1, \therefore x=\pm 1$; 当 $y=5$ 时, $x^2=5, \therefore x=\pm\sqrt{5}$. 所以原方程的四个根为 $x_1=-1, x_2=1, x_3=\sqrt{5}, x_4=-\sqrt{5}$.

(1) 在由原方程得到方程①的过程中,利用_____法达到降次的目的,体现了转化的数学思想.

(2) 解方程 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$ 时,若设 $y=x^2-x$,则原方程可化为_____.

解 (1) 换元法

(2) 原方程变为 $y^2-4y-12=0$

题 47 (2003 河南) 一元二次方程 $x^2-ax-3a=0$ 的两根之和为 $2a-1$,则两根之积为_____.

解 考查一元二次方程根与系数定理的运用.

设方程的两根为 x_1, x_2 ,则由根与系数关系得 $x_1+x_2=a, x_1 \cdot x_2=-3a$,

而依题意得 $x_1+x_2=2a-1=a$,

$$\therefore a=1, \text{由 } a=1 \text{ 时, } \Delta=a^2+12a=13>0,$$

即 a 的值为 1. $\therefore x_1 \cdot x_2=-3$. 答案为 -3.

点评 注意本题应由根与系数的关系求得 a 的值. 确定 a 值后,再由根与系数的关系求得两根的积.

题 48 (2004 沈阳) 请你写出一个二次

项系数为 1, 两实数根之和为 3 的一元二次方程_____.

解 考查根的判别式和根与系数的关系的综合应用. (答案不唯一)

所求方程为 $x^2 - 3x + c = 0$, 只要确定 c 的范围即可.

$$\text{由 } \Delta \geq 0, \text{ 得 } (-3)^2 - 4c \geq 0, c \leq \frac{9}{4}.$$

c 的值只需满足 $c \leq \frac{9}{4}$ 即可, 所以答案不唯一, 可取此范围内的任意值. 如 $c = 0$.

题 49 (2004 天津) 已知关于 x 的方程

$x^2 - 3x + m = 0$ 的一个根是另一个根的 2 倍, 则 m 的值为_____.

解 设方程一根为 x_1 , 则另一根为 $2x_1$.

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + 2x_1 = 3 \\ x_1 \cdot 2x_1 = m \end{cases}, \text{ 解得 } m = 2.$$

点评 注意求出 m 的值后, 一定要检验 Δ 的值是否大于或等于 0.

题 52 (2004 兰州) CD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜

边上的高线, AD 和 BD 是方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 的两根, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

解 $\because AD, BD$ 为方程的两根,

$$\therefore AD + BD = AB = 6, AD \cdot BD = 4.$$

由三角形相似可证 $CD^2 = AD \cdot BD = 4$,

$$\text{开方得 } CD = 2 (CD > 0).$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6.$$

点评 此题不需解方程.

题 52 (2004 宁波) 等腰三角形 ABC 中,

$BC = 8$, AB 和 AC 的长是关于 x 的方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 的两根, 则 m 的值是_____.

解 分类讨论.

(1) 当 $AB = AC$ 时, 方程有两等根, $\Delta = (-10)^2 - 4m = 0$, 解得 $m = 25$;

(2) 当 $AB = BC = 8$ 或 $AC = BC = 8$ 时, $x = 8$ 为方程的一根,

$$\therefore 8^2 - 80 + m = 0, m = 16.$$

故答案是: $m = 25$ 或 16 .

三、解答题

题 52 (2005 浙江宁波) 已知关于 x 的

$$\text{方程 } x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0.$$

(1) 当 m 取何值时, 方程有两个实数根;

(2) 为 m 选取一个合适的整数, 使方程有两个不相等的实数根, 并求这两个根.

$$\text{解 } (1) \Delta = [-2(m+1)]^2 - 4m^2 = 8m + 4.$$

$$\text{由题意知: } 8m + 4 \geq 0 \text{ 解得 } m \geq -\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 当 $m \geq -\frac{1}{2}$ 时, 方程有两个实数根.

(2) 选取 $m = 0$.

$$\text{方程为 } x^2 - 2x = 0 \text{ 解得 } x_1 = 0, x_2 = 2.$$

题 48 (2003 福建福州) 已知关于 x 的

$$\text{方程 } x^2 - (k+1)x + \frac{1}{4}k^2 + 1 = 0.$$

(1) k 取什么值时, 方程有两个实数根;

(2) 如果方程的两个实数根 x_1, x_2 满足 $|x_1| = |x_2|$, 求 k 的值.

$$\text{解 } (1) \Delta = [-(k+1)]^2 - 4\left(\frac{1}{4}k^2 + 1\right) = 2k - 3.$$

$$\because \Delta \geq 0, \therefore 2k - 3 \geq 0, \therefore k \geq \frac{3}{2}.$$

$\therefore$ 当 $k \geq \frac{3}{2}$ 时, 方程有两个实数根.

(2) 由 $|x_1| = |x_2|$,

① 当 $x_1 \geq 0$ 时, 得 $x_1 = x_2$.

$\therefore$ 方程有两个相等实数根.

$$\therefore \Delta = 0, \text{ 即 } 2k - 3 = 0, k = \frac{3}{2}.$$

又当 $k = \frac{3}{2}$ 时, 有 $x_1 = x_2 = \frac{5}{4} > 0$,

$\therefore k = \frac{3}{2}$ 符合条件.

② 当 $x_1 < 0$ 时, 得 $x_2 = -x_1$.

$$\therefore x_1 + x_2 = 0.$$

由根与系数关系, 得 $k + 1 = 0$.

$$\therefore k = -1.$$

由(1)知,与 $k \geq \frac{3}{2}$ 矛盾,

$\therefore k = -1$ (舍去).

综上可得, $k = \frac{3}{2}$.

题 54 (2003 黑龙江)关于 x 的方程 $kx^2 - (k+1)x + \frac{k}{4} = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求 k 的取值范围;

(2)是否存在实数 k ,使方程的两个实数根的倒数和等于 0? 若存在,求出 k 的值;若不存在,说明理由.

解 (1)由题意,知 $k \neq 0$,且 $\Delta = (k+1)^2 - 4k \cdot \frac{k}{4} > 0$,

$\therefore k > -\frac{1}{2}$ 且 $k \neq 0$.

(2)不存在.

设方程的两个根是 x_1, x_2 ,

假设 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 0$.

$\therefore x_1 x_2 = \frac{1}{4} \neq 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = 0$.

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{k+1}{k}$,

$\therefore k+1=0, k=-1 < -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 满足条件的实数 k 不存在.

题 54 (2002 浙江杭州)已知某二次项系数为 1 的一元二次方程的两个实数根为 p, q ,且满足关系式 $\begin{cases} p+q(p+1)=5 \\ p^2q+pq^2=6 \end{cases}$,试求这个一元二次方程.

解 设 $p+q=s, pq=t$. 依题意,得 $s+t=5$,且 $st=6$.

$\therefore \begin{cases} s=2 \\ t=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} s=3 \\ t=2 \end{cases}$.

当 $\begin{cases} s=2 \\ t=3 \end{cases}$ 时,方程为 $x^2 - 2x + 3 = 0$,无实数

根,舍去.

当 $\begin{cases} s=3 \\ t=2 \end{cases}$ 时,方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$,有实数根,符合题意.

$\therefore$ 所求方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$.

点评 由根与系数的关系可知:若已知方程两根为 p, q ,则以 p, q 为根的一元二次方程为 $x^2 - (p+q)x + pq = 0$. 因此,题目实质就是求 $(p+q), pq$ 的值,从题设中可得到关于 $(p+q), pq$ 的方程组,解此方程组,求出 $(p+q), pq$ 的值后,方程即可写出,但应检验 Δ ,保证方程有实数根.

题 54 (2004 北京海淀)已知:关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2ax + c = 0$ 的两个实数根之差的平方为 m .

(1)试分别判断当 $a=1, c=-3$ 与 $a=2, c=\sqrt{2}$ 时, $m \geq 4$ 是否成立,并说明理由;

(2)若对于任意一个非零的实数 $a, m \geq 4$ 总成立,求实数 c 及 m 的值.

解 (1)当 $a=1, c=-3$ 时, $m \geq 4$ 成立;当 $a=2, c=\sqrt{2}$ 时, $m \geq 4$ 不成立.

当 $a=1, c=-3$ 时,

原方程为 $x^2 + 2x - 3 = 0$,

则 $x_1 = 1, x_2 = -3$.

$\therefore m = [1 - (-3)]^2 = 16 > 4$,

即 $m \geq 4$ 成立.

当 $a=2, c=\sqrt{2}$ 时,

原方程为 $2x^2 + 4x + \sqrt{2} = 0$.

由 $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times \sqrt{2} > 0$,

可设方程的两根分别为 x_1, x_2 ,

则 $x_1 + x_2 = -2, x_1 \cdot x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore m = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 =$

$4 - 2\sqrt{2} < 4$,

即 $m \geq 4$ 不成立.

(2)依题意,设原方程的两个实数根是 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -2, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

可得 $m = (x_1 - x_2)^2 = 4 - \frac{4c}{a}$.

∵ 要对于任意一个非零的实数 a 都有 $4 - \frac{4c}{a} \geq 4$, $\therefore c = 0$.

当 $c = 0$ 时, $\Delta = 4a^2 > 0$.

$\therefore c = 0, m = 4$.

题 57 (2004 河南) 已知 $a > 2, b > 2$, 试判断关于 x 的方程 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 与 $x^2 - abx + (a+b) = 0$ 有没有公共根, 请说明理由.

解 不妨设关于 x 的方程 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 与 $x^2 - abx + (a+b) = 0$ 有公共根, 设为 x_0 , 则有

$$\begin{cases} x_0^2 - (a+b)x_0 + ab = 0 & \text{①} \\ x_0^2 - abx_0 + (a+b) = 0 & \text{②} \end{cases}$$

整理, 可得 $(x_0 + 1)(a + b - ab) = 0$.

∵ $a > 2, b > 2$, $\therefore a + b \neq ab$, $\therefore x_0 = -1$.

把 $x_0 = -1$ 代入①, 得 $1 + a + b + ab = 0$, 这是不可能的. 所以, 关于 x 的两个方程没有公共根.

题 57 (2003 北京) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + 3m = 0$ ① 的两个实数根 x_1, x_2 , 且 $(x_1 - x_2)^2 = 16$, 如果关于 x 的另一个方程 $x^2 - 2mx + 6m - 9 = 0$ ② 的两个实数根都在 x_1, x_2 之间, 求 m 的值.

解 ∵ x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2mx + 3m = 0$ ① 的两实根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = 3m.$$

$$\text{又} \because (x_1 - x_2)^2 = 16,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 16.$$

$$\therefore 4m^2 - 12m = 16, \text{解得 } m_1 = -1, m_2 = 4.$$

(1) 当 $m = -1$ 时, 方程①为 $x^2 + 2x - 3 = 0$, 解得 $x_1 = -3, x_2 = 1$.

方程②为 $x^2 + 2x - 15 = 0$, 解得 $x_1' = -5, x_2' = 3$.

而 $-5, 3$ 两数均不在 -3 与 1 之间,

$\therefore m = -1$ 不合题意, 舍去.

(2) 当 $m = 4$ 时, 方程①为 $x^2 - 8x + 12 =$

0 , 解得 $x_1 = 2, x_2 = 6$.

方程②为 $x^2 - 8x + 15 = 0$, 解得 $x_1' = 3, x_2' = 5$.

由 $2 < 3 < 5 < 6$, 即 $x_1 < x_1' < x_2' < x_2$,

$\therefore$ 方程②的两根都在方程①的两根之间.

$\therefore m = 4$. 综合(1)(2)讨论得 m 的值是 4.

点评 注意本题所求的值一定要保证方程②的两根, 应在方程①的两根之间. 因此应注意检验, 把不符合要求的 m 的值舍去.

题 57 (2004 山西太原)

$$\text{解方程组} \begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 12 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$

解法 1 由 $4x^2 - 9y^2 = 12$, 得 $(2x - 3y)(2x + 3y) = 12$.

把 $2x - 3y = 3$ 代入上式, 得 $2x + 3y = 4$.

$$\text{解} \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \text{得原方程组的解为} \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

解法 2 由 $2x - 3y = 3$, 得 $x = \frac{3}{2}(1 + y)$.

把上式代入 $4x^2 - 9y^2 = 12$, 得 $y = \frac{1}{6}$.

把 $y = \frac{1}{6}$ 代入 $2x - 3y = 3$, 得 $x = \frac{7}{4}$.

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

解法 3 由 $2x - 3y = 3$, 得 $2x = 3 + 3y$.

把上式代入 $4x^2 - 9y^2 = 12$, 得 $y = \frac{1}{6}$.

把 $y = \frac{1}{6}$ 代入 $2x - 3y = 3$, 得 $x = \frac{7}{4}$.

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

题 60 (2002 湖北十堰)

$$\text{已知方程组} \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 2 \end{cases}$$

(1) 当 m 取何值时, 方程组有两个不相同

的实数解;

(2) 若 x_1, y_1, x_2, y_2 是方程组的两组不同的实数解, 且 $|x_1 - x_2| = \sqrt{3}|y_1 y_2|$, 求 m 的值.

解 (1) 两个方程消去 y , 整理, 得 $2x^2 - 4x + 4 - m = 0$.

由 $\Delta = 16 - 4 \times 2 \times (4 - m) > 0$, 得 $m > 2$,

即当 $m > 2$ 时, 方程组有两个不相同的实数根.

(2) 由 (1) 得 $x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = \frac{4-m}{2}$.

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= (2 - x_1)(2 - x_2) \\ &= 4 - 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 \\ &= \frac{4-m}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ &= 4 - 4 \times \frac{4-m}{2} \\ &= 2m - 4. \end{aligned}$$

$$\therefore |x_1 - x_2| = \sqrt{3}|y_1 y_2|,$$

$$\therefore 2m - 4 = 3 \times \left(\frac{4-m}{2}\right)^2.$$

$$\text{解得 } m = 8 \text{ 或 } m = \frac{8}{3}.$$

题 61 (2004 南通) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + 1 - m = 0$. 请自取一个你喜爱的 m 值, 使方程有两个不相等的实数根, 并说明它的正确性.

解 这是一道开放创新题, 考查根的判别式与根和系数的关系的综合应用. 答案不唯一.

取 $m = 5$, 则原方程变为: $x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(-4) = 25 > 0$ 知方程有两个不相等实根. $\therefore (x-1)(x+4) = 0$

$$\therefore x_1 = 1 \quad x_2 = -4$$

方程有两个不等的实根.

题 61 (2004 苏州) 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + x - a = 0 (a \neq 0)$.

(1) 求证: 对于任意非零实数 a , 该方程恒有两个异号的实数根;

(2) 设 x_1 和 x_2 是该方程的两个根, 若

$|x_1| + |x_2| = 4$, 求 a 的值.

(1) 证明 $\because \Delta = 1 + 4a^2, \therefore \Delta > 0$.

$\therefore$ 方程有两个实数根. 设方程的两根为 x_1

和 $x_2, \because a \neq 0, \therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{-a}{a} = -1 < 0$.

$\therefore$ 方程恒有两个异号的实数根.

(2) 由 (1) 得 $x_1 \cdot x_2 < 0$,

$$\therefore |x_1| + |x_2| = |x_1 - x_2| = 4.$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 16.$$

$$\text{又 } \because x_1 + x_2 = -\frac{1}{a}, \therefore \frac{1}{a^2} + 4 = 16.$$

$$\therefore a = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

点评 注意: 第 (2) 问求出 a 值后, 不需代入判别式检验, 原因是 (2) 问的计算建立在 (1) 的前提下.

题 63 (2004 北京) 已知关于 x 的两个方程 $2x^2 + (m+4)x + m - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 与 $mx^2 + (n-2)x + m - 3 = 0 \cdots \textcircled{2}$, 方程 $\textcircled{1}$ 有两个不相等的负实数根, 方程 $\textcircled{2}$ 有两个实数根.

(1) 求证: 方程 $\textcircled{2}$ 的两根符号相同;

(2) 设方程 $\textcircled{2}$ 的两根分别为 α 和 β , 若 $\alpha : \beta = 1 : 2$, 且 n 为整数, 求 m 的最小整数值.

(1) 证明 $\because$ 方程 $2x^2 + (m+4)x + m - 4 = 0$ 有两个不相等的负实数根, 设这两个负实数根分别为 x_1, x_2 ,

$$\therefore \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} (m+4)^2 - 4 \times 2(m-4) > 0 \\ -\frac{m+4}{2} < 0 \\ \frac{m-4}{2} > 0 \end{cases}$$

解不等式组, 得 $m > 4$.

$\because$ 方程 $\textcircled{2}$ 有两个实数根, 可知 $m \neq 0$.

$\therefore$ 当 $m > 4$ 时, $\frac{m-3}{m} > 0$, 即方程 $\textcircled{2}$ 的两根

之积为正.

$\therefore$ 方程 $\textcircled{2}$ 的两根符号相同.