泛函分析初步

F A N H A N F E N X I C H U B U

石 智 王军秋 编著

陕西科学技术出版社

泛函分析初步

石　智　王军秋　编著

陕西科学技术出版社

内容提要

本书是为工科研究生或高年级本科生学习泛函分析基础知识而编写的，是作者多年来教学实践的总结，内容包括集合与映射、距离空间、巴拿赫不动点、赋范线性空间、赋范空间中的逼近问题、算子方程等，在附录一中详细介绍了勒贝格测度与勒贝格积分。

本书的讲述通俗易懂，既重视理论知识，又给出更多的应用实例；既可作为高等学校工科研究生或本科生的教材，也可作为科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析初步/石智，王军秋编著．—西安：陕西科学技术出版社，2005.7

ISBN 7-5369-3988-4

Ⅰ.泛... Ⅱ.①石...②王... Ⅲ.泛函分析—研究生—教材Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 073548 号

出 版 者　陕西科学技术出版社
西安北大街 131 号　　邮编 710003
电话(029)87211894　传真(029)87218236
http://www.snstp.com
发 行 者　陕西科学技术出版社
电话(029)87212206　87260001
印　　刷　西安美术学院印刷厂
规　　格　850mm×1168mm　32 开本
印　　张　8.375
字　　数　200 千字
数　　量　1～1000
版　　次　2005 年 7 月第 1 版
2005 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　15.00 元

编者的话

泛函分析是古典分析观点的推广，它综合函数论、几何和代数的观点研究无穷维向量空间上的函数、算子和极限理论．它在 20 世纪 40 年代就已经成为一门理论完备、内容丰富的数学学科了．

泛函分析揭示了分析、代数中的许多概念和方法存在相似的地方，这些地方乍看起来是互不相干的．比如，代数方程求根和微分方程求解都可以用逐次逼近法，并且解的存在性和唯一性条件也极其相似．这种相似在积分方程论中表现更为突出．泛函分析的产生正是和这种情况有关，它启发人们从类似的东西中探寻一般的真正属于本质的东西．

半个多世纪来，泛函分析一方面以其他众多学科所提供的素材来提取自己研究的对象和某些研究手段，并形成了自己的许多重要分支，例如算子谱论、巴拿赫代数、拓扑线性空间理论、广义函数论等；另一方面，他也强有力地推动着其他分析学科的发展．它在微分方程、概率论、函数论、量子物理、控制论、计算数学、最优化理论等学科中都有重要的应用，它的观点和方法已经渗入到不少工程技术性的学科之中，已成为近代分析的基础之一．

泛函分析的特点是它不但把古典分析的基本概念和方法一般化了，而且还把这些概念和方法几何化了．比如，不同类型的函数可以看作“函数空间”的点或向量，这样最后得到了“抽象空间”这个一般的概念．古典分析中的基本方法，也就是用

线性的对象去逼近非线性的对象，完全可以运用到泛函分析这门学科中.

作者多年来在西安建筑科技大学为博士研究生、应用数学和计算数学硕士研究生、信息与计算科学本科生开设泛函分析课程，本书是在教案的基础上编写的，是教学经验的总结，内容包括集合与映射、距离空间、巴拿赫不动点、赋范线性空间、赋范空间中的逼近问题、算子方程等. 考虑到工科许多研究生在本科阶段没有学过实变函数的实际，在附录一中详细介绍了勒贝格测度与勒贝格积分，这些学生可以先学习第一章，再学习附录一的内容，为进一步学习泛函分析作准备，然后从第二章学起. 在编写过程中，我们删去了一些定理的证明，这些证明通常是比较复杂的，重点放在基本概念和方法的理解上以及重要定理的应用上，这是从工科学生的实际出发，也是本书的特色之一.

本书在完成过程中，西安建筑科技大学理学院数学系不少同志提出了有益的建议和意见，研究生院和教务处对本书的出版给予大力支持，在此，编者谨表示衷心地感谢.

尽管我们对本书的编写高度重视，态度认真，但疏漏之处在所难免，诚挚地欢迎各位读者批评指正.

编　者

2005.2.

目　录

第一章

集合与映射

1 集合及其运算

这一节我们不是系统地介绍集合的理论，而只是简要介绍在这本书中所用到的集合概念以及一些术语. 对于集合的一些初步知识，在数学分析等其他数学学科也有简要的介绍，想必读者已经熟悉它了，但为了本书的自包含性，我们还是作一些简要介绍.

集合是一个不加定义而直接引用的数学概念. 其实数学中有许多概念例如点、线、面都不是用别的更原始的概念加以精确定义的. 一般地说，把在一定场合所要考察和研究的某些对象的全体称为一个集合，或简称为集，而称对象为元素.

通常用大写字母 A, B, C, X, Y, Z 等来表示集合，用小写字母 a, b, c, x, y, z 等来表示集合中的元素.

设 A 是一个集合，$x \in A$ 表示 x 是 A 中的元素，$x \notin A$ 表示 x 不是 A 中的元素. 一个集合可以用列出它的所有元素来表示，也可以用集合中元素的特征来表示为：

$$A = \{a | a\text{具有某种性质}\}.$$

在本书中，$\emptyset$ 表示空集，$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集，$\mathbb{K}$ 表示实数集或复数集.

如果集合 A 的每个元素也是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$, 规定空集是任何集合的子集. 如果 $A \subset B, B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$.

集合 A 与集合 B 的并 $A\cup B$ 和交 $A\cap B$ 分别定义为：

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 和 } x\in B\}.$$

集合 A 与集合 B 的差集定义为：

$$A-B=\{x|x\in A, x\notin B\}.$$

如果 $B\subset A$, 则称差集 $A-B$ 为 B 关于 A 的余 (或补) 集. 今后所讨论的集合往往都是某个基本集 X 的子集，这时 $X-A$ 称为 A 的余 (或补) 集，记作 A^c.

如果 $A\cap B=\emptyset$, 则称 A 与 B 不相交. 如果 $A\cap B\neq\emptyset$, 则称 A 与 B 相交.

设 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是一个集族，其中 α 为集合的指标，它在指标集 I 中变化，这族集合的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x|\text{存在 } \alpha\in I, \text{使} x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x|\text{对一切 } \alpha\in I, x\in A_\alpha\}.$$

下面的定理是很容易验证的.

定理 1.1　设 X 为基本集，$\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 为任一集族，B 是集合，则

(1)　$B\cap(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(B\cap A_\alpha)$;

(2)　$B\cup(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(B\cup A_\alpha)$;

(3)　$(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$;

(4)　$(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

集合 X 与 Y 的笛卡儿积定义为

$$X \times Y = \{(x,y)|x \in X \text{ 且 } y \in Y\}.$$

设 $(x,y) \in X \times Y$, $(x',y') \in X \times Y$, 如果 $x = x'$, $y = y'$, 则称 $(x,y) = (x',y')$.

2 映 射

定义 2.1 设 A 和 B 是两个集合，若对任意的 $x \in A$, 按照一定的法则 f, 存在唯一的 $y \in B$ 与 x 相对应，则称 f 是定义在 A 上取值于 B 中的一个映射，记作 $y = f(x)$， y 称为 x 在映射 f 下的象．集 A 称为 f 的定义域，记作 $D(f)$， $R(f) = \{f(x)|x \in A\}$ 称为映射 f 的值域．一般地， $R(f) \subset B$. 在泛函分析中，常称映射为算子.

从集 A 到 $R(f)$ 的映射常记为

$$f : A \to B.$$

特别，如果 B 是一个数集，映射 f 称为泛函，如果 A 与 B 都是数集， f 就是通常的函数.

任何实变数的函数可以看成数集到数集的映射．求导运算可以看成可微函数集到函数集的映射． $n \times m$ 矩阵可以看成 m 维线性空间到 n 维线性空间的映射．工程数学中的拉普拉斯变换

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

也是一种映射，其定义域为使得上述广义积分存在的实函数 $f(t)$ 之集合，其值域包含在一元复变函数集合之中．傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

所确定的映射，其定义域为使得上述广义积分收敛的实函数 $f(t)$ 的集合，值域在实自变量 ω 的复值函数的集合之中. 另外，矢量分析中的梯度、散度、旋度也都是映射.

定义 2.2 设 f_1, f_2 是两个映射，如果 $D(f_1) \subset D(f_2)$，且对任意的 $x \in D(f_1)$ 有 $f_1(x) = f_2(x)$，则称 f_1 是 f_2 在 $D(f_1)$ 上的限制，而称 f_2 是 f_1 的一个延拓.

例 2.1 设 $f(x) = \sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi, g(x) = |\sin x|, -\infty < x < +\infty$，则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的限制， $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的延拓.

定义 2.3 设 $f: A \to B$，如果 $R(f) = B$，即对于 B 中的每个元 y，都存在 A 中的元，使 $f(x) = y$，则称 f 是一个满射；如果对任何不同的 $x, y \in A, f(x) \neq f(y)$，则称 f 是单射；如果映射 f 既是满射又是单射，则称 f 是 A 到 B 的双射.

例 2.2 设 $C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上连续函数全体，$C^1[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上连续可微函数全体， $C_0^1[a, b]$ 是 $C^1[a, b]$ 中满足 $f(a) = 0$ 的函数全体. 作映射

$$T: f \to \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad f \in C[0, 1],$$

则 T 是 $C[0, 1]$ 到 $C^1[0, 1]$ 的单射，但不是满射，而 T 是 $C[0, 1]$ 到 $C_0^1[0, 1]$ 上的双射.

定义 2.4 设映射 $f: A \to B$ 是单射，则存在一个定义在 $R(f)$ 上取值于 A 中的映射，称它为 f 的逆映射，记作 $f^{-1}: R(f) \to A$.

显然，如果 $f: A \to B$ 是一个双射，则 f 是 A 到 B 上的可逆映射；如果存在一个从 A 到 B 的双射，则称 A 与 B 对等(或一一对应)，记作$A \sim B$.

定义 2.5 设映射 $f: A \to B, B_0 \subset B$，则 $\{x | x \in A$ 且 $f(x) \in B_0\}$ 称为 B_0 在映射 f 下的原象，记作 $f^{-1}(B_0)$.

3 可数集

定义 3.1　设 $\mathbb{N}$ 是自然数集，一切与 $\mathbb{N}$ 对等的集称为可数集，又称为可列集，即可数集中的所有元素可以用自然数编号，排成一个无穷序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. 有限集或可数集称为至多可数集.

可数集具有下列性质：

定理 3.1　(1) 可数集的子集至多可数.

(2) 可数个可数集的并是可数集.

(3) 每个无限集都有可数子集.

证明　(1) 设 A 是可数集，则 A 可以表示为一个无穷序列：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

设 B 为 A 的一个子集，若 B 不是有限集，那么 B 是上面序列的一个子列：

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots.$$

只要使 B 中的元 a_{n_k} 与 A 中的元 a_k 对应，则 B 与 A 对等，因而 B 是可数集.

(2) 设有可数个可数集 A_n $(n = 1, 2, \cdots)$. 将每个可数集的元素排列如下 (见下页)：

令 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 将 A 中所有元素像下面表中那样按箭头的指向排列，并把重复的元素去掉，则 A 可以表示成一个无穷序列，故 A 为可数集.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
A_1: & a_1^{(1)} & \rightarrow & a_2^{(1)} & & a_3^{(1)} & \rightarrow & a_4^{(1)} & \cdots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
A_2: & a_1^{(2)} & & a_2^{(2)} & & a_3^{(2)} & & a_4^{(2)} & \cdots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
A_3: & a_1^{(3)} & & a_2^{(3)} & & a_3^{(3)} & & a_4^{(3)} & \cdots \\
 & & \swarrow & & & & & & \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}
$$

(3) 设 A 为任一无限集，取 $a_1 \in A$, 令

$$A_1 = A - \{a_1\} \neq \emptyset,$$

故存在 $a_2 \in A_1$. 令

$$A_2 = A - \{a_1, a_2\} \neq \emptyset,$$

故又存在 $a_3 \in A_2$. 一般地，令

$$A_k = A - \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \neq \emptyset,$$

故存在 $a_{k+1} \in A_k$, 继续这个过程，得

$$B = \{a_1, a_2, \cdots\} \subset A$$

B 就是 A 的一个可数子集.

例 3.1 整数集 $\mathbb{Z}$ 为可数集. 事实上，

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}.$$

例 3.2 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

证明 $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p$ 为整数，q 为正整数，p, q 互质$\}$. 全体有

理数可按 $|p|+q$ 的顺序由小到大排列，$|p|+q$ 相同的有理数再按 p 的顺序排列，因此，

$$\mathbb{Q}=\{0,\frac{-1}{1},\frac{1}{1},\frac{-2}{1},\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\cdots\},$$

故 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

例 3.3 整系数多项式全体是可数集.

证明 记 n 次多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 为 $P_{a_0,\cdots,a_n}$, 显然整系数多项式全体为 $\{P_{a_0,\cdots,a_n}\}$ $(n=0,1,\cdots)$, 当 n 固定时，$a_0,\cdots,a_n$ 在整数集上独立变化. 因而从定理 3.1 的 (2) 立即得到它是可数集.

例 3.4 直线上一切互不相交的开区间或者是有限集，或者是可数集.

证明 由于开区间与其中某一有理点对应, 那么一切互不相交的开区间就与有理数集的一个子集相对应，由定理 3.1 的 (1) 可知结论成立.

例 3.5 闭区间 $[0,1]$ 是不可数集.

证明 假设 $[0,1]$ 中的点是可数的，故可排列为

$$c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots. \tag{1.1}$$

把 $[0,1]$ 三等分，不含 c_1 的一份记为 $[a_1,b_1]$, 再把 $[a_1,b_1]$ 三等分，不含 c_2 的一份记作 $[a_2,b_2]$, 如此继续下去，就得到一个闭区间套:

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

由闭区间套定理知存在唯一的 $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 但由作法知，$c_n\notin[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$, 所以 ξ 不是任何一个 c_n, 但 ξ 又是

$[0,1]$ 中的一个点，应在 (1.1) 中有它的位置，这便出现矛盾，于是 $[0,1]$ 为不可数集.

习 题 一

1. 求闭区间 $[0,1]$ 与半轴 $[0,+\infty)$ 之间的一一对应.
2. 是否存在将区间 $[a,b]$ 单值映射到整个数轴上的连续函数？
3. 证明定理 1.1.

第二章

距离空间 巴拿赫不动点

1 距离空间

数学分析的基本概念之一是序列收敛的概念，而收敛又是与距离有关的. 事实上，数列 $\{x_k\}$ 收敛于 x 是指，当 $k \to \infty$ 时，x_k 与 x 的距离 $|x_k - x|$ 能任意小. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的序列收敛的概念也是与距离有关的. 如果我们要在更广泛的集合上建立收敛性的理论，那么我们就要研究距离的基本性质. 首先，一个点到它自身的距离为零，其次，从点 x 到点 y 的距离与从点 y 到点 x 的距离是相同的，最后，如果从点 x 不直接到点 y，而是从点 x 出发先到点 z 然后再到点 y，那么所获得的距离可能大于直接从点 x 到点 y 的距离. 我们需要用精确的数学语言表示距离的这些基本性质.

定义 1.1 设 X 是一个非空集，$x, y, z \in X$，$d(x, y)$ 是一个二元函数，如果满足下面的三条性质：

(1)(非负性) $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$;

(2)(对称性) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3)(三角不等式) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$,

那么 $d(x, y)$ 称为集合 X 上的距离. 在非空集 X 上定义了距离 d, 集合 X 就称为距离空间，记为 (X, d). 距离空间中的元素称为点.

实数 $d(x, y)$ 就是两个点 x 和 y 之间的距离.

我们很快就看到，在非空集上可以定义许多不同的距离，记号 (X, d) 不只表示集合 X，而且还表示在 X 上定义的距离，为

了方便，这个记号常常用 d 来代替.

为了后面内容的需要，我们介绍几个常用的不等式 (证明见附录二).

霍尔得 (Hölder) **不等式**

设 $p>1, q>1, 1/p+1/q=1$, 若 $f\in L^p(E), g\in L^q(E)$, 则 $fg\in L(E)$, 且有

$$\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

当 $p=q=2$ 时，霍尔得不等式就是 **施瓦兹** (Schwarz) **不等式**

$$\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_E f^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_E g^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

对应于积分形式，还有以和式出现的霍尔得不等式. 设

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<+\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q<+\infty.$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{1/q}$$

明可夫斯基 (Minkowski) **不等式**

设 $f,g\in L^p(E), p\geqslant 1$, 则

$$\left(\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_E|g|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

明可夫斯基不等式也有和的形式. 设

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<+\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p<+\infty,$$