真正高考

精选典题　专家评析　闪电式提高

各个击破

圆100万学子清华北大梦！！

【审订】全国著名特高级教师
【主编】金　诚

打造学科状元

数学·数列与概率论

安徽人民出版社

真正高考

精选典题　专家评析　闪电式提高

各个击破

圆100万学子清华北大梦！！

主　　编：金　诚
本册主编：方向前　邵　军
编　　者：张中德　陈孝明　胡立清
　　　　　赵子林　黄成宇　文　华

数学·数列与概率论

安徽人民出版社

责任编辑：王世超　周子瑞
装帧设计：秦　超

图书在版编目(CIP)数据

真正高考·各个击破　数学：普通高考专题解读/金诚主编.
-合肥：安徽人民出版社，2006
ISBN 7-212-02826-6

Ⅰ.真…　Ⅱ.金…　Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第031012号

真正高考·各个击破　数学·数列与概率论

金诚　主编

出版发行：安徽人民出版社
地　　址：合肥市金寨路381号九州大厦　邮编：230063
经　　销：新华书店
制　　版：合肥市中旭制版有限责任公司
印　　刷：合肥杏花印务有限公司
开　　本：880×1230　1/32　印张：51　字数：150万
版　　次：2006年5月第1版　2006年5月第1次印刷
标准书号：ISBN 7-212-02826-6
定　　价：60.00元（共6册）
印　　数：00001—15000

前　　言

《真正高考》系列丛书之《数学》，按照国家最新考试大纲和最新教学大纲的要求编写，为便于教师指导、便于学生复习，均酌情按照知识的系统性编排.

全套书共分六册：

第一册《选择题解法》

第二册《函数、不等式、导数》

第三册《三角函数与平方向量》

第四册《解析几何》

第五册《立体几何与空间向量》

第六册《数列、概率与统计》

栏目设置：

△考试内容及知识纲络：展示在每一章之首，使学生明确本章要掌握的知识范围.

△考纲要求：依据新的考试说明，对每一小节提出高考的具体要求，使学生明确每个知识点应达到的水平.

△知识要点：使学生明确本节内容主要知识点，便于学生查阅与记忆.

△典例解析：分析典型例题，尽量覆盖知识点和解题技巧与方法，力求上升为数学思考和数学方法，精选与本节相关的近两三年高考题进行重点解析、创新，力求自然消化.

△基础达标训练、能力提升训练：收集了典型、新颖、考查能力的部分试题，使学生通过解题训练理解知识，掌握方法，形成能力，为高考做好充分准备.

△本章测试：编写少而精、新而优的题目，对本章相关知识点的掌握进行检测，便于查缺补漏，点点过关，步步为营.

本书在编写过程中尽量体现“一题多解”、“一法多用”，注重对问题的点拨和解决问题后的点评，使学生能够学到举一反三和触类旁通的数学内容，努力体现数形结合、分类讨论、归纳猜想等数学的重要思想和方法，有助于学生把知识转化为能力，由能力上升为思想，重点突出，难点分散，便于学生的理解和掌握.

本书既适合高三学生专项强化使用，又适合于高中同步学习的强化及提高，是一本实用性的备考助学用书。尽管我们做了很大的努力，但由于客观条件所限，书中难免有疏漏不足之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

《真正高考》丛书编委会

Contents
目 录

一、数 列

二、排列、组合与概率论

一 数 列

1. 数列的概念

考纲要求

1. 理解数列的概念，了解数列通项公式的意义.

2. 了解递推公式是给出数列的一种方法，并能根据递推公式写出数列的前几项.

内容提要

一、数列的概念

1. 数列的定义：按一定次序排列的一列数.

2. 数列的通项公式：数列$\{a_n\}$的第n项a_n与n之间的函数关系式$a_n = f(n)$称这个数列的通项公式.

(1) 数列的通项公式并非惟一，也并非每一个数列都可以写出通项公式. 如：由所有质数排成的一列数 2，3，5，7，… 就无数列的通项公式.

(2) 由观察法求数列通项公式应先观察哪些因素随项数n的变化而变化，哪些因素不变；分析符号、数字、字母与项数n在变化过程中的联系，初步归纳出公式，再取n特殊值进行检验，如果有误差再作调整.

3. 递推公式

如果已知数列$\{a_n\}$的第一项(或前几项)，且任一项a_n与它的前一项a_{n-1}(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.

引申 递推是认识数列的重要手段，递推公式也是确定数列的一种方式，要掌握依据数列的递推公式写出数列的前几项，及探求数列通项公式的基本方法. 数列的通项公式与递推公式是从两个不同侧面表达这个数列的特征与构造，通项公式与递推公式有时还可相互转化. 由递推式求通项公式是近年高考命题热点方向之一.

4. 数列的表示法

(1) 列举法：如 2，4，6，8…；

(2) 图像法：用(n, a_n)一群孤立的点表示；

(3) 解析法：用通项公式 $a_n = f(n)$ 表示；

(4) 递推公式法：用a_n及与它相邻的n项间 关系来表示.

5. 数列的分类

按项分类：$\begin{cases}\text{有穷数列：项数有限}\\ \text{无穷数列：项数无限}\end{cases}$

按 a_n 的增减性分类：

$\begin{cases}\text{递增数列：对于任何 } n\in N^*\text{，均有 } a_{n+1}>a_n\text{，}\\ \text{递减数列：对于任何 } n\in N^*\text{，均有 } a_{n+1}<a_n\text{，}\\ \text{摆动数列：例如：}-1,1,-1,1,\cdots\\ \text{常数数列：例如：}6,6,6,6,\cdots\\ \text{有界数列：存在正数 } M \text{ 使 } |a_n|\leqslant M, n\in N^*\text{，}\\ \text{无界数列：对于任何正数 } M\text{，总有项 } a_n \text{ 使得 } |a_n|>M.\end{cases}$

二、数列$\{a_n\}$与其前 n 项和 S_n 的关系

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$$

注意 已知 S_n 求 a_n。已知数列的前 n 项和公式，求数列的通项公式，其方法是 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，这里常常因为忽略了条件 $n\geqslant 2$ 而出错，即由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 求得 a_n 时的 n 是从 2 开始的自然数，否则会出现当 $n=1$ 时，$S_{n-1}=S_0$，而与前 n 项和的定义矛盾。可见由此求得的 a_n 不一定就是它的通项公式，必须验证 $n=1$ 时是否也成立。

S_n 与 a_n 的关系也是高考命题热点方向之一。

三、重点与难点

重点：准确理解数列的通项公式、函数意义。

难点：由数列的前 n 项和、递推关系求通项公式。

典例辨析

类型一 由数列的前几项写出通项公式

注意事项 仔细观察分析，抓住特点，联想进行转化，归纳，对一些典型的，基本的数列通项公式要熟练掌握。

例 1 根据下面各数列前几项的值，写出数列的一个通项公式

(1)$-1,7,-13,19,\cdots$；(2)$7,77,777,7777,\cdots$；

(3)$\frac{2}{3},\frac{4}{15},\frac{6}{35},\frac{8}{63},\frac{10}{99},\cdots$；(4)$5,0,-5,0,5,0,-5,0,\cdots$。

分析 本题给出了数列的前几项，要求写出数列的一个通项公式。通项公式就是寻找一列数的排列规则，也即找每一个数与它的序号间的对应法则。

解析 (1)应解决两个问题，一是符号问题，可考虑用$(-1)^n$或$(-1)^{n+1}$表示；二是各项绝对值的排列规律，不难发现后面的数的绝对值总比它前面数的绝对值大

6. 故通项公式 $a_n=(-1)^n(6n-5)$.

(2) 先联想数列 1,11,111,1111,… 的通项，它又与数列 9,99,999,9999,… 的通项有关，而 $\underbrace{99\cdots9}_{n个}=10^n-1$，于是 $a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$.

(3) 这是一个分数数列，其分子构成偶数数列，而分母可分解为 1×3，3×5，5×7，7×9，9×11，…，每一项都是两个相邻奇数的乘积. 经过组合，则所求数列的通项公式 $a_n=\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$.

(4) 数列的各项具有周期性. 联想基本数列 1,0,-1,0,…，则 $a_n=5\sin\frac{n\pi}{2}$.

注意 已知数列的前几项，写出数列的通项公式，主要从以下几个方面来考虑：

(1) 符号用 $(-1)^n$ 与 $(-1)^{n+1}$[或 $(-1)^{n-1}$] 来调解，这是因为 n 和 $n+1$ 奇偶交错.

(2) 分式形式的数列，分子找通项，分母找通项，要充分借助分子、分母的关系.

(3) 对于比较复杂的通项公式，要借助于等差数列、等比数列(后面将学到) 和其他方法来解决.

(4) 此类问题虽无固定模式，但也有规律可循，主要靠观察(观察规律)、比较(比较已知的数列)、归纳、转化(转化为等差或等比数列) 等方法.

(5) 应注意：① 并非所有的数列都能写出通项公式；② 同一数列的通项公式未必惟一；③ 数列是一个特殊的函数，其通项公式可用分段函数来表示.

类型二 由递推关系求通项公式

注意事项 对此类问题的几种常用解决方法善于总结，归纳.

例 2 分别求满足下列条件的通项公式.

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$，$(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}\cdot a_n}{a_n+2^{n+1}}$，$a_1=2$.

分析 依据已知数列的递推关系适当地进行变形，可寻找数列的通项差 a_n-a_{n-1} 或通项的商 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 的规律.

解析 (1) ∵ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，

∴ $a_n\cdot a_{n+1}\neq0$，∴ $\frac{(n+1)a_{n+1}}{a_n}-\frac{na_n}{a_{n+1}}+1=0$，

令 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=t$，∴ $(n+1)t^2+t-n=0$，分解因式得：

$[(n+1)t-n](t+1)=0$，∴ $t=\frac{n}{n+1}$，$t=-1$(舍去)，

即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$,到此可采用:

方法一:累乘法

$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}$,$\therefore a_n=\frac{1}{n}$.

方法二:迭代法

$\because a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$,

$\therefore a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot a_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot a_{n+3}=\cdots$

$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}a_1$,

$\therefore a_n=\frac{1}{n}$.

方法三:特殊数列法

$\because\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$,$\therefore\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}=1$,

$\therefore$ 数列$\{(n+1)a_{n+1}\}$是一个以a_1为首项,1为公比的等比数列,

$\therefore na_n=a_1\cdot q^{n-1}=1\times1=1$,$\therefore a=\frac{1}{n}$.

(2) 已知递推式化为$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n+1}}$,

$\therefore\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2^2}$,$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2^3}$,$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}=\frac{1}{2^4}$,$\cdots$,$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{2^n}$,

将以上$(n-1)$个式子相加得$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$,

$\therefore\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$,$\therefore a_n=\frac{2^n}{2^n-1}$.

1. 本题(1) 运用"累乘法"求通项公式,此法是将递推式变为$\frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$,令$n=2,3,4,\cdots,n$,再将这$n-1$个式子相乘得$\frac{a_n}{a_1}=f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot\cdots\cdot f(n)$,$\therefore a_n=a_1\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot\cdots\cdot f(n)$.

(2) 运用"累加法"求通项公式,此法是将递推式变形为$a_n-a_{n-1}=f(n)$,令$n=2,3,4,\cdots,n$,再将这$n-1$个式子相加,得$a_n-a_1=f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$,

$\therefore a_n=a_1+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$,

"累加法"、"累乘法"是解决数列问题中常见的消项的两种方法.这两种方法见"求等比数列的通项公式"中的应用.

2. 一般地,已知$\{a_n\}$满足$a_n=ca_{n-1}+f(n)(c\neq0,c\neq1)$,$a_1=b$,求$a_n$的方法

如下：

(1) 当 $f(n)=d$(常数)时，由 $a_n=ca_{n-1}+f(n)$，

得 $a_{n+1}=ca_n+d$，两式相减有 $a_{n+1}-a_n=c(a_n-a_{n-1})$，

则$\{a_{n+1}-a_n\}$是以(a_2-a_1)为首项，c 为公比的等比数列，故 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)c^{n-1}$，再令 $n=2,3,4,\cdots,n-1$，

得 $n-2$ 个式子，累加得 $a_n=a_2+(a_2-a_1)\cdot\dfrac{c^{n-1}-c}{c-1}=\dfrac{bc^n+(d-b)c^{n-1}-d}{c-1}$.

(2) 当 $f(n)$ 不为常数时，由 $a_n=ca_{n-1}+f(n)$，得$\dfrac{a_n}{c^n}=\dfrac{a_{n-1}}{c^{n-1}}+\dfrac{f(n)}{c^n}$，

同上累加有$\dfrac{a_n}{c^n}=\dfrac{a_1}{c}+\dfrac{f(2)}{c^2}+\dfrac{f(3)}{c^3}+\cdots++\dfrac{f(n)}{c^n}$，

$\therefore a_n=bc^{n-1}+f(2)c^{n-2}+f(3)c^{n-3}+\cdots+f(n)$.

3. 由递推公式求通项公式时，常用①累加法，②累乘法，③换元法，④转等差，等比数列法，⑤待定系数法等.

类型三　已知 S_n 求通项公式 a_n

注意事项 利用通项 a_n 与前几项和 S_n 之间的关系

即 $a_n=\begin{cases}S_1 & 当\ n=1\ 时\\ S_n-S_{n-1} & 当\ n\geqslant 2\ 时\end{cases}$

例3 已知下面各数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 的公式，求$\{a_n\}$的通项公式.

(1)$S_n=2n^2-3n$；(2)$S_n=3^n-2$.

分析 先确定首项，再确定 $n\geqslant 2$ 时的情况.

解析 (1)$a_1=S_1=-1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n)-[2(n-1)^2-3(n-1)]=4n-5$，

由于 a_1 也适合此等式，因此 $a_n=4n-5(n\in N^*)$.

(2)$a_1=S_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-2)-(3^{n-1}-2)=2\cdot 3^{n-1}$.

$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2\cdot 3^{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$

注意 已知一个数列的前 n 项和 S_n，相当于间接给出 $n\geqslant 2$ 时的 a_n；不可忽视 $n=1$ 时，$a_1=S_1$，进一步求得 $n\in N^*$ 时的 a_n.

类型四　由数列周期性求 S_n

注意事项 注意发现和利用数列的周期性特点求 S_n.

例4 一整数数列 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n$ 满足 $b_n=b_{n-1}-b_{n-2}(n\geqslant 3)$，若前2000项之和为1999，

(1) 求前 2006 项之和；

(2) 若 $b_1 = 666$，求前 2008 项之和.

分析 观察数列$\{b_n\}$有没有周期性，若有，则一个周期的各项和是多少.

解析 除题设的递推式 $b_n = b_{n-1} - b_{n-2}$ 这一条件外，仅凭观察发现不了与解题相关的信息，为了寻求数列项与项之间的内在关系，我们由条件作些实验：

$b_3 = b_2 - b_1$，$b_4 = b_3 - b_2 = (b_2 - b_1) - b_2 = -b_1$，(这里出现了第一个规律)；

$b_5 = b_4 - b_3 = -b_1 - (b_2 - b_1) = -b_2$，(这里出现了第二个规律)；

$b_6 = b_5 - b_4 = -b_2 - (-b_1) = -(b_2 - b_1) = -b_3$，(这里出现了第三个规律，从而还出现了一个更为重要的规律：$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 0$).

$b_7 = b_6 - b_5 = -b_3 - (-b_2) = b_1$(发现了一个规律)；

$b_8 = b_7 - b_6 = b_1 - (-b_3) = b_2$(发现了一个规律)；

不但如此，我们还发现此数列出现了周期现象，周期 $T = 6$，即 $b_{n+6} = b_n$，

而且 $b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + b_{n+4} + b_{n+5} = 0$，

$\because 2006 \div 6$ 余 2，且数列的任意相邻六项之和均为零，$\therefore S_{2006} = S_2$.

而 $2000 \div 6$ 余 2，$\therefore S_{2000} = S_2$，故 $S_{2006} = S_{2000} = 1999$.

解出了第(1)题，第(2)题便容易了.

$\because 2008 \div 6$ 余 4，$\therefore S_{2008} = S_4$，又 $b_1 = 666$，$b_1 + b_2 = 1999$，$\therefore b_2 = 1333$.

从而 $b_3 = b_2 - b_1 = 1333 - 666 = 667$，

而 $S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_1 + b_2 + b_3 + (-b_1) = b_2 + b_3 = 1333 + 667 = 2000$.

$\therefore S_{2008} = 2000$.

注意 观察是数学研究中最基本的方法，而"周期性"变化规律又是数学规律中十分重要的规律. 当我们遇到难以下手的数列问题，在山穷水尽之际不妨运用观察法，探寻数列各项之间周期性变化规律，或许就能出现"柳暗花明又一村". 注意总结此类数列在给出条件上的结构特点.

类型五 求 a_n 与 S_n 的最值

注意事项 数列是一类特殊的函数，可借鉴函数中此类问题的解决方法来解决 a_n 和 S_n 的最值问题.

例5 已知 $a_n = -n^2 + 9n + 10(n \in N^*)$ 是数列$\{a_n\}$的通项公式，求：

(1) 数列$\{a_n\}$的最大值；

(2) 数列$\{a_n\}$前 n 项和 S_n 取最大的值时的 n.

分析 (1) 讨论 $a_n = f(n)$ 的单调性，以确定 n 取何值时 a_n 最大；(2) 确定 a_n 的值的符号变化是解题的关键.

解析 (1) 方法一：

$\because a_{n+1} - a_n = [-(n+1)^2 + 9(n+1) + 10] - (-n^2 + 9n + 10) = -2(n-4)$，

当 $n<4$ 时，$a_{n+1}>a_n$；当 $n>4$ 时，$a_{n+1}<a_n$；当 $n=4$，$a_{n+1}=a_n$，

即 $a_1<a_2<a_3<a_4=a_5>a_6>\cdots$，

$\therefore n=4$ 或 $n=5$ 时，a_n 最大，此时 $a_4=a_5=30$.

方法二：$a_n=-n^2+9n+10$ 对应函数 $y=-x^2+9x+10(x>0,x\in N^*)$，

其图像的对称轴为 $x=\dfrac{9}{2}$，易确定 $n=4$ 或 $n=5$ 时，a_n 最大，最大值为 30.

(2) $\because a_n$ 对应函数 $y=-x^2+9x+10$，当 $y\geqslant 0$ 时有 $-1\leqslant x\leqslant 10$，

$\therefore$ 当 $1\leqslant n\leqslant 10$ 时，$a\geqslant 0$；当 $n>10$ 时，$a_n<0$，

即有 $S_1<S_2<S_3<\cdots<S_9=S_{10}>S_{11}>S_{12}>\cdots$，故 S_n 取到最大值时的 n 为 9 或 10.

注意 1. 本题为数列的项 a_n 与前 n 项和 S_n 的最值问题，解答的关键是充分利用项 a_n 的功能，通过讨论 $a_n=f(n)$ 的性质使问题迎刃而解.

2. 数列具有一定的局限性，在解决数列的某些问题时，有的转化为研究对应函数的性质比较有效，这正是函数思想对解数列问题优越性的体现.

类型六　数列知识的综合应用

注意事项 对数列，特别是等差、等比数列性质以及数列前 n 项和的有关内容的熟悉掌握是解决此类问题的基础，并在解题中要善于运用转化的思想.

例 6 已知 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}(n\in N^*)$，并记 $f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}$.

(1) 证明：$f(n+1)>f(n)$；

(2) 试确定实数 m 的取值范围，使得对于一切大于 1 的自然数 n，$f(n)>[\log_m(m-1)]^2-\dfrac{11}{20}[\log_{m-1}m]^2$ 恒成立.

$\left(\text{参考公式：}\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}(c>0\text{ 且 }c\neq 1)\right)$.

分析 (1) 转化为证明 $f(n+1)-f(n)>0$；

(2) 首先确定 $f(n)$ 的最小值，进一步建立 m 的关系式求解.

解析 (1) $f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}.$$

$\because f(n+1)-f(n)$

$$=\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{n+2}=\frac{3n+4}{2(n+1)(n+2)(2n+3)}>0$$

$\therefore f(n+1) > f(n)$.

(2) $\because f(n) > [\log_m(m-1)]^2 - \frac{11}{20}[\log_{m-1} m]^2$ 恒成立，

$\therefore f(n)_{min} > [\log_m(m-1)]^2 - \frac{11}{20}[\log_{m-1} m]^2$.

又由(1)知 $f(n)$ 为增函数，且 $n > 1$，$\therefore f(n)_{min} = f(2) = \frac{9}{20}$.

则问题转化为解关于 m 的不等式，$\frac{9}{20} > [\log_m(m-1)]^2 - \frac{11}{20}[\log_{m-1} m]^2$.

令 $t = \log_m(m-1)$，则 $\log_{m-1} m = \frac{1}{t}$，则有 $20t^4 - 9t^2 - 11 < 0$，解得 $-1 < t < 1$ 且 $t \neq 0$，

$\therefore -1 < \log_m(m-1) < 0$ 或 $0 < \log_m(m-1) < 1$. 解得 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < m < 2$ 或 $m > 2$.

1. 1) 利用条件直接证明 $f(n+1) > f(n)$ 即 $f(n)$ 的单调性时，准确计算变形是关键.

2) 第 2) 问属于不等式恒成立的问题，即：

A：$f(n) > P$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(n)_{min} > P$ 成立.

B：$f(n) < P$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(n)_{max} < P$ 成立.

2. 整体解答过程体现了解方法上，转化思想的应用. 注意转化的等价性.

一、选择题

数列 0，1，0，2，0，3，… 的一个通项公式为 (　　)

(A) $n + \frac{1+(-1)^n}{2}$　　(B) $\frac{1+(-1)^n}{4} \cdot n$

(C) $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2} \cdot \frac{n}{2}$　　(D) $\frac{1+(-1)^n}{2} \cdot n$

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \log_{n+1}(n+2)$，则它的前 30 项之积是 (　　)

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) 5　　(C) 6　　(D) $\frac{\log_2 3 + \log_{31} 32}{5}$

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 4n^2 + 3n + 2 (n \in N^*)$，则 47 是数列的 (　　)

(A) 第二项　　(B) 第三项　　(C) 第四项　　(D) 第五项

根据市场调查结果，预测某种家用商品从年初开始的几个月内累积的需求量 S_n（万件）近似地满足 $S_n = \frac{n}{90}(21n - n^2 - 5)(n = 1, 2, \cdots, 12)$，按此预测，在本年

度内,需求量超过 1.5 万件的月份是 ( )

(A)5 月,6 月 (B)6 月,7 月 (C)7 月,8 月 (D)8 月,9 月

■ 若数列前 8 项的值各异,且 $a_{n+8}=a_n$ 对任意的 $n\in N^*$ 都成立,则下列数列中可取遍 $\{a_n\}$ 中前 8 项的值的数列为 ( )

(A) $\{a_{2k+1}\}$ (B) $\{a_{3k+1}\}$ (C) $\{a_{4k+1}\}$ (D) $\{a_{6k+1}\}$

■ 数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,$n\geqslant 2$ 时,有 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=n^2$,则 a_3+a_5 等于 ( )

(A) $\frac{61}{16}$ (B) $\frac{25}{9}$ (C) $\frac{25}{16}$ (D) $\frac{31}{15}$

■ 在数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=1$,$a_2=5$,$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$,则 $a_{2005}=$ ( )

(A)1 (B)5 (C)4 (D) -1

■ 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\frac{n-\sqrt{98}}{n-\sqrt{99}}(n\in N^*)$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项中,最大项和最小项分别是 ( )

(A) a_{10},a_9 (B) a_1,a_9 (C) a_1,a_{30} (D) a_9,a_{30}

二、填空题

■ 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 是 n 的二次多项式,且它的前三项依次是 $-2,0,6$,则 $a_{100}=$ ________.

■ 已知 $n\in N^*$,在 $n<x<n+1$ 范围内,使函数 $f(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 的值是整数的 x 的个数记作 a_n,则 $a_2=$ ________.

■ 一个数列的前 n 项和为 $S_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n$,则 $S_{17}+S_{33}+S_{50}=$ ________.

三、解答题

■ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-7n-8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;(2) 求 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n.

■ 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$,数列 $\{a_n\}$ 满足 $f(\log_2 a_n)=-2n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 讨论数列 $\{a_n\}$ 的单调性,并证明你的结论.

14. 求满足下列条件的数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1) 已知$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{4n^2-1}$，$a_1=\frac{1}{2}$，求$a_n$；

(2) 已知$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2^n a_n$，且$a_1=2$，求a_n.

15. 在矩形纸片内取$n(n\in N^*)$个点，连同矩形的4个顶点共$(n+4)$个点. 这$(n+4)$个点中无三点共线. 以这些点作三角形的顶点，把矩形纸片剪成若干个三角形纸片，把这些三角形纸片的个数记为a_n.

(1) 求a_1，a_2；

(2) 求数列$\{a_n\}$的递推公式；

(3) 根据递推公式写出数列$\{a_n\}$的前6项.

2. 等差数列

考纲要求 理解等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式及前n项和公式，并能解决简单的实际问题.

内容提要

一、等差数列的基本概念及公式

		等差数列
定　义		$a_{n+1}-a_n=d(n\in N^*)$
通项公式	公式	$a_n=a_1+(n-1)d$
	涉及的基本量	a_1，d，a_n，n
	函数关系	a_n是$n(n\in N^*)$的一次函数的一系列函数值
递推公式		$a_1=a_1$，$a_{n+1}=a_n+d$
前n项和	公式	$S_n=\frac{1}{2}n(a_1+a_n)$，$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$
	涉及的基本量	a_1，d，n，a_n，S_n
	函数关系	当$d=0$，S_n是一系列一次函数值或常数 当$d\neq 0$时，S_n是一系列二次函数值

注意 等差数列的常用性质

若$\{a_n\}$是等差数列，则：

(1)$a_m = a_n + (m-n)d$；

(2) 若$m+n=p+q$，其中$m、n、p、q \in N^*$，则$a_m + a_n = a_p + a_q$(反之不成立)；

(3) 下标成等差的子数列也成等差数列；

(4) 连续相同个数的和也成等差数列；

(5)n为奇数时，$S_n = na_{中}$，($a_{中}$，即$a_{\frac{n+1}{2}}$)，$S_{奇} - S_{偶} = a_{中}$；n为偶数时，$S_n = n \cdot \frac{a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}}{2}$，$S_{偶} - S_{奇} = \frac{n}{2}d$；

(6) 若k为常数，则$\{ka_n\}$也成等差数列，公差为kd；

(7)$\{a_n\}$成等差数列的充要条件是通项$a_n = kn + b$，$k、b$是常数；

(8)$\{a_n\}$成等差数列的另一充要条件是前n项和$S_n = kn^2 + bn$，$k、b$是常数.

引申 利用数形结合的思想方法解决等差数列的有关问题时应明确：

① 通项的几何意义：由$a_n = a_1 + (n-1)d$可变形为$a_n = dn + (a_1 - d)$

若$d = 0$，则$a_n = a_1$是常数函数；

若$d \neq 0$，则a_n是n的一次函数.

(n, a_n)是直线$y = dx + (a_1 - d)$上的一群孤立的点.

单调性：$d > 0$时，$\{a_n\}$为单调递增数列；$d < 0$时，$\{a_n\}$为单调递减数列.

② 数列$\{a_n\}$的前n项和S_n可变形为$S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$，令$a = \frac{d}{2}$，$b = a_1 - \frac{d}{2}$，则$S_n = an^2 + bn$.

当$a \neq 0$即$d \neq 0$时，S_n是关于n的二次函数，(n, S_n)在二次函数$y = ax^2 + bx$的图像上，为抛物线$y = ax^2 + bx$上一些孤立的点. 利用其几何意义可求前n项和S_n的最值问题.

二、重点与难点

重点：准确理解等差数列的定义、通项公式、前n项和公式.

难点：通项公式和前n项和公式的变形应用.

典例辨析

类型一 基本题型“知三求二”

注意事项 选择恰当的公式，减少运算量.

例1 在等差数列$\{a_n\}$中

(1) 已知$a_{15} = 33$，$a_{45} = 153$，求a_{61}；

(2) 已知$S_8 = 48$，$S_{12} = 168$，求S_4；