21 世纪高等院校教材

农林院校数学基础课教材系列

概率统计教程

张丽娜 李春兰 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

农林院校数学基础课教材系列

概率统计教程

张丽娜　李春兰 主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是为普通高等学校本科生编写的教材，由概率论和数理统计两部分组成. 概率论部分包括随机事件及其概率，随机变量的分布及其数字特征，大数定律与中心极限定理；数理统计部分包括统计量的抽样分布定理，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析等.

本书重视概率论与数理统计的趣味性和实用性，紧密联系应用领域，精选例题、习题，使读者更快更好地学习、领会概率统计的理论与方法，提高应用概率统计方法解决实际问题的能力.

本书可作为高等学校农林、经济、理工等专业本科学生的教材，也可供应用统计工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计教程/张丽娜，李春兰主编. —北京：科学出版社，2006
21世纪高等院校教材・农林院校数学基础课教材系列
ISBN 7-03-017145-4

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①张… ②李… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第036026号

责任编辑：姚莉丽　赵　靖 / 责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2006年6月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2006年6月第一次印刷　印张：12 3/4
印数：1—6 000　字数：238 000

定价：16.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

参 编 人 员

主　编　张丽娜　李春兰

副主编　李友明　乔均俭

参　编　杨雨时　陈俊英　刘峰涛　邵洪波
张彦蕊　韩光辉　董连杰　白雪洁
商秀印　付君丽

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学分支. 概率论起源于机会游戏,它的某些思想最早出现在公元前 220 年,但它的真正历史一般被公认为是从 17 世纪中叶,法国一个名叫 De Méré 的职业赌徒向数学家 Pascal 提出分赌注问题开始的,从此概率论得到了迅速的发展. 数理统计起源于人口调查,其大规模发展始于 19 世纪末 20 世纪初. 19 世纪后期,Gregor Mendel 发现了遗传学的统计规律,Francis Galton 受 Charles Darwin 的《物种起源》的刺激,研究了平均值的偏差问题和回归问题,对生物统计学作出了重要贡献,Karl Pearson 1890 年将数学和概率论应用于进化论,开创了现代数理统计时代. 概率论与数理统计二者互相联系、互相渗透,在科学研究、技术开发、生产管理和社会经济生活等诸多领域发挥了重要作用,也因此成为高等学校众多专业的基础课程.

本书是为非数学专业的大学生学习概率论与数理统计而编写的教材,是作者多年讲义的总结和升华,它的出版将适应于目前压缩学时多、扩招压力大的大众化教育新形势. 其主要特点如下:①适当引入概念的历史背景和应用背景,增加趣味性、思想性和实用性;②内容叙述深入浅出,清晰明确,理论推导力求简明扼要;③选择典型的例题、习题,便于初学者对基本概念的理解、对基本方法的掌握;④理论联系实际,注重提高学生应用概率统计方法解决实际问题的能力;⑤书后附有 SAS 软件系统简介,供感兴趣的同学自学.

陈希孺院士编写的《概率论与数理统计》在基本思想和循序渐进的叙述方法方面给了我们很好的启示. 编写过程中我们还参阅了许多优秀教材,从中摘取了不少好的例题和习题,使本教材增色不少. 在此我们向这些著作者表示深深的谢意.

本书的出版得到了河北农业大学理学院领导和科学出版社的大力支持,在此表示衷心感谢.

由于水平所限,不当之处,恳请批评指正.

作　者

2005 年 12 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

在生产实践和科学实验中，人们观察到的现象大致有两类. 一类是在一定条件下必然发生的现象，称为必然现象. 例如，在一个标准大气压下，纯水加热到100℃时必然沸腾；在没有外力作用下，作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动等. 另一类是事前不能预言其结果的现象，称为随机现象. 例如，当掷一枚硬币时，可能出现正面朝上，也可能出现反面朝上；随机走到一个有交通灯的十字路口，可能遇到红灯，也可能遇到绿灯或黄灯等，这些现象呈现出很大的随机性、偶然性.

随机现象是否有规律可循呢? 经过长期的实践和观察，人们逐渐发现所谓不可预言的随机性、偶然性，只是对一次或少数几次试验或观察而言的，当在相同的条件下进行大量重复试验或观察时，其结果会呈现出某种规律性，称为随机现象的统计规律性. 概率论与数理统计正是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它在自然科学和社会科学的诸多领域都有着广泛的应用.

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与随机事件

为方便，我们将对自然现象进行一次观察或科学试验，统称为一次试验. 如果这个试验“在相同的条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前无法预知”，则称该试验为随机试验，简称为试验. 若无特别说明，在本书中的试验均指随机试验.

随机试验总是有各种不同的试验结果. 例如掷一枚质地均匀的硬币，有两种可能结果:“正面朝上”或“反面朝上”，至于硬币落在什么位置，向哪一方向滚动，均不在考虑范围之列. 又如，从一个装有 10 个黄球、5 个白球、3 个红球的盒子中，随机抽取一个球并观察其颜色，则取到的球可能有三种不同的结果:“可能是黄球”，“可能是白球”，“也可能是红球”.

试验中每一种可能出现的结果称为随机事件，简称为事件，通常用字母 A，B，C，…表示. 我们把不可能再分的事件称为基本事件或样本点. 由若干个基本事件组合而成的事件称为复合事件，由全体基本事件构成的集合称为样本空间，用 Ω 表示.

例 1.1.1　从 1，2，…，9 九个数字中任意选取一个，可能有九种不同的基本结果：ω_1＝“取得的数为 1”，ω_2＝“取得的数为 2”，…，ω_9＝“取得的数为 9”．除此之外，还有其他结果：A＝“取得的数是 4 的倍数”，B＝“取得的数为偶数”，C＝“取得的数为大于 5 的奇数”，D＝“取得的数为奇数”等．

上述每一种可能结果均为随机事件．易知 ω_1，ω_2，…，ω_9 是该试验中所有的基本事件，因此样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_9\}$．$A$，$B$，$C$，$D$ 为复合事件．

例 1.1.2　从装有红、白、黄三个球的袋中任取两个球，基本事件为 ω_1＝“取出的球为一红一白”，ω_2＝“取出的球为一红一黄”，ω_3＝“取出的球为一白一黄”．于是该试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，而 A＝“恰有一个红球”是由 ω_1，ω_2 复合而成的复合事件．

例 1.1.3　从装有红、白、黄三个球的盒中依次取两个球，取后不放回，则该试验的基本事件为 ω_1＝“第一次取红球，第二次取白球”；ω_2＝“第一次取红球，第二次取黄球”；ω_3＝“第一次取白球，第二次取红球”；ω_4＝“第一次取白球，第二次取黄球”；ω_5＝“第一次取黄球，第二次取红球”；ω_6＝“第一次取黄球，第二次取白球”．则该试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$；而 A＝“取得的球中有红球”由 ω_1，ω_2，ω_3，ω_5 复合而成，B＝“取得的第一个球是黄球”是由 ω_5，ω_6 复合而成的复合事件．

例 1.1.4　连续掷一枚二分和一枚五分的硬币，可能出现四种不同的基本结果：ω_{11}＝“正，正”，ω_{10}＝“正，反”，ω_{01}＝“反，正”，ω_{00}＝“反，反”，其全体构成该试验的样本空间 Ω．

在随机试验规定的条件下，必然出现的事件叫必然事件，用 Ω 表示；而必然不出现的事件叫不可能事件，用$\varnothing$表示．必然事件与不可能事件已不具有随机性，是随机事件的两个极端情况．为方便计，仍把它们视为随机事件．

1.1.2　事件间的关系及运算

在同一个随机试验中，诸随机事件间往往是互相联系的．例如，在检查某圆柱形产品时，规定产品的长度、直径均合格时才算合格．这时就会遇到“产品合格”、“产品不合格”、“长度合格”、“长度不合格”、“直径合格而长度不合格”、“长度合格而直径不合格”等事件，显然其间存在着某种联系．由于随机事件是样本空间的子集，所以随机事件间的关系就是集合之间的关系，随机事件间的运算就是集合之间的运算，只是赋予了概率的含义而已．下面讨论事件间的几种主要关系与运算．

设随机试验 E 的样本空间为 Ω；A，B，A_i（$i=1, 2, \cdots$）为 E 的随机事件．

1. 包含关系

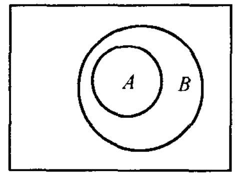

图 1.1

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，如图 1.1 所示. 例如，在例 1.1.1，用 A 表示“取得的一数为 4 的倍数”，B 表示“取得的一数为偶数”，显然有 $A \subset B$.

规定，对任何事件 A，恒有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

事件间的包含关系具有传递性，即如果 $A \subset B$ 且 $B \subset C$，则 $A \subset C$.

若事件 A 包含于事件 B，同时事件 B 也包含于事件 A，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

2. 事件的和（或并）

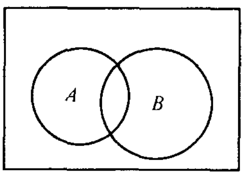

图 1.2

称事件 A 和事件 B 至少发生其一的事件为事件 A 与 B 的和（并）事件，记作 $A \cup B$，如图 1.2 所示. 在例 1.1.1 中，若用 A 表示“取得的数为 4 的倍数”，用 C 表示“取得的数为大于 5 的奇数”，则 $A \cup C =$ “取得的数为 4 的倍数或大于 5 的奇数”，即“取得的数为 4，7，8，9 之一”.

由事件和的定义可得：对任一事件 A，有 $A \cup \varnothing = A$，$A \cup \Omega = \Omega$.

和事件的概念也可以推广到有限多个或可列无穷多个事件的情形，即

$A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示事件 A_1，A_2，…，A_n 至少发生其一的事件；

$A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示事件 A_1，A_2，…，A_n，…至少发生其一的事件.

例如，某人进行科学实验，直到实验成功为止. 若 A 表示实验成功，A_i 表示实验直到第 i 次才成功，显然有 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

3. 事件的积（或交）

称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为 A 与 B 的积（交）事件，记作 AB 或 $A \cap B$，如图 1.3 所示. 例如，在例 1.1.1 中，E 表示“取得的数为 3 的倍数”，C 表示“取得的数为大于 5 的奇数”，则 $E \cap C =$ “取得的数是 3 的倍数且为大于 5 的奇数”，即 $E \cap C =$ “取得的数为 9”.

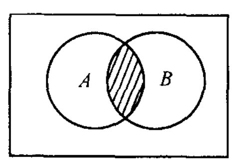

图 1.3

类似地，积事件的概念也可以推广到有限个或可列无穷多个事件的情形，即

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件；

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生的事件.

例如，某人进行科学实验，直到实验成功为止. 若 B 表示实验未成功，B_i 表示第 i 次实验未成功，则 $B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$.

4. 事件的互斥与互逆

若事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 为互斥事件，如图 1.4 所示. 在例 1.1.1 中，$A=$“取得的数是 4 的倍数”与 $C=$“取得的数为大于 5 的奇数”是互斥事件.

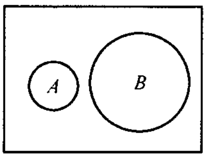

图 1.4

对于互斥事件的和事件 $A\cup B$，也可以记作 $A+B$.

若一个事件组中任意两个事件均互斥，则称该事件组两两互斥. 易知，在同一随机试验中任意两个基本事件均互斥.

若事件 A 与 B 的和事件为必然事件，且积事件为不可能事件，即

$$A\cup B=\Omega,\qquad A\cap B=\varnothing,$$

则称事件 A 与 B 为互逆事件，如图 1.5 所示. 通常把 A 的逆事件记作 $\overline{A}$. 例如，在例 1.1.1 中，$D=$“取得的一数为奇数”与 $B=$“取得的一数为偶数”是互为逆事件，即 $\overline{D}=B$，$\overline{B}=D$.

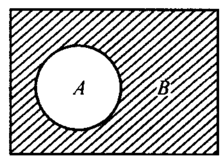

图 1.5

值得注意的是：

(1) 互逆事件一定互斥，反之未必. 例如，在例 1.1.1 中，$A=$“取得的数是 4 的倍数”与 $C=$“取得的数为大于 5 的奇数”是互斥事件但不是互逆事件.

(2) 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

5. 事件的差

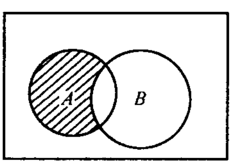

图 1.6

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$，如图 1.6 所示. 显然，$A-B=A\cap\overline{B}$，$\overline{A}=\Omega-A$. 例如，“直径合格而长度不合格”是事件 $A=$“直径合格”与事件 $B=$“长度合格”的差事件，也是 $A=$“直径合格”与 $\overline{B}=$“长度不合格”的积事件.

6. 事件间的运算规律

由于随机事件是样本空间的子集，所以事件间的关系就是集合之间的关系，

事件间的运算就是集合之间的运算，因此事件间的运算满足以下运算规律.

(1) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

(2) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(3) 结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(4) 对偶公式（也称为 De Morgan 定律）

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

通常 (4) 简记为“和的逆” = “逆的积”，“积的逆” = “逆的和”.

例 1.1.5 某人去狩猎，向一只正在跑动的兔子连打三枪，以 A_i 表示“第 i 枪击中目标”（$i=1$，2，3），试用 A_1，A_2，A_3 表示下列各事件：

(1) A：只击中第一枪；

(2) B：只击中一枪；

(3) C：三枪均未击中；

(4) D：至多击中一枪.

解 (1)“只击中第一枪”说明第一枪击中，第二、三枪均未击中，即 A_1，$\overline{A}_2$，$\overline{A}_3$ 同时发生. 所以 A 是 A_1，$\overline{A}_2$，$\overline{A}_3$ 的积事件：$A=A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$.

(2)“只击中一枪”，没有指明是第几枪击中，可能是第一枪击中，也可能是第二枪或第三枪击中. 所以该事件是 $A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$，$\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3$，$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3$ 的和事件：$B=(A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)+(\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)+(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)$.

(3)“三枪均未击中目标”是 $\overline{A}_1$，$\overline{A}_2$，$\overline{A}_3$ 的积事件：$C=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$，或是“至少击中一枪” $A_1\cup A_2\cup A_3$ 的逆事件：$C=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$.

(4)“至多击中一枪”表示“只击中一枪”或“三枪均未击中”，所以该事件可表示为 $D=A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3+\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3+\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3+\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$.

1.2 随机事件的概率及性质

研究随机现象不仅要研究它可能出现哪些事件，更重要的是要研究各种事件出现的可能性大小，揭示随机现象的统计规律性. 我们把刻画随机事件发生的可能性大小的数量指标叫作事件的概率. 它是概率论中最基本的概念之一.

1.2.1 统计概率

统计概率是一种通过试验去估计事件概率的方法，如在一定高度重复掷一枚质地均匀的硬币，观察“正面”出现的次数，由此估计“正面”出现的可能性大小. 一般地，设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称比值$\frac{m}{n}$为随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率，记作 $\omega(A)$，即

$$\omega(A)=\frac{m}{n}.$$

显然，对任何事件 A，在 n 次重复试验中发生的频率总是介于 0 与 1 之间的数，即 $0\leqslant\omega(A)\leqslant 1$，且 $\omega(\Omega)=1$，$\omega(\varnothing)=0$.

对于两两互斥的事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$\omega(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\omega(A_1)+\omega(A_2)+\cdots+\omega(A_n).$$

事实上，在 n 次重复试验中，如果 A_1，A_2，…，A_n 出现的次数分别为 m_1，m_2，…，m_n，那么由于 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，事件 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n$ 出现的次数为

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_n.$$

于是事件 A，A_1，A_2，…，A_n 出现的频率分别为$\frac{m}{n}$，$\frac{m_1}{n}$，$\frac{m_2}{n}$，…，$\frac{m_n}{n}$，满足等式

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}+\cdots+\frac{m_n}{n},$$

即 $\omega(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\omega(A_1)+\omega(A_2)+\cdots+\omega(A_n)$.

历史上曾有不少统计学家做过“投硬币”的试验，得到如表 1.1 所示的数据.

表 1.1

实验者	试验次数 n	正面出现的频数 m	频率 $\omega_n(A)$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

从上述数据可以看出：

(1) 频率具有波动性，即对于同样的 n，所得 $\omega_n(A)$ 不尽相同；

(2) 抛掷次数 n 较小时，频率 $\omega_n(A)$ 随机波动的幅度较大，但随着 n 增大，

频率 $\omega_n(A)$ 呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时，$\omega_n(A)$ 总在 0.5 附近摆动，而且逐渐稳定于 0.5.

经验表明：在大量重复试验中，随机事件 A 发生的频率一般具有一定的稳定性，即当试验次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率总在某个常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动，n 越大，摆动的幅度越小. 此时称事件 A 发生的概率为 p，如此定义的概率称为事件的统计概率，记作 $P(A)=p$. 由此可得到统计概率的性质：

(1) 对任一事件 A，恒有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

(3) 对于两两互斥的事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

统计概率的重要性在于它提供了估计概率的方法和检验某个理论正确与否的准则. 可以设想，根据一定理论得到 $P(A)=p$，那么结果与实际是否相符呢？通常我们要付诸实践，即通过大量重复试验观察事件 A 的频率 $\omega(A)$. 若 $\omega(A)$ 与 p 接近，则认为试验结果支持了该理论，否则认为该理论有误. 这类问题将在第 6 章假设检验中进行介绍.

1.2.2 古典概率

公元 1654 年，法国一个职业赌徒 De Méré 已经得知，一颗骰子连掷 4 次"至少出现一个 6 点"的可能性大于$\frac{1}{2}$，因此他推测两颗骰子连掷 24(4×6) 次"至少出现一对 6 点"的可能性也应大于$\frac{1}{2}$，但在赌场上实践的结果却不是这样. 为此 De Méré 愤怒地谴责了数学. 历史上古典概率正是由研究诸如掷硬币、掷骰子这一类赌博中的问题引起的.

定义 1.2.1 对于某一随机试验，如果样本空间中的基本事件只有有限个，并且各个基本事件发生的可能性相同，则称该随机试验为具有古典概型的随机试验. 对于任意事件 A，定义

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 中所含基本事件个数}(k)}{\Omega\text{ 中所含基本事件总数}(n)},$$

称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

可见，要计算事件 A 的概率，必须要搞清楚样本空间 Ω 所包含的基本事件总数 n 及 A 中所包含的基本事件数 k.

例 1.2.1 从编号为 1，2，3，…，20 的 20 张卡片中任意抽取一张，求"抽到卡片编号为 3 的倍数"的概率.

解 由于是任意抽取，抽到任何一张都是等可能的. 用 A 表示"抽到卡片编号为 3 的倍数"，用 i 表示"抽到第 i 号卡片"的基本事件，则 $\Omega=\{1, 2, \cdots,$

20}，$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$，此时 $n=20$，$k=6$，故有 $P(A)=\frac{6}{20}=0.3$.

以上例题是古典概率中最简单的情况，其中基本事件和样本空间都容易列举. 然而在很多情况下并非如此. 在一个古典概型的随机试验中，当基本事件数较多时，我们很难或事实上不可能将基本事件一一列出，这时要用到排列组合的知识.

例 1.2.2　一批产品共 10 件，其中有 6 件正品，4 件次品，求下列事件的概率：

(1) A_1："从中任取三件，恰有两件次品"；

(2) A_2："从中依次取三件恰有两件次品"；

(3) A_3："从中有放回地任取三件至少有两件是正品".

解　(1) 由于任取不考虑次序，所以 $P(A_1)=\frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3}=0.3$；

(2) 依次抽取要考虑顺序，所以 $P(A_2)=\frac{C_3^2 \cdot A_4^2 \cdot A_6^1}{A_{10}^3}=0.3$；

(3) 事件"三件中至少有两件是正品"是"三件中恰有两件是正品"与"三件中恰有三件是正品"的和事件，所以 $P(A_3)=\frac{C_3^2 \cdot 6^2 \cdot 4+6^3}{10^3}=0.648$.

思考题　如何理解 (1)，(2) 的结果?

例 1.2.3　从 0，1，2，…，9 十个数字中依次取四个不同的数字，求能组成一个四位偶数的概率.

解　从十个数字中依次取四个不同的数字共有 A_{10}^4 种取法. 所取数字组成一个四位偶数分两种情况：个位数是 0，或是 2，4，6，8 中任意一个，共有 $A_9^3+C_4^1A_8^1A_8^2$ 种取法. 于是所求概率为

$$P(A)=\frac{A_9^3+C_4^1A_8^1A_8^2}{A_{10}^4}=\frac{41}{90}.$$

例 1.2.4　设某班有 r 个人，$r\leqslant 365$，并设每人的生日在一年 365 天中的每一天都是等可能的. 求这 r 个人有不同生日的概率.

解　r 个人都以等可能的机会在 365 天中的任意一天出生，故基本事件总数为 365^r. 依题意，所求事件包含的基本事件数为

$$365\times 364\times\cdots\times(365-r+1),$$

它恰是 365 个数中任取 r 个数的排列 $A_{365}^r=\frac{365!}{(365-r)!}$. 故"$r$ 个人有不同生日"的概率为 $P(A)=\frac{365!}{(365-r)!\ 365^r}=\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{365}\right)$.

当 r 较小时，$P(A)\approx 1-\frac{r(r-1)}{730}$. 比如 $r=2$ 时，"两人不同生日的概率"