长春市教育局教育教学研究室组编

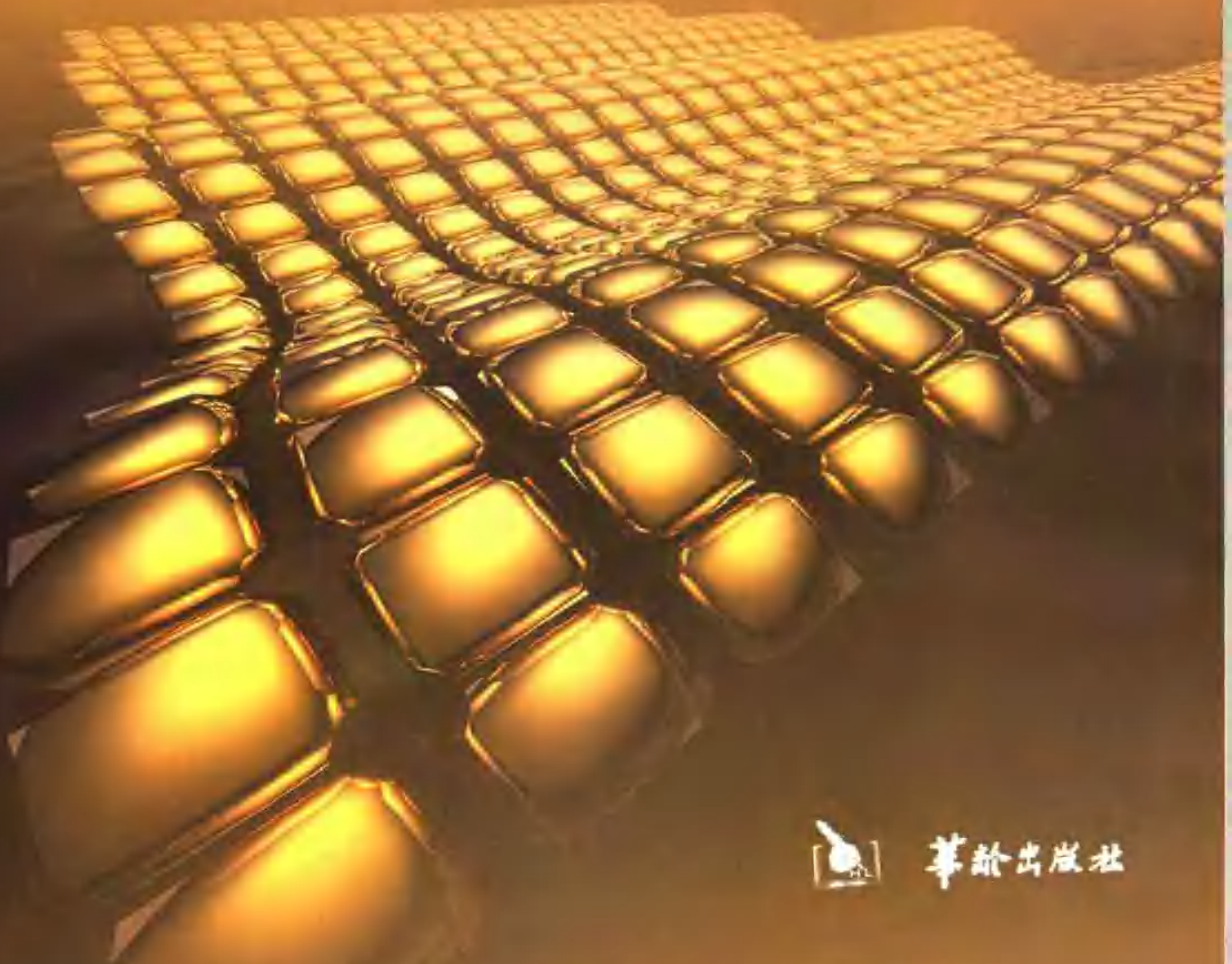
全程绿色学习

系列丛书

教师用书

（与学生用书配套使用）

高一数学（下册）



华龄出版社

全程绿色学习

权威性 实用性 操作性

系列丛书

高一数学（下册）

教师用书

（与学生用书配套使用）

长春市教育局教育教学研究室 组编

名题举例

题型设计与训练

華龄出版社

责任编辑 苏 辉
封面设计 倪 霞

图书在版编目（CIP）数据

全程绿色学习系列丛书．高一数学．下册/长春市教育局教育教学研究室组编．—北京：华龄出版社，2005.12
教师用书
ISBN 7-80178-125-2

Ⅰ．全… Ⅱ．长… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 151787 号

书 名：全程绿色学习系列丛书·高一数学（下册）教师用书
作 者：长春市教育局教育教学研究室组编
出版发行：华龄出版社
印 刷：遵化市印刷有限公司
版 次：2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷
开 本：850×1168 1/16 印 张：5.25
印 数：1～3000 册
全套定价：52.00 元（共 9 册）

地 址：北京西城区鼓楼西大街 41 号 邮 编：100009
电 话：84044445（发行部） 传 真：84039173

前　言

由北京大视野教科文化发展有限公司策划，长春市教育局教育教学研究室组织编写的《全程绿色学习系列丛书》和大家见面了。它作为师生的良师益友，将伴随师生度过高中宝贵的学习时光。

本丛书以人教社最新修订的高中教科书为蓝本，以最新《考试大纲》、《新课程教学大纲》和《新课程课程标准》为依据，集国内最先进的教学观念，精选近五年全国高考试题、近三年各省市的优秀模拟试题，并根据高考最新动向，精心创作了40%左右的原创题，使每道试题都体现出了对高考趋势的科学预测。本丛书采用“一拖一”的编写模式，即一本教师用书，一本学生用书（学生用书包括同步训练和单元同步测试），两本书互为补充。学生用书“同步训练”的编写体例为“名题举例”和“题型设计与训练”两部分，题型设计与训练部分编写适量的基础题及综合性、多元性的试题，意在培养学生的学科思想与悟性，使其对每个知识点的复习落到实处，从而达到“实战演练，能力提升”的目的，并单独装订成册，可作为学生课堂练习本，也可作为学生课后作业本，便于师生灵活使用；学生用书“单元同步测试”是对本单元教与学的总结和验收，既可供教师作考试之用，又可供学生作自我检测之用。教师用书既是教师教学的教案，又是学生学习的学案。教师用书对学生用书“名题举例”和“题型设计与训练”中的每道题进行了全析全解，并给出了“规范解答”，采用“网上机读解答”方式，使学生每做一道题，都是进行高考“实弹演习”。这是本套丛书的一大亮点，在全国教辅用书上也是首次使用这种解答方式。它将有助于学生大幅度提高学习成绩。

《全程绿色学习系列丛书·高一数学（下册）教师用书》由长春市教育局教育教学研究室特级教师祝承亮任主编，东北师范大学附属中学李晓松任副主编。第四章由长春市希望高中李景娟编写；第五章平面向量由东北师范大学附属中学李晓松、杨云霞、王晓晶、薛玉财编写；假期作业由长春市实验中学杜艳蕾编写。全书由长春市教育局教育教学研究室特级教师祝承亮统编、审定。

长春市教育局教育教学研究室

2005年12月

编委会

主　编　陆建中

副主编　白智才　逯成文　刁丽英

编　委　（按姓氏笔画为序）

刁丽英　王　梅　王笑梅

白智才　孙中文　刘玉琦

许　丽　陆建中　陈　薇

张甲文　吴学荣　尚玉环

赵大川　祝承亮　逯成文

“高一数学（下册）教师用书”读者反馈表

您只要如实填写以下几项并寄给我们，将有可能成为最幸运的读者，丰厚的礼品等着您拿，数量有限（每学期50名）一定要快呀！

您最希望得到的礼品 100元以下（请您自行填写）

A ____________ B ____________ C ____________

您的个人资料（请您务必填写详细，否则礼品无法送到您的手中）

姓名：	学校：	联系电话：
邮编：	通讯地址：	
职业： 教师□	学生□	教研员□
请在右栏列举3本您喜爱的教辅		
您发现的本书错误：		
您对本书的意见或建议：		

信寄：吉林省长春市亚泰大街3658号 长春市教育教学服务中心

邮编：130022 **联系电话**：0431—8633939

目　录

同步测试1 摸底试卷

一、选择题

1.〔解析〕解出集合 N 即可.

〔参考答案〕D.

2.〔参考答案〕C.

3.〔解析〕注意集合中的代表元素是 y,应是求二次函数的值域.

〔参考答案〕D.

4.〔解析〕抓住不等式的解集与方程根的联系. $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两根,进而可求出 $a-b$.

〔参考答案〕D.

5.〔解析〕$\neg B\Rightarrow\neg A\Leftrightarrow A\Rightarrow B$、原命题和逆否命题是等价的.

〔参考答案〕B.

6.〔解析〕根据复合函数单调性"同增异减"的规律以及真数有意义,即要求 $4+3x-x^2>0$,同时 $y=4+3x-x^2$ 为减函数.

〔参考答案〕D.

7.〔解析〕$f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$, $f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}$, $\therefore f(x)=f(x+4)$, $\therefore f(105.5)=f(4\times26+1.5)=f(1.5)=f(-1.5)=f(2.5)=2.5$

〔参考答案〕B.

8.〔解析〕利用互为反函数的自变量与函数值对调的性质.求 $f(10)$,即令 $y=\log_3^{(x-1)}+9=10$ 解 x.

〔参考答案〕D.

9.〔解析〕$\because f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$,则方程 $f(x)=0$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 内有根,且 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数,$\therefore$ 只有唯一实根.

〔参考答案〕C.

10.〔解析〕由 $a_1+a_{15}=a_4+a_{12}=2a_8$,得出 a_8,进而可求 a_3+a_{13}.

〔参考答案〕B.

11.〔解析〕$a_1+a_2+a_3+a_4=40$ ①

$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=80$ ②

①+②得 $a_1+a_n=30$ 代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=210$,

$\therefore n=4$.

〔参考答案〕B.

12.〔解析〕根据等差数列性质 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_{\frac{n-1}{2}}$ (n 为奇数)

$\frac{S_{2n-1}}{S'_{2n-1}}=\frac{a_n}{b_n}$, $\therefore \frac{a_5}{b_5}=\frac{S_9}{S'_9}$.

〔参考答案〕B.

二、填空题

13.〔解析〕$m-1<0$,原不等式等价于 $x^2-x-2<0$.

〔参考答案〕$\{x|-1<x<2\}$.

14.〔解析〕$a_1a_3=a_2^2$, $a_2a_4=a_3^2$, $\therefore$ 原式变为 $(a_2+a_3)^2=49$. 等比数列 $\{a_n\}$ 各项为正,$\therefore a_2+a_3=7$.

〔参考答案〕7.

15.〔解析〕理解分段函数的意义,反复代换.

$f(5)=f[f(10)]=f(7)=f[f(12)]=f(9)=f[f(14)]=f(11)=8$.

〔参考答案〕8.

16.〔解析〕由 $3a_{n+1}-a_n=0$ 可知 a_n 为 $q=\frac{1}{3}$ 的等比数列. $b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 为 $b_1=\frac{4}{3}$, $q=\frac{1}{3}$ 的等比数列,进而求和.

〔参考答案〕$2\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$.

三、解答题

17.〔参考答案〕原不等式 $\Leftrightarrow\begin{cases}3\log_a x-2\geqslant0\\2\log_a x-1<0\end{cases}$ (1)

或 $\begin{cases}2\log_a x-1\geqslant0\\3\log_a x-2>(2\log_a x-1)^2\end{cases}$ (2)

(Ⅰ)$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a x\geqslant\frac{2}{3}\\\log_a x<\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\Phi$

(Ⅱ)$\Leftrightarrow 4\log_a^2x-7\log_a x+3<0\Leftrightarrow\frac{3}{4}<\log_a x<1$

$a>1$ 时, $a^{\frac{3}{4}}<x<a$, $0<a<1$ 时, $a<x<a^{\frac{3}{4}}$,

$\therefore 1^\circ$

$a>1$ 时,解集为 $(a^{\frac{3}{4}},a)$ 2° $0<a<1$ 时,解集为 $(a,a^{\frac{3}{4}})$.

18.〔解析〕$\neg q\Rightarrow\neg p\Leftrightarrow p\Rightarrow q$ 可以直接运算,也可以利用等价命题 $p\Rightarrow q$ 去计算.

〔参考答案〕由 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant2\Rightarrow-2\leqslant x\leqslant10$.

$\therefore\neg p: A=\{x\in\mathbf{R}|x>10$ 或 $x<-2\}$.

又 $x^2-x+1-m^2\leqslant0\Rightarrow1-m\leqslant x\leqslant1+m(m>0)$.

$\therefore\neg q: B=\{x\in\mathbf{R}|x>1+m$ 或 $x<1-m, m>0\}$.

据题意可得 $B\subsetneqq A\Leftrightarrow\begin{cases}1-m\leqslant-2\\1+m\geqslant10\Rightarrow m\geqslant9.\\m>0\end{cases}$

19.〔解析〕抽象函数问题要抓住它在教材中的具体模型，用具体理解抽象．同时，充分利用已知条件进行赋值整理．

〔参考答案〕(1)令 $x=y=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)$．

$\therefore f(0)=0$，令 $y=-x$．

则 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$．

$\therefore f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(x)$为奇函数．

(2)任取 $x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1-x_2)=-f(x_2-x_1)$

$\because x_2-x_1>0$，

$\therefore f(x_2-x_1)<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$．

$\therefore f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减．

$\therefore$当 $x\in[-3,3]$时，$f(3)\leqslant f(x)\leqslant f(-3)$．

$\because f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)=-4$，$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=-6$．

$\therefore$当 $x\in[-3,3]$时，$f(x)$的最大值为 6，最小值为 -6．

20.〔解析〕$a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}\ (n\geqslant 2)\\ S_1\quad (n=1)\end{cases}$注意分类讨论．

另外，求和时注意抓住特征，有规律的部分用错位相减法．

〔参考答案〕(1)$\because f(1)=(n+1)^2$，

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(n+1)^2$．

又 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=n^2\ (n\geqslant 2)$．

当 $n\geqslant 2$ 时，两式相减得 $a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$．

当 $n=1$，$a_1=(1+1)^2=4$，不满足 $a_n=2n+1$．

$\therefore a_n=\begin{cases}4\quad (n=1)\\ 2n+1\quad (n\geqslant 2)\end{cases}$，故$\{a_n\}$不是等差数列．

(2)当 $n=6$ 时，$f(2)=4\cdot 2+5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+9\cdot 2^4+11\cdot 2^5+13\cdot 2^6$

$\begin{cases}设\ S=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+9\cdot 2^4+11\cdot 2^5+13\cdot 2^6\\ 则\ 2S=5\cdot 2^3+7\cdot 2^4+9\cdot 2^5+11\cdot 2^6+13\cdot 2^7\end{cases}\Rightarrow$

$S=(13\cdot 2^7-5\cdot 2^2)-(2^4+2^5+2^6+2^7)=1404$，

$\therefore f(2)=4\times 2+1404=1412$．

21.〔解析〕注意运用换元法转化为 x、y 的关系式，从而得出 $y=g(x)$的函数解析式．解对数不等式注意对底数 a 进行分类讨论，利用函数的单调性，同时还要满足真数大于零．

〔参考答案〕(1)由点(x_0,y_0)在 $y=\log_a(x-1)$的图像上知，$y_0=\log_a(x_0-1)$，

令 $2x_0=u$，$2y_0=v$，则 $x_0=\dfrac{u}{2}$，$y_0=\dfrac{v}{2}$，

$\therefore \dfrac{v}{2}=\log_a\left(\dfrac{u}{2}-1\right)$，即 $v=2\log_a\left(\dfrac{u}{2}-1\right)$．

由$(2x_0,2y_0)$在 $y=g(x)$的图像上，即(u,v)在 $y=g(x)$的图像上．

$\therefore y=g(x)=2\log_a\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$．

(2)$F(x)=f(x)-g(x)=\log_a(x-1)-2\log_a\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$．

由 $F(x)\geqslant 0$，即 $\log_a(x-1)-2\log_a\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\geqslant 0$．

当 $a>1$ 时，不等式①等价于不等式组：

$$\begin{cases}x-1\geqslant\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2,\\ x-1>0,\\ \dfrac{x}{2}-1>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-8x+8\leqslant 0,\\ x>2\end{cases},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4+2\sqrt{2},\\ x>2\end{cases}$$

$\Rightarrow 2<x\leqslant 4+2\sqrt{2}$．

当 $0<a<1$ 时，不等式①等价于不等式组．

$$\begin{cases}x-1\leqslant\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2\\ x>1\\ \dfrac{x}{2}>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-8x+8\geqslant 0\\ x>2\end{cases},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 4-2\sqrt{2}\text{或 }x\geqslant 4+2\sqrt{2}\\ x>2\end{cases}$$

$\Rightarrow x\geqslant 4+2\sqrt{2}$，

所以，当 $a>1$，$2<x\leqslant 4+2\sqrt{2}$时，$F(x)\geqslant 0$；

当 $0<a<1$，$x\geqslant 4+2\sqrt{2}$时，$F(x)\geqslant 0$．

22.〔解析〕利用构造法求数列通项公式．

〔参考答案〕(Ⅰ)$a_n=a_{n-1}\cdot(1-4\%)+(1-a_{n-1})\cdot 16\%=\dfrac{4}{5}a_{n-1}+\dfrac{4}{25}\ (n\geqslant 2)$．

(Ⅱ)(理)由(1)知 $a_n-\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}\left(a_{n-1}-\dfrac{4}{5}\right)$

又 $a_1=\dfrac{3}{10}$，

$\therefore a_1-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\left\{a_n-\dfrac{4}{5}\right\}$是公比为$\dfrac{4}{5}$的等比数列，

$\therefore a_n-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$，

$\therefore a_n=\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$．

若 $a_n>60\%=\dfrac{3}{5}$，则$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{5}$即，$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}<\dfrac{2}{5}=0.4$

$\because\left(\dfrac{4}{5}\right)^4=0.4096\quad\left(\dfrac{4}{5}\right)^5=0.32768\quad y=\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ 为减函数，

$\therefore n-1\geqslant 5$，即 $n\geqslant 6$．

故至少要到 2005 年底，该县的绿州面积才能超过 60%．

第四章　三角函数

同步训练 1　4.6　两角和与差的正弦、余弦、正切(1)

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕$\sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma$　$\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma$,

$\therefore \sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\sin^2\gamma$　①

$\therefore \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\cos^2\gamma$　②

①+②得:$2\cos(\alpha-\beta)=-1$　$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$.

〔规范解答〕$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$

〔例 2〕

〔思路点拨〕三角变换首先是角的变换,所求 $\alpha+2\beta=(\alpha+\beta)+\beta$.这种"凑角法"是常见技巧.同时注意对比中出现角的范围的讨论.

〔规范解答〕

$\because \alpha$ 为锐角,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$,

$\therefore \cos\alpha=\frac{7}{10}\sqrt{2}$.

$\because \beta$ 为锐角,$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore \cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$=\frac{7}{10}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{10}\sqrt{10}-\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{2}{5}\sqrt{15}$,

$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \cos(\alpha+2\beta)=\cos[(\alpha+\beta)+\beta]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$

$=\frac{2}{5}\sqrt{5}\cdot\frac{3}{10}\sqrt{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $\cos(\alpha+\beta)>0$,α、β 都为锐角知 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$,又 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore 0<\alpha+2\beta<\pi$

$\therefore \alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$.

〔例 3〕

〔思路点拨〕熟练掌握公式 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ 的变形,尤其 $A+B$ 为特殊角.(2)利用(1)的结论.

〔规范解答〕

(1)$\because A+B=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$,

$\therefore \tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$,

$\therefore (1+\tan A)\cdot(1+\tan B)$

$=1+\tan A+\tan B+\tan A\cdot\tan B$

$=1+1-\tan A\cdot\tan B+\tan A\cdot\tan B=2$.

(2)原式$=[(1+\tan1^\circ)(1+\tan44^\circ)]\cdot[(1+\tan2^\circ)(1+\tan43^\circ)]\cdot\cdots\cdot[(1+\tan22^\circ)\cdot(1+\tan23^\circ)]\cdot(1+\tan45^\circ)=\underbrace{2\cdot2\cdot\cdots\cdot2\cdot2}_{23个2}=2^{23}$

题型设计与训练

一、选择题

1.〔解析〕$\frac{\sqrt{3}+3\tan15^\circ}{3-\sqrt{3}15^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\tan15^\circ}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan15^\circ}=\frac{\tan30^\circ+\tan15^\circ}{1-\tan30^\circ\tan15^\circ}$

$=\tan45^\circ=1$.

〔参考答案〕C.

2.〔解析〕$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

〔参考答案〕A.

3.〔解析〕$\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=m$

$\sin(\alpha-\beta-\alpha)=m-\sin\beta=m$,

(除象限角)$\sin\beta=-m$,

$\therefore \cos\beta=-\sqrt{1-m^2}$.

〔参考答案〕B.

4.〔解析〕$\cos A\cdot\cos B+\cos A\sin B+\sin A\cos B+\sin A\sin B=2$

$\cos(A-B)+\sin(A+B)=2$

$\therefore \cos(A-B)=1$　$\sin(A+B)=1$

$\therefore A=B$,$A+B=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

〔参考答案〕D.

5.〔解析〕$\tan10^\circ\cdot\tan20^\circ+\sqrt{3}(\tan10^\circ+\tan20^\circ)$

$=\tan10^\circ\tan20^\circ+\sqrt{3}\cdot\tan30^\circ(1-\tan10^\circ\cdot\tan20^\circ)=1$.

〔参考答案〕B.

6.〔解析〕$2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore -2\leqslant\frac{4m-6}{4-m}\leqslant 2$　得 $-1\leqslant m\leqslant\frac{7}{3}$.

〔参考答案〕D.

二、填空题

7.〔解析〕$\frac{\sin 68^\circ+\cos 75^\circ\sin 7^\circ}{\cos 68^\circ-\sin 75^\circ\sin 7^\circ}$

$=\frac{\sin(75^\circ-7^\circ)+\cos 75^\circ\sin 7^\circ}{\cos(75^\circ-7^\circ)-\sin 75^\circ\sin 7^\circ}$

$=\frac{\sin 75^\circ\cos 7^\circ}{\cos 75^\circ\cos 7^\circ}$

$=\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$.

〔参考答案〕$2+\sqrt{3}$.

8.〔解析〕$(1+\tan\alpha)\cdot(1+\tan\beta)$

$=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\cdot\tan\beta$

$=1+\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta$

$=1+\tan 45^\circ(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$.

〔参考答案〕2.

9.〔解析〕$(5\sin\alpha+3\cos\beta)^2=16$　$(5\cos\alpha-3\sin\beta)^2=1$

$25\sin^2\alpha+30\sin\alpha\cos\beta+9\cos^2\beta=16$　①

$25\cos^2\alpha-30\cos\alpha\sin\beta+9\sin^2\beta=1$　②

①+②得

$30\sin(\alpha-\beta)=-17$　$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{17}{30}$

〔参考答案〕$-\frac{17}{30}$

10.〔解析〕$\because \operatorname{tg}\alpha=4\sqrt{3}$

$\therefore \sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{7}$

$\because \cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{14}\sqrt{3}$

$\therefore \cos\beta=\cos(\alpha+\beta-\alpha)$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha$

$=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5}{14}\sqrt{3}\times\frac{4}{7}\sqrt{3}$

$=\frac{1}{2}$

$\therefore \beta=\frac{\pi}{3}$

〔参考答案〕$\frac{\pi}{3}$

三、解答题

11.〔解析〕利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

〔参考答案〕(1) $\because \cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$,　①

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$.　②

①^2+②^2 得 $2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$,

即 $2+2\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{36}$,

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\frac{59}{72}$.

12.〔解析〕凑角：$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，同时注意讨论角的范围.

〔参考答案〕$\because \frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$,

$\therefore 0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$, $\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$,

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$,

$\therefore \sin 2\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)]$

$=\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$

$=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{56}{65}$.

13.〔解析〕利用方程的思想求解 a、b. 利用函数的思想求解 k 范围.

〔参考答案〕(1)由已知得$\begin{cases}a\sin\frac{\pi}{4}+b\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\ a^2+b^2=10\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$

(2)由已知得 $a\sin\frac{\pi}{3}+b\cos\frac{\pi}{3}=1$,

即 $b=2-\sqrt{3}a$

$\therefore -\sqrt{a^2+b^2}=k<0$

$\therefore k^2=a^2+b^2=a^2+(2-\sqrt{3}a)^2$

$=4\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$

$\therefore k^2\geqslant 1$.

又 $k<0$,

$\therefore k\leqslant -1$.

同步训练2　4.6　两角和与差的正弦、余弦、正切(2)

典型范例

〔例1〕

〔思路点拨〕由于 A、B、C 为三角形内角且成等差数列，出现特殊角 60°，再利用两角和的正切公式的变形.

〔规范解答〕

$\because A$、B、C 成等差数列，

$\therefore B=60°, A+C=120°, \frac{A+C}{2}=60°.$

又 $\because \tan\frac{A+C}{2}=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}}=\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$，

$\therefore \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}.$

〔例2〕

〔思路点拨〕欲证 α、β、γ 成等差 $\Leftrightarrow 2\beta=\alpha+\gamma$，根据已知角特点转化成 $\beta=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$，进而利用 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$ 公式去推证.

〔规范解答〕

$$\because \tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{\tan^3\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\tan^4\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{\gamma}{2}\left(1+\tan^2\frac{\gamma}{2}\right)}{\left(1-\tan^2\frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$=\frac{\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\tan^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{1}{2}\tan\gamma.$$

又 $\because 2\tan\beta=\tan\gamma$，

$\therefore \tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\tan\beta.$

$\because \alpha$、β、γ 均为锐角，

$\therefore \frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$ 为锐角，

$\therefore \frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}=\beta, \alpha+\gamma=2\beta$，

即 α、β、γ 成等差数列.

题型设计与训练

一、选择题

1.**〔解析〕**$\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}$，

$\therefore -\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$，

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，

$\therefore \alpha=24°, \beta=36°$ 时成立.

〔参考答案〕C.

2.**〔解析〕**$\sin119°\sin181°-\sin91°\sin29°=\cos29°\cos91°-\sin91°\sin29°=\cos(29°+91°)=\cos120°=-\frac{1}{2}.$

〔参考答案〕B.

3.**〔解析〕**$\sin\frac{\pi}{12}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}=-2\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}.$

〔参考答案〕B.

4.**〔解析〕**$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{3}{22}$$

〔参考答案〕C.

5.**〔解析〕**$\tan A\tan B>1$，

$\therefore \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}>1$，

$\therefore \cos A\cos B-\sin A\sin B<0$，

$\cos(A+B)<0.$

$\because A$、B 为锐角，

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形

〔参考答案〕A.

6.**〔解析〕**$\sin15°-\sin75°$

$=\sin(60°-45°)-\sin(30°+45°)$

$=\sin60°\cos45°-\cos60°\sin45°-\sin30°\cos45°-\cos30°\sin45°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

〔参考答案〕D.

二、填空题

7.〔解析〕$f(\alpha)=\cos(\alpha+10^\circ)\cos(\alpha+20^\circ)-\sin(\alpha+10^\circ)\cdot\sin(\alpha+20^\circ)=\cos(2\alpha+30^\circ)$

$\therefore f(\alpha)$最大值为 1.

〔参考答案〕1.

8.〔解析〕$\tan20^\circ+\tan40^\circ+\sqrt{3}\tan20^\circ\tan40^\circ$

$=\tan60^\circ(1-\tan20^\circ\tan40^\circ)+\sqrt{3}\tan20^\circ\tan40^\circ$

$=\sqrt{3}$.

〔参考答案〕$\sqrt{3}$.

9.〔解析〕由题意可知 $\sin A\cos B=\frac{1}{2}\sin C$

$\therefore \sin A\cos B=\frac{1}{2}\sin(A+B)$,

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

$\therefore \sin A\cos B-\cos A\sin B=0$,

$\therefore \sin(A-B)=0$,

$\therefore A=B$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

〔参考答案〕等腰三角形.

10.〔解析〕$5\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)-5\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+7\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+7\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$,

$\therefore 12\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\therefore \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=-6$.

〔参考答案〕-6.

三、解答题

11.〔解析〕凑角$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)$，再利用两角和的正切公式求值.

〔参考答案〕$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\tan\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

$$=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\tan\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\tan\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{7}$$

12.〔解析〕两次运用两角和的正切公式.

〔参考答案〕$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}>0$$

$\because \alpha$、β都为锐角，

$\therefore 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

$\tan(\alpha+2\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\beta]$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

又 $0<\alpha+2\beta<\pi$,

$\therefore \alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$.

同步训练 3　4.7　二倍角的正弦、余弦、正切(1)

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕$a^2=(\sin14^\circ+\cos14^\circ)^2=\sin^2 14^\circ+\cos^2 14^\circ+2\sin14^\circ\cdot\cos14^\circ=1+\sin28^\circ$

$b^2=(\sin16^\circ+\cos16^\circ)^2=\sin^2 16^\circ+\cos^2 16^\circ+2\sin16^\circ\cdot\cos16^\circ=1+\sin32^\circ$

$c^2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}=1+\sin30^\circ$

$\therefore a<c<b$.

〔规范解答〕$\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

〔例 2〕

〔思路点拨〕根据实际问题，适当设角、设$\angle POS=\alpha$，建立其与所求面积的三角函数关系，利用极值公式求解最大值.

〔规范解答〕

连结 OP，令$\angle POS=\alpha$.在 $\mathrm{Rt}\triangle POS$ 中，

$PS=OP\sin\alpha=\sin\alpha$，$OS=OP\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle QOR$ 中，

$OR=QR\cot60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}QR=\frac{\sqrt{3}}{3}RS=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$,

$RS=OS-OR=\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$,

$S_{PQRS}=PS\cdot RS=\sin\alpha\left(\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)$

$=\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}\sin2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1-\cos2\alpha}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(2\alpha+30°)-\frac{\sqrt{3}}{6}$,

∴当 $\sin(2\alpha+30°)1$，$2\alpha+30°=90°$，$\alpha=30°$时，

$S_{矩形PQRS最大}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

故当 P 为$\widehat{AB}$的中点时，矩形 $PQRS$ 的面积最大，最大值为$\frac{\sqrt{3}}{6}\text{m}^2$

〔例 3〕

〔思路点拨〕利用二倍角的正弦余弦公式的正用、逆用.

〔规范解答〕

（Ⅰ）∵$f(x)=\sin2x+\cos2x$，

∴$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1$.

（Ⅱ）∵$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$.

∵$\alpha\in(0,\pi)$，

∴$\sin\alpha>0$.

故 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

题型设计与训练

一、选择题

1.〔解析〕$\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}=-\left(\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

〔参考答案〕C.

2.〔解析〕∵θ是第三象限角，则 $2\theta\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$，

∴$\sin2\theta>0$，

$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta=\frac{5}{9}$，

则 $2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta=\frac{4}{9}$，

$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

∴$\sin2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

〔参考答案〕A.

3.〔解析〕$\sin15°\cdot\cos15°\cdot\cos30°=\frac{1}{2}\sin30°\cdot\cos30°=\frac{1}{4}\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

〔参考答案〕D.

4.〔解析〕由 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$得

$\cos2x=1-2\sin^2x=1-2\times\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$，

即 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，

另解：$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=f(\sin60°)=\cos120°=-\frac{1}{2}$.

〔参考答案〕A.

5.〔解析〕$\frac{1}{\sin10°}-\frac{\sqrt{3}}{\sin80°}=\frac{\sin80°-\sqrt{3}\sin10°}{\sin10°\cdot\sin80°}$

$=\frac{\cos10°-\sqrt{3}\sin10°}{\sin10°\cdot\cos10°}$

$=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10°\right)}{\frac{1}{2}\sin20°}$

$=\frac{4\sin20°}{\sin20°}=4$

〔参考答案〕C.

6.〔解析〕$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$的值域为$[-2,2]$

∴$-2\leqslant\frac{4m-6}{4-m}\leqslant2$，

解得$-1\leqslant m\leqslant\frac{7}{3}$.

〔参考答案〕C.

二、填空题

7.〔解析〕∵$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，

∴$\tan x=-\frac{3}{4}$，

∴$\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(\frac{-3}{4}\right)^2}=-\frac{24}{7}$.

〔参考答案〕$-\frac{24}{7}$

8.〔解析〕$(\tan5°-\cot5°)\cdot\frac{\sin20°}{1+\cos20°}$

$=\left(\frac{\sin5°}{\cos5°}-\frac{\cos5°}{\sin5°}\right)\cdot\frac{\sin20°}{1+\cos20°}$

$=\frac{\sin^25°-\cos^25°}{\sin5°\cdot\cos5°}\cdot\frac{\sin20°}{1+\cos20°}$

$=\frac{-\cos10°}{\frac{1}{2}\sin10°}\times\frac{2\sin10°\cdot\cos10°}{1+\cos20°}$

$=\frac{-4\cos^210°}{1-\cos20°}=\frac{-2(1+\cos20°)}{1+\cos20°}$

$=-2$

〔参考答案〕-2.

9.〔解析〕$y=5\sin x+\cos2x=5\sin x+1-2\sin^2x$

$=-2\sin^2x+5\sin x+1$

$=-2\left(\sin x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$

$\because -1\leqslant\sin x\leqslant 1$

$\therefore$ 当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=-2\left(1-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}=4$，

当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\min}=-2\left(-1-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}=-6$，

$\therefore y$ 的值域为$[-6,4]$.

〔**参考答案**〕$[-6,4]$.

10.〔**解析**〕$\because \sqrt{1+\sin\theta}=a>0$，即 $\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|=a>0$，

$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$，$a$ 的符号不确定，

甲$\nRightarrow$乙，乙$\nRightarrow$甲，

$\therefore$甲是乙的既不充分也不必要条件.

〔**参考答案**〕既不充分也不必要.

三、解答题

11.〔**解析**〕应用正余弦的二倍角公式可得.

〔**参考答案**〕由 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$，得 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，

$\cos2\alpha+3\sin^2\alpha$

$=\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$\frac{1+2\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{11}{10}$.

12.〔**解析**〕利用转化的思想，把所求式子转化成含已知式 $\tan\theta$，进而求解.

〔**参考答案**〕原式$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$\because \tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-2\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}\tan^2\theta-\tan\theta-\sqrt{2}=0$，

解得 $\tan\theta=\sqrt{2}$或 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because \frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$，

$\therefore \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去），

故原式$=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-3$.

同步训练4　4.7　二倍角的正弦、余弦、正切(2)

名题导例

〔例 1〕

〔**思路点拨**〕利用倍角公式对原式进行化简，化为含已知角$\frac{\pi}{4}+\alpha$ 的某一三角函数值. 再对角的范围进行讨论，从而求值.

〔**规范解答**〕

原式$=\frac{2\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}{\cos x-\sin x}$

$=\frac{\sin2x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$=\frac{-\cos2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$=\frac{\left[1-2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$=\frac{\left[1-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\frac{3}{5}}=\frac{7}{15}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$\because \frac{17}{12}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$，

$\therefore \frac{5}{3}\pi<\frac{\pi}{4}+x<2\pi$，

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=-\frac{4}{5}$，

$\therefore$原式$=\frac{7}{15}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{28}{75}$.

〔例 2〕

〔**思路点拨**〕三角变换主要是角的变换.

〔**规范解答**〕

解法一：$\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan2\alpha-\tan\beta}{1+\tan2\alpha\tan\beta}$。

α 为第二象限的角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

$\therefore \tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$，$\beta$ 为第一象限的角，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，

$\therefore \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{12}{13}$，$\tan\beta=\frac{12}{5}$，

$$\therefore \tan(2\alpha-\beta)=\frac{-\frac{24}{7}-\frac{12}{5}}{1+\left(-\frac{24}{7}\right)\times\frac{12}{5}}=\frac{204}{253}.$$

解法二：α 为第二象限角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，$\beta$ 为第一象限角，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，

$\therefore \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{12}{13}$.

故 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{25}$，

$\sin(2\alpha-\beta)=\sin2\alpha\cos\beta-\cos2\alpha\sin\beta=-\frac{204}{325}$.

$\cos(2\alpha-\beta)=\cos2\alpha\cos\beta+\sin2\alpha\sin\beta=-\frac{253}{325}$，

$\therefore \tan(2\alpha-\beta)=\frac{\sin(2\alpha-\beta)}{\cos(2\alpha-\beta)}=\frac{204}{253}$.

〔例 3〕

〔思路点拨〕本题主要考查了二倍角及两角和公式.

〔规范解答〕

（Ⅰ）因为 $\tan\frac{\alpha}{2}=2$，所以 $\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times2}{1-4}=-\frac{4}{3}$，

$$\therefore \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{-\frac{4}{3}+1}{1+\frac{4}{3}}=-\frac{1}{7}.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ），$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，

$$\therefore \frac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-2\cos\alpha}=\frac{6\tan\alpha+1}{3\tan\alpha-2}=\frac{6\left(-\frac{4}{3}\right)+1}{3\left(-\frac{4}{3}\right)-2}=\frac{7}{6}.$$

题型设计与训练

一、选择题

1.〔解析〕$\sqrt{2-\sin^2 2+\cos4}=\sqrt{2-\sin^2 2+1-2\sin^2 2}$

$=\sqrt{3-3\sin^2 2}$

$=\sqrt{3\sin^2 2+3\cos^2 2-3\sin^2 2}$

$=\sqrt{3\cos^2 2}=\sqrt{3}|\cos2|$

$\because \cos2<0$，

$\therefore \sqrt{3}|\cos2|=-\sqrt{3}\cos2$.

〔参考答案〕D.

2.〔解析〕$\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos\frac{\theta}{2}>0$

$\therefore \cos\frac{\theta}{2}<0$，

$$\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\left|\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right|}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=-1.$$

〔参考答案〕B.

3.〔解析〕$\sin6^\circ\cdot\cos24^\circ\cdot\sin78^\circ\cdot\cos48^\circ$

$=\sin6^\circ\cdot\cos12^\circ\cdot\cos24^\circ\cdot\cos48^\circ$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin12^\circ\cdot\cos12^\circ\cdot\cos24^\circ\cdot\cos48^\circ}{\cos6^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\sin24^\circ\cdot\cos24^\circ\cdot\cos48^\circ}{\cos6^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{16}\sin96^\circ}{\cos6^\circ}=\frac{1}{16}.$$

〔参考答案〕A.

4.〔解析〕$\because \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$.

又 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$，

$\therefore \sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{4}{9}\sqrt{5}$，$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$

$=\frac{7\sqrt{5}}{27}$，

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=-\frac{239}{729}$.

〔参考答案〕D.

5.〔解析〕$f(\alpha)=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{4}{\sin2\alpha}$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{4}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$.

〔参考答案〕D.

6.〔解析〕$\because \cot\theta=3$，

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{3}$，

$$\therefore \cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{1+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{1+\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}+1}=\frac{6}{5}.$$

〔参考答案〕D.

7.〔解析〕$\cos x=\frac{4}{5}$，

$\because x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,

$\therefore \sin x=-\frac{3}{5}$,

则 $\tan x=-\frac{3}{4}$,

$\therefore \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=-\frac{3}{2}\times\frac{16}{7}=-\frac{24}{7}$.

〔参考答案〕D.

8.〔解析〕设等腰三角形的底角为 α,则 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\therefore 1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{2}$,$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$.

$\because 0<2\alpha<\pi$,

$\therefore 2\alpha=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$,

$\therefore$ 顶角为 $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$ 或 $\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{\pi}{6}$.

〔参考答案〕$\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$.

9.〔解析〕$\tan x=2$,则 $\frac{\sin x}{\cos x}=2$,

$\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$,

$\therefore \cos^2 x=\frac{1}{5}$,$2\cos^2 x-1=-\frac{3}{5}=\cos 2x$,

$\therefore f(2)=-\frac{3}{5}$.

〔参考答案〕$-\frac{3}{5}$.

10.〔解析〕$\because \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角,

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$,

$\therefore \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$,则 $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

即 $\begin{cases}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}\\ \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{-\sqrt{10}}{10}\\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{cases}$,

$\therefore \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-\frac{1}{3}$.

另解 $\because \cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$,

$\therefore \sin\alpha=-\frac{3}{5}$

$\therefore \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$.

〔参考答案〕$-\frac{1}{3}$.

11.〔解析〕$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{3}$,则 $\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\frac{1}{3}$,

$\therefore \tan\alpha=2$,$\sin\alpha=2\cos\alpha$,

则 $\sin\alpha=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\because \cos^4\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos^4\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

$=\cos^4\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

$=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)$,

则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos 2\alpha-\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin 2\alpha=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

〔参考答案〕$\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

三、解答题

12.〔解析〕利用二倍角余弦公式和"切割化弦"的思想.

〔参考答案〕$\frac{1+\cos 2\alpha}{\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+(2\cos^2\alpha-1)}{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$

$=\frac{2\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}$

$=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$

$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

13.〔解析〕利用二倍角公式,同时利用诱导公式进行角之间的转化.

〔参考答案〕$\sin\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

$\therefore \cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=-\frac{1}{2}$

即 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \cos 4x=1-2\sin^2 2x=\frac{1}{2}$