名师解读高考
专家透析命题

2005高考总复习最新用书

教材精析精练

数学

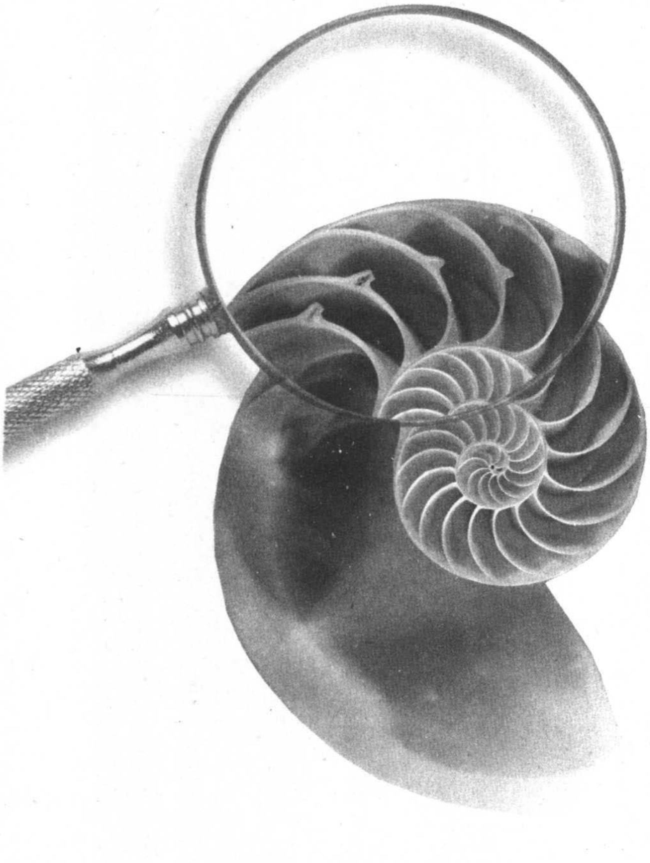
人民教育出版社 审订
延边教育出版社 出版

名师解读高考
专家透析命题

2005高考**总复习**最新用书

教材精析精练

数学



人民教育出版社 审订
延边教育出版社 出版

□顾　　问：顾振彪　　蔡上鹤　　龚亚夫
□策　　划：崔炳贤
□执行策划：矫玉萍　　黄俊葵
□丛书主编：周益新
□本册主编：项中心
□编　　著：高华文　　姚水泉　　秦祖梁　　饶　维　　钟开基
陈建华　　陈万银　　吕元炎　　吴克明　　易汉桃
刘弘辉　　王学家　　项中心　　李　锋　　吴慧娟
王席良　　祁泽旺　　汤文球　　李　娟　　赵正良
黄中锋　　刘　霞　　曹　勇　　尉利英　　项进生
李　群　　王新柱　　余汉雄　　方　震　　李四海
□责任编辑：兰　君
□封面设计：无　若
□版式设计：无　若

2005 高考总复习最新用书
《教材精析精练》　数学

审　　订：人民教育出版社
出版发行：延边教育出版社
地　　址：吉林省延吉市友谊路 11 号
邮　　编：133000
网　　址：http://www.topedu.net.cn
电　　话：0433－2913975　010－82608051
传　　真：0433－2913971　010－82608051
排　　版：北京精美实华图文制作中心
印　　刷：北京瑞兴印刷有限公司
开　　本：787×1092　16 开本
印　　张：18.25
字　　数：498 千字
版　　次：2003 年 7 月第 1 版　2004 年 5 月第 2 版
印　　次：2004 年 5 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7－5437－5146－1/G·4652
定　　价：21.50 元

前言

由人民教育出版社、延边教育出版社联合出版的《教材精析精练》率先与新课程、新理念接轨，融入自主、合作、探究学习的全新学习理念，一举成为全国优秀教辅精品图书。两年来，全国几千所中学教学实践的检验和反馈表明，该丛书栏目新颖、版式活泼、讲解透彻、科学性强、题目灵活、准确率高、题量适中、能帮助学生进行高品质的有效学习，在高效的学习中使能力与成绩迅猛提升！

为了使《教材精析精练》发挥“第二教材”独特的功能，人民教育出版社、延边教育出版社约请湖北黄冈市、江苏启东市、无锡市等地全国著名重点中学的国内教育专家、特级教师重新修订了《教材精析精练》高考复习用书（供 2005 年高考复习专用）。这套丛书突出的特点是：

权威性——以国家教育部颁布的新教学大纲为纲，以人民教育出版社最新高中教材和国家教育部考试中心颁布的《考试大纲》为依据，人民教育出版社各学科编辑室指导全书编写工作并审定书稿。

新颖性——根据近两年高考试题的命题思路和变化趋势，精编富有启发性、针对性的典型题目和原创新题，以现实问题为立意中心，重视命题背景材料和设问角度的新颖性，注重考查学生掌握各学科主干知识以及分析问题、解决问题的思维过程和方法技巧。

前瞻性——针对 2004 年全国高考各学科命题的特点——加强能力和素质的考查，强调知识与现实生产、生活的实际应用，重视测试思维的流畅性和独创性，预测 2005 年高考可能命题方向，并进行有针对性的系列训练。

实用性——高考答题取胜的关键要做到“快、准、活”三个字。思维节奏快、行为动作快；知识转化为能力的内涵与实质要准确；解题的方法和手段要灵活多样。为了达到上述目的，丛书编写者明确提出每次练习控制的答题时间，比照高考同类试题所需时间，对学生解题速度提出科学、规范的要求，题题给定分值，便于教师测评，并可用于学生之间解题能力的评估。

科学性——学生能否在高考复习中收到最大效益，关键在于掌握思维方法技巧规律和具有科学性、准确性的针对性训练题。本丛书一课一练，每课时考点对解题规律、易错规律、思维拓展、迁移、延伸规律进行系统总结。编者在命题设计过程中强调题目精选精编，原创新题、活题，突出以“能力立意”，例题、习题答案严谨、准确，科学地对学生进行思维技巧的测试和灵活地运用知识对社会热点、焦点问题以及生产、生活中的现实问题进行阐释、评价，培养和提高学生思维的敏捷性、科学性、深刻性

和发散性。

这套丛书在策划、组稿、编写、审读整个过程中，得到了人民教育出版社和延边教育出版社的支持和指导，在此一并致谢。

思维是智力的核心，思维更是能力的体现。思维的表现特征是素质教育和创新教育重要的研究课题。在我国，对高三毕业班学生进行自主学习、发现知识、寻找学习规律、科学的系统地进行高考模式改革、有针对性的思维技巧训练，是一种新的教学尝试。尽管丛书许多内容是作者长期在高考备考一线教学过程中潜心研究的心得和成果，但仍需得到完善，不当之处，恳请专家、读者指正。

丛书主编：周益新

2004 年 5 月

目录

目录

课时考点 1 集合的概念及运算

高考命题方向

高考中主要考查集合的有关概念、集合语言表达、集合的运算等知识，以及集合语言和集合思想在各类数学问题中的应用.

知识梳理·拓展迁移

1. 集合的基本概念及运算性质

(1)集合的概念：由一些确定对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象叫做这个集合的元素.

(2)子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作“A 包含于 B”(或 B 包含 A).

(3)交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的交集，记作 $A\cap B$，即$A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$. $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

(4)并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A,或\ x\in B\}$. $A\cup B=B\cup A$，$A\cup\varnothing=A$.

(5)补集：已知全集 U，集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 U 中的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U,且\ x\notin A\}$. $A\cup(\complement_U A)=U$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.(**解题技巧**)

2. **集合的特性**：确定性、互异性、无序性.

3. **集合的表示**

(1)常用的表达方法：列举法、描述法和图示法.

(2)常用数集的表示符号：

$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$(自然数集)，$\mathbf{Z}$(整数集)，$\mathbf{Q}$(有理数集)，$\mathbf{R}$(实数集)，$\mathbf{C}$(复数集)等.

典例精析·探究规律

例 1 用适当的方法表示下列集合：

(1)方程组$\begin{cases}2x-3y=14\\3x+2y=8\end{cases}$的解集；

(2)1 000 以内被 3 除余 2 的正整数所组成的集合；

(3)直角坐标平面上在第二象限内的点所组成的集合；

(4)所有正方形；

(5)直角坐标平面上在直线 $x=1$ 和 $x=-1$ 的两侧的点所组成的集合.

【解题规律】

用描述法表示集合时，若需要多层次描述属性时，可选用逻辑连结词“且”与“或”等连结(如(3)和(5))；若描述部分出现元素记号以外的字母时，要对新字母说明其含义或指出其取值范围(如(2))

【解析】所谓适当的表示方法，就是较简单、较明了的表示方法. 由于方

程组$\begin{cases}2x-3y=14,\\3x+2y=8\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=4,\\y=-2,\end{cases}$故(1)宜用列举法；(2)中尽管是有限集，但由于它的元素个数较多，所以用列举法表示是不明智的，故用描述法；(3)和(5)也宜用描述法；而(4)则宜用列举法.

【解答】(1)$\{(4,2)\}$；(2)$\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{N}$且$x<1\ 000\}$；(3)$\{(x,y)|x<0$且$y>0\}$；(4){正方形}；(5)$\{(x,y)|x<-1$或$x>1\}$.

例2 已知函数$f(x)=x^2+ax+b(a、b\in\mathbf{R})$，且集合$A=\{x|x=f(x)\}$，$B=\{x|x=f[f(x)]\}$.

(1)求证：$A\subseteq B$；

(2)当$A=\{-1,3\}$时，用列举法表示B.

【解题规律】

要证明$A\subseteq B$，即要证对$x\in A$，则$x\in B$即可；要证$A\subsetneqq B$，则要证明$x\in A$，必有$x\in B$，且存在$b\in B$，但$b\notin A$.

【解析】按定义可证(1)，解答(2)的关键是由$A=\{-1,3\}$得出$f(x)=x^2-x-3$.

【解答】(1)任取$x\in A$，则$x=f(x)$，从而$x=f[f(x)]$，

$\therefore x\in B$，$\therefore A\subseteq B$.

(2)$\because A=\{-1,3\}$，$\therefore -1=f(-1)$，$3=f(3)$，

即$-1=1-a+b$，$3=9+3a+b$，$\therefore a=-1$，$b=-3$，

$\therefore f(x)=x^2-x-3$，由题意得　$x^2-2x-3=0$或$x^2=3$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=-1$，$x_3=\sqrt{3}$，$x_4=-\sqrt{3}$，$\therefore B=\{3,-1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$.

例3 设$A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若$A\cap B=B$，求$a$的值.

【解题规律】

一般地，对含有参数的集合问题，应先转化，再展开讨论. 注意："空集"是否符合题意，仍应讨论.

【解析】$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.

【解答】$A=\{0,-4\}$. 若$B\neq\varnothing$，则$A\cap B=B\neq\varnothing$，则B是A的非空子集，且其中含有A的元素.

设$0\in B$，则$a^2-1=0$，$a=\pm1$. $a=-1$时，$B=\{0\}$符合题意.

$a=1$时，$B=\{0,-4\}$也符合题意.

设$-4\in B$，则$a=1$或$a=7$.

当$a=7$时，$B=\{-4,-12\}$不合题意.

当$B=\varnothing$时，即$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$无实数解，

此时$\Delta<0$，解得$a<-1$.

综合可得$a=1$或$a\leqslant-1$.

例4 若关于x的方程$x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$中至少有一个方程有实根，求实数a的取值范围.

【解题规律】

(1)不妨考虑问题的反面，即若三个方程都无实根，求a的取值范围. 则有：

$$\begin{cases}16a^2-4(3-4a)<0,\\(a-1)^2-4a^2<0,\\4a^2+8a<0.\end{cases}$$

解得$D=\left\{a\left|-\frac{3}{2}<a<-1\right.\right\}$.

【解析】先求每个方程有实数解时a的取值范围，再取其并集即可.

【解答】(1)若方程$x^2+4ax-4a+3=0$有实根，则$\Delta_1=16a^2-4(3-4a)\geqslant0$，解得$A=\left\{a\left|a\geqslant\frac{1}{2}\text{或}a\leqslant-\frac{3}{2}\right.\right\}$.

(2)若$x^2+(a-1)x+a^2=0$有实根，则$\Delta_2=(a-1)^2-4a^2\geqslant0$，

解得 $B=\left\{a\,\middle|\,-1\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}\right\}$.

(3)若 $x^2+2ax-2a=0$ 有实根，则 $\Delta_3=4a^2+8a\geqslant0$，解得 $C=\{a|a\geqslant0$ 或 $a\leqslant-2\}$.

综合(1)(2)(3)可知，满足题意的 a 的取值范围是：

$A\cup B\cup C=\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-\frac{3}{2}\text{或 }a\geqslant-1\right\}$.

故三个方程至少有一个有实根的 a 的取值范围为 D 的补集：

$\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-\frac{3}{2}\text{或 }a\geqslant-1\right\}$.

(2)数学的文字语言中含有“至少”、“或”等则对应着集合的并集；而“且”、“都”、“同时”等则对应着集合的交集. 另外，在解题时的要注意“正难则反”的原则.

考点测试·新题预测

测试时间 60 分钟　测试分值 75 分

一、选择题(每小题 5 分，共 30 分)

1. 定义 $A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$，若 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{1,4,8\}$，则 $A-B$ 等于　(　　)

A. $\{4,8\}$　B. $\{1,2,6,10\}$

C. $\{1\}$　D. $\{2,6,10\}$

2. 已知集合 $A\subsetneqq\{2,3,7\}$，且 A 中至多有一个奇数，则这样的集合共有　(　　)

A. 2 个　B. 4 个　C. 5 个　D. 6 个

3. 设全集 $U=Z$，$A=\{x|x<5,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x\leqslant2,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_UA$ 与 $\complement_UB$ 的关系是　(　　)

A. $\complement_UA\supsetneqq\complement_UB$　B. $\complement_UA=\complement_UB$

C. $\complement_UA\subseteq\complement_UB$　D. $\complement_U(\complement_UA)\subsetneqq\complement_U(\complement_UB)$

4. 设全集 $U=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x,y)|y-3=x-2\}$，那么 $\complement_UM\cap N$ 是　(　　)

A. $\varnothing$　B. $\{2,3\}$

C. $\{(x,y)|y-3\neq x-2\}$　D. $\{(2,3)\}$

5. 若集合 A 和 B 各含 6 个元素，$A\cap B$ 含有 3 个元素，C 同时满足两个条件：①$C\subset A\cup B$ 且 C 中含有 3 个元素；②$C\cap A\neq\varnothing$，则这样的集合 C 的个数是　(　　)

A. 82　B. 83　C. 84　D. 219

6. (2003 年合肥市模拟试题)集合 $A=\{x||x-3|<5\}$，$B=\{x|x<a\}$，且 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围是　(　　)

A. $a\geqslant-5$　B. $a>-5$

C. $a>8$　D. $a\geqslant8$

二、填空题(每小题 4 分，共 8 分)

7. 集合 $P=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$Q=\{x|ax-1=0\}$，若 $P\supseteq Q$，则实数 a 的值为______.

8. (2001 年上海高考题)设集合 $A=\{x|2\lg x=\lg(8x-15),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\cos\frac{x}{2}>0,x\in\mathbf{R}\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为______个.

三、解答题(共 37 分)

9. (本小题满分 12 分)设 A 是数集，满足 $a\in A\Rightarrow\frac{1}{1-a}\in A$，且 $1\notin A$.

(1)若 $2\in A$，求 A；

(2)证明：若 $a\in A$，则 $1-\frac{1}{a}\in A$.

10. (本小题满分 12 分)在实数范围内，已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

11. (本小题满分 13 分)已知集合 $A=\{x|x^2-2x-8=0\}$，$B=\{x|x^2+ax+a^2-12=0\}$，求满足 $B\subseteq A$ 的 a 值组成的集合.

课时考点 2 简易逻辑

高考命题方向

由于简易逻辑主要是以基础课的形式出现在教材中，高考中可能以小题形式进行考查，考查对命题的理解、充要条件及等价转换的思想和反证法这些重要的数学逻辑方法.

知识梳理·拓展迁移

1. 解有关逻辑联结词问题应注意以下知识的应用

(1)命题：初中数学中命题的概念为"判断一件事情的语句". 高中教材中定义为"可以判断真假的语句". 其实质是一样的.

(2)逻辑联结词："或"、"且"、"非"等词叫做逻辑联结词.

(3)简单命题：不含逻辑联结词的命题叫做简单命题. 简单命题常用小写拉丁字母 $p,q,r,s\cdots$ 表示.

(4)复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题. 复合命题由"p 且 q"，"p 或 q"，"非 p"构成.

(5)判断复合命题的真假，可根据真值表. 一般规律是：

①"非 p"形式复合命题的真假与 p 的真假相反.

②"p 且 q"形式复合命题当 p 与 q 同真时为真，其他情况时为假.

③"p 或 q"形式复合命题当 p 与 q 同时为假时为假，其他情况为真.(**解题规律**)

2. 解有关四种命题的题目注意应用如下知识

(1)四种命题

一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结构，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定. 于是四种命题的形式为：

原命题：若 p 则 q；逆命题：若 q 则 p；否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

(2)四种命题的关系

①原命题 $\Leftrightarrow$ 逆否命题. 其关系是相互的，原命题是逆否命题的逆否命题，它们具有相同的真假性.

②逆命题 $\Leftrightarrow$ 否命题. 它们之间也互为逆否关系，因此具有相同的真假性.

③原命题正确，逆命题不一定正确. 它们之间的真假性无关.

(3)反证法　用反证法证明命题的一般步骤为：

①假设命题的结论不成立，即假设命题结论的反面成立.

②从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾.

③由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.(**解题方法**)

3. 解有关充要条件的问题应注意应用如下知识

(1)充要条件：命题 $A\Rightarrow B$ 成立，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件. 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，则 A 是 B 的充分且必要条件，简称充要条件.

(2)"A 是 B 的充分条件"与"B 是 A 的必要条件"是等价的，它们是同一个逻辑关系"$A\Rightarrow B$"的不同表达.

(3)"A是B的充分条件"亦可说成"B的充分条件是A";"B是A的必要条件"亦可说成"A的必要条件是B";"A是B的充要条件"同时"B也是A的充要条件".

典例精析·探究规律

例1 写出由"p:$-\sqrt{2}\in \mathbf{Q}$,q:$-\sqrt{2}\in \mathbf{R}$"构成的"p或q"、"p且q"、"非p"形式的复合命题,并判断其真假.

【解析】已知命题p和q,写出"p或q"、"p且q"、"非p"形式的复合命题时,应注意语言的合理化、通俗化,特别是写"p或q"和"p且q"形式的复合命题时更应引起注意,判断其真假时,先准确判断p、q的真假,再运用真值表来判断复合命题的真假.

【解答】"p或q":$-\sqrt{2}\in \mathbf{Q}\cup\mathbf{R}$,"$p$且$q$":$-\sqrt{2}\in \mathbf{Q}\cap\mathbf{R}$,

"非p":$-\sqrt{2}\notin \mathbf{Q}$."$p$或$q$"为真,"$p$且$q$"为假,"非$p$"为真。

【解题规律】

(1)"非p"形式的复合命题的真假与p的真假相反;

(2)"p且q"形式的复合命题,当p与q同为真时为真,其余均为假;

(3)"p或q"形式的命题,当p与q同为假时为假,其余均为真.

例2 已知a、$b\in \mathbf{R}$,若$a+b>1$,则a、b之中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.试证明之.

【解析】用反证法证明.

【解答】假设a、b均小于$\frac{1}{2}$,

即$a<\frac{1}{2}$且$b<\frac{1}{2}$,则$a+b<\frac{1}{2}+b<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,

即$a+b<1$与已知$a+b>1$相矛盾.故假设不成立.

所以a、b中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

【解题规律】

关于反证法证明命题"若p则q"时,其大致过程是:否定欲证结论,假定其反面成立,进行推理,推出矛盾,于是说明反面不能成立,则原结论当然成立.

例3 已知p:$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,$q$:$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,若$\neg p$是$\neg q$的必要而不充分条件,求实数$m$的取值范围.

【解析】先写出$\neg p$和$\neg q$.然后由$\neg q\Rightarrow\neg p$,但$\neg p\not\Rightarrow\neg p$,求得$m$的取值范围.注意利用元素的特性,并结合数轴观察.

【解答】由$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$,得$1-m\leqslant x\leqslant 1+m(m>0)$.

所以"$\neg q$":$A=\{x\in \mathbf{R}|x>1+m$或$x<1-m,m>0\}$.

由$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$得$-2\leqslant x\leqslant 10$,

所以"$\neg p$":$B=\{x\in \mathbf{R}|x>10$或$x<-2\}$.

由"$\neg p$"是"$\neg q$"的必要而不充分条件,知:$B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\1-m\geqslant -2\\1+m\leqslant 10\end{cases}$

$\Rightarrow 0<m\leqslant 3$为所求.

【解题规律】

本例"$\neg p$"是"$\neg q$"的必要而不充分条件,即"$\neg q$"$\Rightarrow$"$\neg p$",但"$\neg p$"$\not\Rightarrow$"$\neg q$".可等价转换为"$p\Rightarrow q$",但"$q\not\Rightarrow p$",即p是q的充分而非必要条件.实际上,若原命题为"若$\neg p$,则$\neg q$",其逆否命题为"若q,则p".

考点测试·新题预测

测试时间60分钟　测试分值75分

一、选择题(每小题5分,共30分)

1. 命题"方程$|x|=1$的解是$x=\pm1$"中,使用逻辑联结词的情况是　(　　)

A. 没使用逻辑联结词

B. 使用了逻辑联结词"或"

C. 使用了逻辑联结词"且"

D. 使用了逻辑联结词"非"

2. 一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中　(　　)

A. 真命题的个数一定是奇数

B. 真命题的个数一定是偶数

C. 真命题的个数可能是奇数也可能是偶数

D. 上述判断都不正确

3. 已知集合A,B,则"$A\subseteq B$"是"$A\cap B=A$"的　(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 若命题p的逆命题是q,命题p的否命题是r,则q是r的　(　　)

A. 逆命题　　B. 逆否命题

C. 否命题　　D. 以上判断都不对

5. 设$a,b\in\mathbf{R}$,则不等式$a>b$与$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$都成立的充要条件是　(　　)

A. $ab>0$　　B. $a>0,b<0$

C. $ab<0$　　D. $ab\neq0$

6. 若$a,b\in\mathbf{R}$,则使$|a|+|b|>1$成立的充分不必要条件是　(　　)

A. $|a+b|\geqslant1$　　B. $|a|\geqslant\frac{1}{2}$且$|b|\geqslant\frac{1}{2}$

C. $a\geqslant1$　　D. $b<-1$

二、填空题(每小题4分,共8分)

7. 命题"若$ab=0$,则$a=0$或$b=0$"的逆否命题是________________.

8. 设$a、b、c\in\mathbf{R}$,则$b^2-4ac<0$是二次不等式$ax^2+bx+c>0$恒成立的______________条件.

三、解答题(共37分)

9. (本小题满分12分)分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题,并指出此复合命题的真假.

(1)中国在外交政策上,既不欺压弱小国家又不畏惧超级大国;

(2)$A\not\subseteq A\cup B$.

10. (本小题满分12分)已知下列三个方程:$x^2+4ax-4a+3=0$,$x^2+(a-1)x+a^2=0$,$x^2+2ax-2a=0$中至少有一个方程有实根,求实数a的取值范围.

11. (本小题满分13分)求证:关于x的方程$ax^2+bx+c=0$有一根为1的充要条件是$a+b+c=0$.

课时考点3 函 数

高考命题方向

高考中主要考查映射的定义,象与原象,能根据函数三要素判定两个函数是否为同一函数,理解函数符号的意义,掌握函数的三种表示方法,并注意分段函数和函数定义域与值域的求法.高考中一般也不直接考查定义域和值域,往往是通过函数性质或函数的应用来考查的.

知识梳理·拓展迁移

1.映射

(1)映射的定义:设 A、B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有惟一的元素和它对应,这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f:A\to B$.

(2)象与原象:如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射,那么,和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象,a 叫做 b 的原象.

2.函数

(1)函数的定义:设 A,B 都是非空的数的集合.f 是从 A 到 B 的一个对应法则,那么 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数,记作:$y=f(x)$,

其中 $x\in A$,$y\in B$.原象集合 A 叫做函数 $f(x)$的定义域,象集合 C 叫做函数 $f(x)$的值域.显然,$C\subseteq B$.

(2)构成函数概念的三要素:

①三要素是指定义域、对应法则、值域.

②三要素中只要有一个不同,则两个函数就是不同的函数.

③三要素中都相同的两个函数是同一个函数.

3.函数的定义域

函数的定义域是自变量取值的集合,它与函数是一个不可分割的整体,没有定义域的函数是不存在的.虽然函数的定义域是客观存在的,也是完全确定的,但是很多问题常常不是在给定函数对应关系的同时就明确指出了函数的定义域,这就产生了求函数定义域的问题.与函数定义域有关的问题主要是如下四种基本类型:

(1)给定函数的表达式,求函数的定义域;

(2)求有限个函数的四则运算得到的函数的定义域;

(3)求较简单的复合函数的定义域;

(4)给定函数的定义域,讨论其中参数的取值范围.

4.函数的值域

函数的值域是函数值的集合,它的确定取决于函数的定义域和对应法则.求函数值域的主要方法有:配方法、判别式法、不等式法、换元法、反函数法、利用函数的单调性和有界性、数形结合等.**(解题技巧)**

典例精析·探究规律

例1 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$，$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，且 $a\in\mathbf{N}$，$k\in A$，$y\in B$，映射 $f:A\to B$，使 B 中元素 $y=3x+1$ 与 A 中元素 x 对应，求 a 及 k 的值.

【解析】根据映射的定义，利用对应法则 f 的意义列方程可求 a 及 k 的值.

【解答】$\because$ B 中元素 $y=3x+1$ 和 A 中元素 x 对应，

$\therefore$ A 中元素 1 的象是 4，2 的象是 7，3 的象是 10，

即 $a^4=10$ 或 $a^2+3a=10$，

$\because$ $a\in\mathbf{N}$，$\therefore$ $a^4=10$ 应舍去，

由 $a^2+3a-10=0$，解得 $a=2$（$a=-5$ 舍去），

$\because$ k 的象是 a^4，$\therefore$ $3k+1=2^4$，$\therefore$ $k=5$.

【解题规律】

判断对应是否为映射时，应抓住两点：(1)A 中元素必须都有象且惟一；(2)B 中元素不一定都有原象，并且 A 中不同元素在 B 中可以有相同的象.

例2 求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{1}{2-|x|}+\sqrt{x^2-1}$；(2)$y=\dfrac{x^2}{\lg(4x+3)}+(5x-4)^0$；

(3)$y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

【解析】将函数有意义的条件全部列在一起，然后解不等式组.

【解答】(1)由 $\begin{cases}2-|x|\neq 0,\\ x^2-1\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\neq\pm 2,\\ x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant 1.\end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)由 $\begin{cases}4x+3>0,\\ 4x+3\neq 1,\\ 5x-4\neq 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x>-\dfrac{3}{4},\\ x\neq -\dfrac{1}{2},\\ x\neq\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域为 $\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{5}\right)\cup\left(\dfrac{4}{5},+\infty\right)$.

(3)由 $\begin{cases}25-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5,\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbf{Z})\end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域为 $\left[-5,-\dfrac{3}{2}\pi\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},5\right]$.

【解题规律】

(1)给定函数的解析式，求函数的定义域的依据是基本代数式要有意义，如分式的分母不等于零、偶次根式的被开方数为非负数、零指数幂的底数不为零、对数的真数大于零且底数为不等于 1 的正数以及三角函数的意义等.

(2)求函数的定义域往往归结为解不等式组的问题. 在解不等式组时要细心，取交集时可借助数轴，并且要注意端点值或边界值.

例3 求下列函数的值域：

(1)$y=\dfrac{x-4}{x+1}$；　　(2)$y=-x^2-2x+3(-5\leqslant x\leqslant 2)$；

(3)$y=x+\sqrt{1-2x}$；　　(4)$y=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-5x+6}$.

【解题规律】

观察法是根据完全平方数、算术根、绝对值都是非负数的特点，以及函数的图象、性质等，得到正确结果. 换元法是用变量代

【解析】(1)(2)可用观察法,(3)用换元法,(4)用判别式法.

【解答】(1)∵ $y=1-\frac{5}{x+1}$,且$\frac{5}{x+1}\neq 0$,

∴ 函数值域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,

(2)∵ 抛物线 $f(x)=y=-(x+1)^2+4$,其顶点横坐标 $x=-1\in[-5,2]$,且 $f(-1)=4$,$f(-5)=-12$,$f(2)=-5$,∴ 函数的值域为$[-12,4]$.

(3)设 $\sqrt{1-2x}=t\geqslant 0$,则 $x=\frac{1-t^2}{2}$,∴ $y=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$ 为二次函数,当 $t=1(x=0)$时,$y_{\max}=1$,∴ 函数的值域为$(-\infty,1]$.

(4)由已知函数得$(y-1)x^2+(2-5y)x+6y+1=0$ ①.

当 $y\neq 1$ 时,方程①有实根,∴ $\Delta=y^2+8\geqslant 0$,

∴ $y\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,又当 $x=\frac{7}{3}$时,$y=1$.

∴ 函数的值域是 $\mathbf{R}$.

换的方法达到降次或化无理式为有理式、化分式为整式的目的,但代换必须是等价的.判别式法是将函数转化为 x 的二次方程,而将 y 看做系数,因为方程有实数解,所以由判别式不小于零,求得函数的值域.求函数的值域应特别注意函数的定义域.

例 4 已知函数 $f(x)=\log_3\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,2]$,求 m、n 的值.

【解析】这是一道关于函数定义域和值域的逆向问题.从何入手?我们可以把注意力放在对数的真数上.

【解答】显然,函数 $u=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.值域由题设知应为$[1,9]$.由 $u=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$,得$(u-m)x^2-8x+(u-n)=0$.

∵ $x\in\mathbf{R}$,且设 $u-m\neq 0$,∴ $\Delta=(-8)^2-4(u-m)(u-n)\geqslant 0$,

即 $u^2-(m+n)u+(mn-16)\leqslant 0$.

由 $1\leqslant u\leqslant 9$ 知,关于 u 的一元二次方程 $u^2-(m+n)u+(mn-16)=0$ 的两根为 1 和 9,由韦达定理,得$\begin{cases}m+n=1+9,\\ mn-16=1\times 9.\end{cases}$ 解得 $m=n=5$.

若 $u-m=0$,即 $u=m=5$,对应 $x=0$,符合条件,∴ $m=n=5$ 为所求.

【解题规律】

解决本类题的思路是:先将 m、n 看成已知数,把问题化归为求二次分式函数的值域问题,并用判别式法求值域;再利用一元二次方程和一元二次不等式间的关系,求得 m、n 的值.本题的解法体现了逆向思维及等价转化的数学思想,它是解决数学综合题的桥梁.

考点测试·新题预测

测试时间 60 分钟　测试分值 75 分

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 给定映射 $f:(x,y)\to(x+2y,2x-y)$,在映射 f 下(3,1)的原象为　(　　)

A. (1,3)　　B. (1,1)

C. (3,1)　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

2. 下列函数表示同一个函数的是　(　　)

A. $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$

B. $f(x)=x^2+x+1$ 与 $g(x)=x^2+x+(2x-1)^0$

C. $f(x)=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2}$与 $g(x)=\sqrt{x^2-4}$

D. $f(x)=(a^{2x})^{\frac{1}{2}}$ 与 $g(x)=a^x(a>0)$

3. 设 $U=\mathbf{R}$,已知 $f(x)=\lg(x^2-3x+2)$的定义域为 F,函数 $g(x)=\lg(x-1)+\lg(x-2)$的定义域为 G,那么 $G\cup(\complement_U F)=$　(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(1,2)\cup(2,+\infty)$

4. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f(x+a)+f(x-a)(0<a<\frac{1}{2})$ 的定义域是 (　　)

A. $\varnothing$　　B. $[a,1-a]$

C. $[-a,1+a]$　　D. $[0,1]$

5. 函数 $y=\sqrt{kx^2-6kx+9}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，则 k 的取值范围是 (　　)

A. $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 1$　　B. $k\geqslant 1$

C. $0\leqslant k\leqslant 1$　　D. $0<k\leqslant 1$

6. 函数 $y=\frac{2x}{3x-4}$ 的值域是 (　　)

A. $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

B. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

C. $\mathbf{R}$

D. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

二、填空题(每小题 4 分，共 8 分)

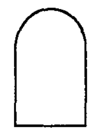
7. 已知 $f(2x)=3x-1$，$f(a)=4$，则 $a=$______.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，那么函数 $y=f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)(a>1)$ 的定义域是______.

三、解答题(共 37 分)

9. (本小题满分 12 分)已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，求函数 $g(x)=f(1-|x-a|)+f(1-|x+a|)$ 的定义域.

10. (本小题满分 12 分)用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架(如图所示)，若矩形底边长为 $2x$，求：



(1)此框架围成的面积 y 与 x 的函数式及其定义域；

(2)函数 y 的最大值.

11. (本小题满分 13 分)已知函数 $g(x)=\frac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的值域是 $\{y\mid 1\leqslant y\leqslant 9\}$，试求函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+8x+b}$ 的定义域和值域.