【第一部分 数学必修1】

第一章 集合与函数概念

1.1 集 合

1.1.1 集合的含义与表示

温故知新

1. 1～20 内的所有质数是________________________________.
2. 一元二次方程 $x^2+3x+2=0$ 的所有解是________________________.
3. 一元一次不等式 $3x-10<0$ 的所有正整数解是____________________.
4. 平面上到两个定点距离相等的所有点构成的几何图形是________________.
5. 平面上到一个定点距离相等的所有点构成的几何图形是________________.

课堂优化

学法点拨

1. 集合的概念

教科书中“一些元素组成的总体叫做集合”，只是对集合概念的一种描述. 我们可以这样来理解：符合某种条件（或具有某种性质）的对象的全体，就构成了一个集合. 集合是集合论中原始的、不加定义的概念，这与几何中的点、线、平面一样同属原始概念，不能用其他概念为其下定义，只能描述. 集合一般用大写拉丁字母 A、B、C 等来表示；集合中的元素一般用小写拉丁字母 a、b、c 等来表示.

2. 正确认识集合中元素的特性

(1) 确定性：对于集合 A 和某一对象 a，则 $a\in \mathbf{A}$ 和 $a\notin \mathbf{A}$ 两者必居其一，不会模棱两可.

(2) 互异性：集合中的两个元素都是互不相同的，相同的元素在同一集合中只算一个元素. 若 $a\in \mathbf{A}$，$b\in \mathbf{A}$，则 $a\neq b$.

(3) 无序性：集合中元素是不排序的，$\{a,b\}$ 与 $\{b,a\}$ 表示同一个集合. 想一想，集合 $\{(1,2)\}$ 与 $\{(2,1)\}$ 表示同一个集合吗？

3. 集合的表示方法

三种表示方法（列举法、描述法和图示法）各有优点，用什么方法来表示集合，要具

体问题具体分析.

4. 集合的分类

含有有限个元素的集合叫做有限集.含有无限个元素的集合叫做无限集.不含元素的集合叫做空集(记作$\varnothing$).空集是个特殊的集合,除了它本身的实际意义外,在研究集合、集合的运算时,必须予以单独考虑.

5. 两个集合构成的元素相同时,称这两个集合相等.

典例剖析

【例 1】 (正确表示集合)判断下列写法是否正确,并说明理由.

(1) $\mathbf{Z}=\{$全体整数$\}$;(2) $\mathbf{R}=\{$实数集$\}$;(3) $\{(0,0)\}=\{0\}$;(4) $\{(x,y)\mid x=1$ 和 $y=2\}=\{(1,2)\}$.

解:(1) 错.集合表示的是元素的总体、所有符合条件的对象,所以无需再用"全体"、"所有"、"什么集"等来重复.正确的表示应该是:$\mathbf{Z}=\{$整数$\}$.

(2) 错.实数集用 $\mathbf{R}$ 表示,所以 $\mathbf{R}=\{$实数$\}$,题中多了"集"字.

(3) 错.等式左边表示的是 1 个点集,而右边表示的是一个数集,不可能相等.

(4) 错.等式左边表示的是两条直线 $x=1$ 和 $y=2$ 上的点,等式右边表示的是点(1,2)组成的一个集合,不可能相等.

点评:集合的符号已经表示符合条件的对象的全体,所以表示时要防止不必要的重复,以免造成误写、导致错误.另外,还要注意区分数集与点集表示方法的异同.

【例 2】 (准确理解集合表示的内容)若 $A=\{y\mid y=x^2+2x+4,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=x^2-4x+7,x\in\mathbf{R}\}$,试判断两集合是否相等.

解:相等.因为:$A=\{y\mid y=(x+1)^2+3,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant3,y\in\mathbf{R}\}$;$B=\{y\mid y=(x-2)^2+3,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant3,y\in\mathbf{R}\}$,所以两集合都是表示大于或等于 3 的数的集合,所以相等.

点评:要注意区分集合表示的内容.例如,集合$\{(x,y)\mid y=x^2+2x+4,x\in\mathbf{R}\}$与集合 $A=\{y\mid y=x^2+2x+4,x\in\mathbf{R}\}$的不同:前者表示的是抛物线上的所有点构成的集合,而后者是一个数集.

【例 3】 (恰当地选用集合表示方法)试说出下列集合的含义:(1) 集合$\{x\in\mathbf{R}\mid y=\sqrt{x}\}$; (2) 集合$\{y\in\mathbf{R}\mid y=\sqrt{x}\}$; (3) 集合$\{(x,y)\mid y=\sqrt{x}\}$; (4) 集合$\{y=\sqrt{x}\}$.

解:(1) 表示函数 $y=\sqrt{x}$中自变量 x 的取值范围;(2) 表示函数 $y=\sqrt{x}$中函数值的取值范围;(3) 元素是点(x,y),它表示方程 $y=\sqrt{x}$的解组成的集合,或者理解为表示曲线 $y=\sqrt{x}$上的点组成的集合;(4) 元素只有一个,就是方程 $y=\sqrt{x}$,它是用列举法表示的单元素集合.

点评:(1) 有的集合可以用三种方法表示.例如,"小于 π 的自然数组成的集合"可以表示为:①列举法:$\{0,1,2,3\}$;②描述法:$\{x\in\mathbf{N}\mid x<\pi\}$;③图示法:如图 1.1.1-1.

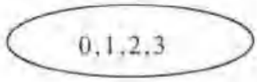


图 1.1.1-1

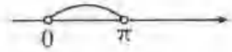


图 1.1.1-2

(2) 有的集合不宜用列举法表示.例如,"由小于 π 的正实数组成的集合"就不宜用列举法表示.①描述法:$\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<\pi\}$;②图示法:如图 1.1.1-2.

学能提升

积累与巩固

1. 下列四个条件,能构成集合的是 ( ).
   (1) 高一(3)班聪明的学生
   (2) 中国人民解放军的十大元帅
   (3) 高一数学课本(上册)中的所有难题
   (4) 方程 $x^3+x^2+x+1=0$ 的所有实数根
   A. (2)(3) B. (2)(4) C. (1)(4) D. (1)(2)
2. 已知集合 $M=\{x\in\mathbf{N}\mid 8-x\in\mathbf{N}\}$,则集合 M 的元素个数是 ( ).
   A. 10 B. 9 C. 8 D. 7
3. 点的集合 $M=\{(x,y)\mid xy\geq 0\}$是指 ( ).
   A. 第一象限内的点集 B. 第三象限内的点集
   C. 第一、三象限内的点集 D. 不在第二、四象限内的点集
4. 方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x^2-y^2=9\end{cases}$的解$(x,y)$的集合是 ( ).
   A. $(5,-4)$ B. $\{5,-4\}$ C. $\{(-5,4)\}$ D. $\{(5,-4)\}$
5. 用列举法表示:你本学期学习的所有课程组成的集合为________.
6. 已知集合 $M=\{0,2,3,7\}$,$P=\{x\mid x=ab,a\in M,b\in M$,且 $a\neq b\}$,用列举法表示集合 P ________.
7. 集合$\{0,1,4,9,16,25,36,49\}$可以用描述法表示为________.

运用与提高

8. 若 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,求实数 a 的值.

9. 已知 $A=\{1,a,b\}$,$B=\{a,ab,a^2\}$,且 $A=B$,求实数 a,b 的值.

10. 用描述法写出直角坐标系内第四象限内的所有点的坐标集合 M，并且指出集合 $A=\{(x,y)\mid y=-2x^2+x-1,x\in\mathbf{R}$，且 $x>0\}$ 中的所有点是否属于 M.

拓展与探究

11. 数集满足条件：若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A(a\neq 0,1)$.

(1) 若 $2\in A$，试求出 A 中所有其他元素；

(2) 求证：A 不可能是单元素集合；

(3) 求证：A 中至少有三个不同的元素.

1.1.2　集合间的基本关系

温故知新

1. 下列四个集合，按范围从小到大排列是________________.

(1) $A=\{$平行四边形$\}$　　(2) $B=\{$矩形$\}$

(3) $C=\{$四边形$\}$　　(4) $D=\{$正方形$\}$

2. 若用 Venn 图表示集合 A 与 B 的关系(如图 1.1.2-1)，请举出满足条件的集合 A 与 B.

$A=$________________，$B=$________________.

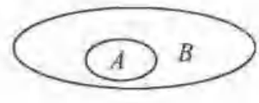


图 1.1.2-1

3. 集合 $A=\left\{x \mid x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}, a,b \text{为非零实数}\right\}$，$B=\{-2,0,2\}$，则集合 A 与 B 的关系是 A ________ B.

课堂优化

学法点拨

1. 集合与集合之间包含关系的三种等价说法

(1) 自然语言：如果集合 A 是集合 B 的子集，那么集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素；反过来，若集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则集合 A 是集合 B 的子集.

(2) 符号语言：若 $A\subseteq B \Longleftrightarrow$ 若 $x\in A$，则 $x\in B$.

(3) 也可以用 Venn 图来表示. 想一想，怎么用图表示集合 A 不包含于集合 B？怎么说集合 A 是集合 B 的真子集？

2. 集合相等问题

在上一节中，集合相等是用元素完全相同来描述的. 在这里，是通过子集的概念提升对集合相等的理解，也就是 $A=B \Longleftrightarrow A\subseteq B$，且 $A\supseteq B$.

3. 集合关系与数的关系类比

实　数	集　合
对于实数 a，有 $a\leqslant a$	对于集合 A，有 $A\subseteq A$
对于实数 a,b,c，有 $a\leqslant b, b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$	对于集合 A,B,C，有 $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

4. 空集是任何集合的子集；有 n 个元素的集合的子集个数是 2^n 个，非空子集的个数是 2^n-1，非空真子集的个数是 2^n-2.

典例剖析

【例 1】（注意分清是集合与集合，还是集合与元素的关系）已知 $A=\{1,2\}$，$B=\{x\mid x\subseteq A\}$，则集合 A 与 B 的关系为（　　）.

A. $A\in B$　　B. $A\notin B$　　C. $A\subseteq B$　　D. $B\subseteq A$

解：A.

点评：易错为集合 A 与集合 B 的关系只能是包含或被包含的关系，所以选 C 或 D. 事实上，集合 A 中的元素是数，而集合 B 中的元素是集合，也就是把集合当作元素构成的集合，所以正确答案是 A.

【例 2】（利用数轴直观表达集合之间的包含关系）设 $A=\{x\mid x\geqslant -2-b, b\in \mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=2x^2+1, x\in \mathbf{R}\}$，当 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$ 时，求 b 的取值范围.

解：如图 1.1.2-2，因为 $B=\{y\mid y\geqslant 1\}$，要使 A 是 B 的真子集成立，则 $-2-b>1$，所以 $b<-3$，b 的取值集合是 $\{b\mid b<-3\}$.

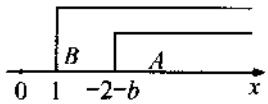


图 1.1.2-2

点评：利用数轴可以直观、形象地表达出集合之间的包含关系，充分发挥图形的直观性特点.

【例 3】（判断集合相等的一些方法）已知集合 $S=\{x\mid x=2n+1, n\in \mathbf{Z}\}$，$T=\{x\mid x=4k\pm 1, k\in \mathbf{Z}\}$，试判断两个集合之间存在着怎样的关系（包含或相等）.

解：方法一：由 $S=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$，$T=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$，可知两个集合相等：$S=T$.

方法二：由 $2n+1=\begin{cases}4k+1(n=2k),\\4k-1(n=2k-1),\end{cases}$ 可以得到 $S=T$.

方法三：S 为奇数集合，而 T 中的元素均为奇数，故有 $T\subseteq S$；又任意取 $x\in S$，则 $x=2n+1$. 当 n 为偶数 $2k$ 时，有 $x=4k+1\in T$；当 n 为奇数 $2k-1$ 时，有 $x=4k-1\in T$，所以有 $S\subseteq T$. 由 $T\subseteq S$ 与 $S\subseteq T$，可以得到 $S=T$.

点评：本例的三种解法代表了判别两个集合关系的基本方法. 一是通过列举，辨别两个集合所有元素的异同；二是辨别两个集合元素的条件是否等价；三是确定包含关系，然后确定它们是否相等.

积累与巩固

1. 集合 $\{x\mid x=-y^2+6, x\in \mathbf{N}, y\in \mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是（　　）.

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. 下列六个关系式正确的是（　　）.

(1) $\varnothing\subseteq\{a\}$　　(2) $a\subseteq\{a\}$　　(3) $\{a\}\subseteq\{a\}$　　(4) $\{a\}\in\{a,b\}$

(5) $a\in\{a,b,c\}$ (6) $\varnothing\in\{a,b\}$

A. (1)(4)(5) B. (3)(5)(6)

C. (1)(4)(5) D. (1)(3)(5)

3. 已知集合 $M=\{x\mid x\leqslant 2+\sqrt{3},x\in\mathbf{R}\}$,$a=\sqrt{2}+\sqrt{5}$,则下列各式正确的是 ( ).

A. $a\notin M$ B. $\{a\}\in M$ C. $a\subset M$ D. $\{a\}\subseteq M$

4. 已知 $M=\{y\mid y=x^2-2x-1,x\in\mathbf{R}\}$,$P=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$,则集合 M 与 P 关系是 ( ).

A. $M=P$ B. $P\in M$ C. $P\subseteq M$ D. $P\not\subset M,M\not\subset P$

5. 已知集合 $A=\{a,ab,a-b\}$,$B=\{0,|a|,b\}$,如果 $A=B$,那么 $a+b=$__________.

6. 已知集合 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$,$B=\{x\mid a\leqslant x<a+4\}$,如果 $B\subseteq A$,则实数 a 的取值范围是__________.

7. 已知 $\{1,2\}\subseteq A\subset\{1,2,3,4,5\}$,则满足这个关系的集合 A 的个数是__________.

8. 集合 $A=\{x\mid y=x^2\}$,$B=\{y\mid y=x^2\}$的关系是__________.

9. 非空集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,若 $a\in S$,则必有$(6-a)\in S$,则所有满足上述条件的集合 S 共有__________个.

运用与提高

10. 已知集合 $A=\{x\mid kx=1\}$,$B=\{x\mid x^2=1\}$,且 $A\subseteq B$,求实数 k 的值.

11. 已知集合 $A=\{-1,x^2-3,x^2+1\}$,$B=\{x-3,x-1,x+1\}$,若 $\{-2\}\subseteq A$,$\{-2\}\subseteq B$,求实数 x 组成的集合的子集的个数.

12. 已知集合 $A\subseteq\{1,2,3,4\}$,且 A 中至少有一个奇数,则这样的集合 A 共有多少个?

拓展与探究

13. 设集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a,a\geqslant -2\}$,$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$,$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$,且 $C\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

1.1.3 集合的基本运算

温故知新

1. 既是等腰三角形又是直角三角形的三角形叫做________.
2. 既是质数又是偶数的数构成的集合是________.
3. 不等式$(x-1)(x-2)>0$的解集是________.
4. 方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=1\end{cases}$的解集是________.
5. 不等式组$\begin{cases}x>5,\\x^2-2x-3>0\end{cases}$的解集是________.

课堂优化

学法点拨

1. 设S是一个集合,A是S的一个子集($A\subseteq S$),由S中所有不属于A的元素组成的集合,叫做S中子集A的补集(如图1.1.3-1),记作$\complement_S A$,即:

$\complement_S A=\{x|x\in S,且x\notin A\}$.

注意:涉及补集概念时,首先要明确这个集合是哪一个集合的子集,全集是哪一个集合.

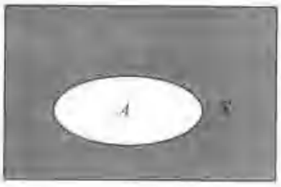


图1.1.3-1

2. 由所有属于集合A且又属于集合B的元素组成的集合,叫做A与B的交集(如图1.1.3-2),记作$A\cap B$,即:

$A\cap B=\{x|x\in A,且x\in B\}$.

注意:当集合A与B没有公共元素时,不能说A与B没有交集,这时$A\cap B=\varnothing$.

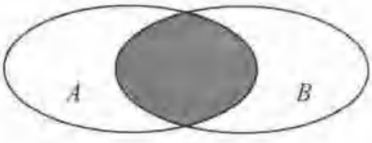


图1.1.3-2

3. 由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合,叫做A与B的并集(如图1.1.3-3),记作$A\cup B$,即:

$A\cup B=\{x|x\in A,或x\in B\}$.

注意:不能简单地认为$A\cup B$是由A的所有元素与B的所有元素组成的集合,这是因为A与B可能有公共元素,故上述理解与集合的互异性不符.

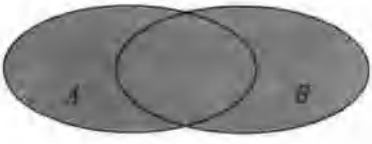


图1.1.3-3

典例剖析

【例 1】（利用 Venn 图的直观性）设全集 $U=$ {不大于 20 的质数}，且 $A\cap(\complement_U B)=\{3,5\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{7,11\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2,17\}$，求集合 A,B.

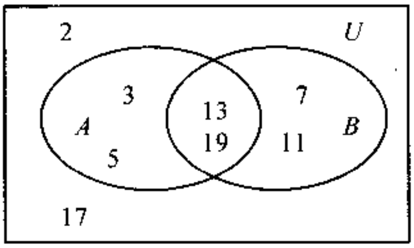


图 1.1.3－4

解：由题意得：$U=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$. 画出 Venn 图（如图 1.1.3－4），并且根据已知条件，分别在相应的区域填数，可以得到：$A=\{3,5,13,19\}$，$B=\{7,11,13,19\}$.

点评：用 Venn 图表示集合之间的关系，不仅形象、直观，有利于思考，同时在解题时应用它也体现了数形结合的思想.

【例 2】（利用集合的性质解题）设集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=B$，求实数 a 的值；

(2) 若 $A\cup B=B$，求实数 a 的值.

解：由题意得：$A=\{-4,0\}$.

(1) $\because\ A\cap B=B$，$\therefore\ B\subseteq A$.

情况一：若 $0\in B$，则 $a^2-1=0$，可得 $a=\pm1$. 当 $a=1$ 时，$B=A$；当 $a=-1$ 时，$B=\{0\}$，适合题意.

情况二：若 $-4\in B$，代入 B 中的方程可以化简得：$a=7$ 或 $a=1$. 当 $a=7$ 时，$B=\{-12,-4\}$，B 不包含于 A，舍去.

情况三：若 $B=\varnothing$，则 $\Delta<0$，解得 $a<-1$.

综上，实数 a 的取值范围为 $a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

(2) $\because\ A\cup B=B$，$\therefore\ A\subseteq B$.

又 $\because\ A=\{-4,0\}$，而且 B 中至多只有两个元素，$\therefore\ A=B$，$\therefore\ a^2-1=0$，可得：$a=\pm1$；由(1)知道 $a=-1$ 舍去，$\therefore\ a=1$.

点评：交集与并集有许多性质：

(1) $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B\subseteq A$；

(2) $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B\supseteq A$；

(3) $A\cap B=A\Longleftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=A\Longleftrightarrow B\subseteq A$.

掌握这些性质，不仅可以加深对交集、并集概念的理解，而且在解题时也有广泛应用；要注意区分情况，避免遗漏空集.

【例 3】（避免遗漏空集）已知集合 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

解：**错解**：$\because\ A=\{-3,2\}$，且 $A\cup B=A$，$\therefore\ B=\{-3\}$或 $B=\{2\}$，即 $-3m+1=0$，或

$2m+1=0$. $\therefore$ $m\in\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$.

点评：错在对集合 B 考虑的不全面. $B=\{x\mid mx+1=0\}$ 代表方程 $mx+1=0$ 的解集，可以是一解，也可以无解. 而无解的情况是 $B=\varnothing$，这种情况又恰恰满足 $A\cup B=A$ 的题设条件. 错的原因一是忽略了 $mx+1=0$ 无解的情况，二是忽略了 $A\cup B=A\Longleftrightarrow B\subseteq A$ 中 B 可以是空集的情况.

积累与巩固

1. 设全集 $S=\{x\in\mathbf{N}^*\mid x\leqslant 9\}$，$A=\{$不大于 10 的质数$\}$，则 $\complement_S A$ 为 (　　).

   A. $\{1,3,5,7,9\}$　　B. $\{2,4,6,8\}$　　C. $\{1,4,6,8,9\}$　　D. $\{4,6,8,9\}$

2. 已知非空全集 S 和集合 M,N,P，且 $M=\complement_S N$，$N=\complement_S P$，则 M 与 P 的关系是 (　　).

   A. $M=\complement_S P$　　B. $M=P$

   C. P 是 M 的真子集　　D. M 是 P 的真子集

3. 若 $A\cup B\subseteq A\cup C$，则下列关系正确的是 (　　).

   A. $B\subseteq C$　　B. $C\subseteq B$　　C. $B=C$　　D. 以上都不对

4. 设 S 是非空全集，则下面三个命题中假命题的个数是 (　　).

   (1) 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $(\complement_S A)\cup(\complement_S B)=S$

   (2) 若 $A\cup B=S$，则 $(\complement_S A)\cap(\complement_S B)=\varnothing$

   (3) 若 $A\cup B=\varnothing$，则 $A=B$

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 若 I，$\varnothing$ 表示全集和空集，$(\complement_I A)\cup B\subseteq A$，则 (　　).

   A. $\varnothing\subseteq A\subseteq B$　　B. $B\subseteq A\subseteq I$　　C. $B=\varnothing$　　D. $A=I$

6. 设集合 $A=\{x\mid x^2-1=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0, a\in\mathbf{R}\}$，如果 $A\cup B=A$，则 a 的值为 (　　).

   A. 1　　B. 1，或 -1　　C. -1　　D. 0，1，或 -1

7. 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 a 的取值范围为________.

8. 已知集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{a-5,1-a,9\}$，且 $A\cap B=\{9\}$，则 a 的值是________.

9. 满足条件 $\{1,2,3\}\cup B=\{1,2,3,4,5\}$ 的所有集合 B 的个数是________.

10. 设集合 $A=\{-3,4\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+b=0\}$，$B\neq\varnothing$，且 $A\cup B=A$，则 a,b 的取值可以是________ ________.

运用与提高

11. 设关于 x 的方程 $x^2+px-12=0$，$x^2+qx+r=0$ 的解集分别为 A，B，$A\cup B=\{-3,4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，且 $A\neq B$，求 p，q，r 的值.

12. 设全集 $S=\{x\in\mathbf{N}^*\mid x\leqslant 8\}$，若 $A\cap(\complement_S B)=\{2,8\}$，$(\complement_S A)\cup(\complement_S B)=\{1,2,3,5,6,7,8\}$，求集合 A.

13. 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，有如下结果：赞成 A 的人数是全体的 $\frac{3}{5}$，其余的不赞成；赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余的不赞成；另外，对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的 $\frac{1}{3}$ 多 1 人. 问：对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

拓展与探究

14. 已知集合 $A=\{1,3,-a^3\}$，$B=\{1,a+2\}$，是否存在实数 a，使得 $B\cup(\complement_S B)=A$？若实数 a 存在，求出集合 A，B；若实数 a 不存在，请说明理由.

1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念(一)

1. 正比例函数是__________,当__________时,函数值 y 随自变量 x 增大而__________;当__________时,函数值 y 随自变量 x 增大而__________.反比例函数是__________.一次函数是__________,当__________时,函数值 y 随自变量 x 增大而增大.
2. 在某地,人们发现某种蟋蟀叫的次数与温度之间有如下的近似关系:记录蟋蟀每分钟叫的次数,用这个次数除以 7,然后再加上 3,就得到当时的温度.温度 T(℃)与蟋蟀每分钟叫的次数 x 之间的近似关系是:____________________.

学法点拨

1. 函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型.高中阶段不仅把函数看成变量之间的依赖关系,同时还用集合与对应的语言刻画函数;函数的思想方法(用联系和变化的观点提出数学对象,建立函数关系,求得问题解决)将贯穿高中数学课程的始终.

2. 对于函数的概念,应明确以下几点:

(1) 在对应法则 f 下,集合 A 中的任意一个数 x,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应.这一点[集合 A 中的任一 $x \xrightarrow{f\text{作用下}}$ 集合 B 中的唯一 $f(x)$]可联系每个学生都有唯一一个生肖来帮助理解和记忆.

(2) 函数的定义域、值域和对应法则是确定函数的三要素,是一个整体.

(3) 函数符号"$y=f(x)$"为"y 是 x 的函数"这句话的数学表示,它仅仅是函数符号,不是表示"y 等于 f 与 x 的乘积".

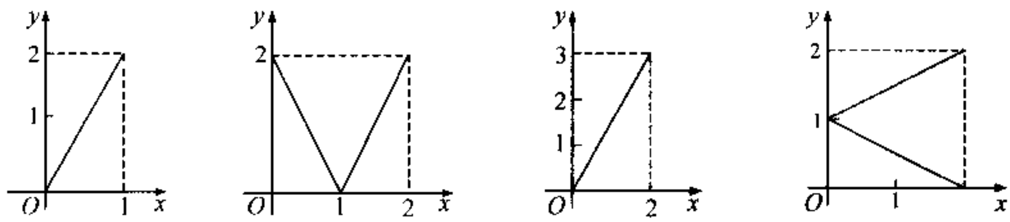
(4) 符号 $f(a)$ 与 $f(x)$ 既有区别又有联系.$f(a)$ 表示当自变量 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值,是一个常量;而 $f(x)$ 是自变量 x 的函数,在一般情况下,它是一个变量;$f(a)$ 是 $f(x)$ 的一个特殊值.

(5) 对应法则 f 不仅可以是明确的解析式(教科书实例 1),也可以是形象、直观的曲线(教科书实例 2)或表格(教科书实例 3).

3. 区间是集合的另一种表示方法. 区间的表示要注意开、闭区间的区别，特别地以 $+\infty$、$-\infty$ 为端点的区间都应为开区间.

典例剖析

【例 1】 （利用函数概念判断函数关系）设 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，给出下面四个图形，能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的有　　（　　）.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

解：图(1)、图(3)中，集合 M 中的元素如 2 在集合 N 中没有对应的元素，故不是函数关系；图(4)中，集合 M 中的元素如 1 在集合 N 中有两个元素与之对应，故也不是函数关系；只有图(2)是集合 M 到集合 N 的函数关系，故应选择 B.

点评：函数的概念中，对应法则是核心，它必须符合“任一”、“唯一”的要求.

【例 2】 （利用函数概念判断同一函数）下列函数中哪个与函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 是同一个函数？

(1) $y=\sqrt{x^2}$；(2) $y=\dfrac{x^2}{x}$；(3) $y=\sqrt[4]{x^3}$；(4) $y=(\sqrt{x})^2$.

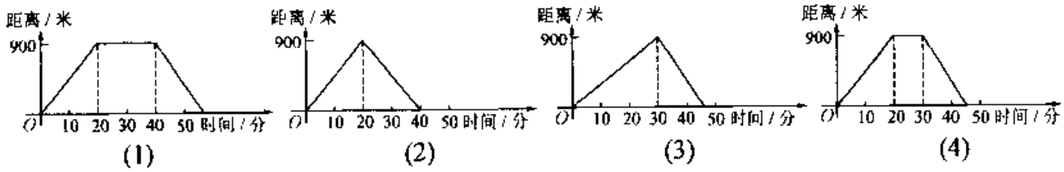
解：(1) $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$ 它与函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 不仅对应法则不相同，定义域也不相同，所以这两个函数不是同一个函数.

而(2)、(3)与函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 虽然对应法则相同，但是定义域不相同，所以这两个函数都与函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 不是同一个函数.

(4) $y=(\sqrt{x})^2=x(x\geqslant 0)$，它与函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 不仅对应法则相同，而且定义域也相同，所以这两个函数是同一个函数.

点评：判断两个函数是否为相同的函数，要抓住两点：①定义域是否相同；②对应法则是否相同. 注意一点：解析式的化简.

【例 3】 （判断哪条曲线能表示相应的对应关系）小明的父母出去散步，从家出发走了 20 分钟到一个离家 900 米的报亭，母亲随即按原速返回. 父亲看了 10 分钟报纸后，用了 15 分钟返回家. 下面的图形中哪个能表示小明的父亲离家的时间与距离之间的关系？哪个能表示小明的母亲离家的时间与距离之间的关系？



解：在小明的父亲离家的时间与距离之间的关系的图象中，距离是 900 米的时间应有 15 分钟，故因选择第四幅图象；而在小明的母亲离家的时间与距离之间的关系的图象中，距离是 900 米的时刻应只有第 20 分钟，且图象左右对称，故应选择第二幅图象.

点评：数与形是数学研究的两种主要形式，将两者有机地结合是学习数学的主要思想和方法.

积累与巩固

1. 下列各组函数中，表示同一函数的是　　(　　).

   A. $f(x)=x-3$ 与 $g(x)=-\sqrt{x^2-6x+9}$

   B. $f(x)=|x-1|$ 与 $g(t)=|1-t|$

   C. $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$

   D. $f(x)=\pi x^2$ 与圆面积 y 是圆半径 x 的函数

2. 不等式 $|5-2x|\leqslant 3$ 的解集是　　(　　).

   A. $\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$　　B. $\{x|1\leqslant x$ 或 $x\geqslant 4\}$

   C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$　　D. $\{x|x\leqslant 1\}$

3. 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$，集合 $B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，$a\in\mathbf{N}^*$，$k\in\mathbf{N}^*$，$x\in A$，$y\in B$，$f:x\to y=3x+1$ 是从定义域 A 到值域 B 的一个函数，求 a,k 的值.

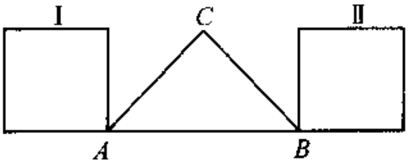
4. 下列对应是否为从集合 A 到集合 B 的函数？为什么？

   (1) $A=\mathbf{R}, B=\mathbf{R}, f:x\to y=\dfrac{1}{x+1}$；

   (2) $A=\{a|a=2n,n\in\mathbf{N}\}, B=\{b|b=\dfrac{1}{n},n\in\mathbf{N}\}, f:a\to b=\dfrac{1}{a}$；

   (3) $A=[0,+\infty), B=\mathbf{R}, f:x\to y, y^2=x$.

5. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=BC=2\sqrt{2}$，一个边长为2的正方形由位置Ⅰ沿AB边平行移动到位置Ⅱ，若移动的距离为x，正方形和三角形的公共部分的面积为$f(x)$，



（第5题）

(1) 求$f(x)$的解析式；

(2) 在坐标系中画出函数$y=f(x)$的草图；

(3) 根据图象，指出函数$y=f(x)$的最大值和y随x增大而增大的x的取值范围.

运用与提高

6. 已知函数$y=f(x)(x\in[a,b])$，那么集合$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in[a,b]\}\cap\{(x,y)\mid x=2\}$中所含元素的个数是 （ ）.

A. 1　　B. 0　　C. 0或1　　D. 1或2

7. 若不等式$|ax+2|<6$的解集为$\{-1,2\}$，则实数a等于 （ ）.

A. 8　　B. 2　　C. -4　　D. -8

拓展与探究

8. 某家庭今年1月份、2月份、3月份煤气用量和支付费用情况如下表所示：

月份	用气量	煤气费
1月份	4m^3	4元
2月份	25m^3	14元
3月份	35m^3	19元

该市煤气收费的方法是：煤气费＝基本费＋超额费＋保险费. 若每月用量不超过最低限度$A\text{m}^3$，只付基本费3元和每户每月的定额保险费C元；若用气量超过$A\text{m}^3$，超过部分每m^3付B元. 又知保险费C不超过5元，根据上面的表格求A,B,C的值.

1.2.1 函数的概念(二)

1. 正比例函数 $y=kx$ 的定义域是__________；反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的定义域是__________；一次函数 $y=kx+b$ 的定义域是__________；二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的定义域是__________.
2. 函数 $f(x)=\sqrt{x+3}$ 的定义域是__________，$f(-3)=$__________；函数 $g(x)=\sqrt[3]{3-x^2}$ 的定义域是__________，$g(a)=$__________.
3. 函数 $f(x)=1$ 和 $g(x)=x^0$ 是否为同一函数？请说明理由：__________.

学法点拨

1. 符号 $f(a)$ 与 $f(x)$ 既有区别又有联系：$f(a)$ 表示当自变量 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值(函数值)，是一个常量；而 $f(x)$ 是自变量 x 的函数，在一般情况下，它是一个变量；$f(a)$ 是 $f(x)$ 的一个特殊值.

2. 求函数的定义域的问题往往可分为三类：

(1) 已知解析式. 常用依据如下：①分式的分母不等于 0；②偶次方根被开方式大于等于 0；③幂指数为 0 时，底数不为 0；④对数式的真数大于 0，底数大于 0 且不等于 1；⑤分段函数的定义域应为各段式子有意义的 x 的集合的并集. 其中，后面三条在以后的学习中会经常碰到.

(2) 复合函数的定义. 主要依据是复合函数的定义，它又包含两大类：①已知 $y=f[g(x)]$ 的定义域为 $\{x|x\in[a,b]\}$，求 $f(x)$ 的定义域. 方法是：利用 $a<x<b$ 求得 $g(x)$ 的范围，则 $g(x)$ 的范围即为 $f(x)$ 的定义域. ②已知 $f(x)$ 的定义域，求 $y=f[g(x)]$ 的定义域. 方法是：由 $a<g(x)<b$ 求得 x 的范围，即为 $y=f[g(x)]$ 的定义域.

(3) 由实际问题确定的函数. 定义域除函数解析式本身要有意义外，还必须符合实际问题的要求.

典例剖析

【例 1】 函数 $y=\frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是 (　　).

A. $(0,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,0)$

C. $\{x \mid x<0 \text{ 且 } x\neq -1\}$　　　　D. $\{x\in \mathbf{R} \mid x\neq 0 \text{ 且 } x\neq -1\}$

解：由$\begin{cases} x\neq -1, \\ |x|-x>0, \end{cases}$得$\begin{cases} x\neq -1, \\ |x|>x, \end{cases}$　∴　$x<0$，且 $x\neq -1$，　∴　答案是 C.

点评：(1) 分式的分母不等于 0；(2) 偶次方根被开方式大于等于 0；(3) 幂指数为 0 时，底数不为 0. 这些是已知解析式的函数求定义域时往往要考虑的问题.

【例 2】　求函数 $y=\begin{cases} -x, -1<x<0, \\ x^3-2x, 0\leqslant x<1 \end{cases}$的定义域.

解：由 $-1<x<0$ 和 $0\leqslant x<1$ 得，函数 $y=\begin{cases} -x, -1<x<0, \\ x^3-2x, 0\leqslant x<1 \end{cases}$的定义域是 $(-1,0)\cup[0,1)=(-1,1)$.

点评：分段函数的定义域应为各段式子有意义的 x 的集合的并集.

【例 3】　设函数 $y=f(x)$的定义域为$[2,3]$，求函数 $y=f(x^2)$的定义域.

错解：∵　$2\leqslant x\leqslant 3$，　∴　$4\leqslant x^2\leqslant 9$，得函数 $y=f(x^2)$的定义域为$[4,9]$.

产生错误的原因：一方面，对变量认识不清，误认为两个函数中是同一个 x 值；另一方面是定义域概念不清，错把 x^2 的范围(即是中间变量的范围)当成了自变量的范围.

解：由 $2\leqslant x^2\leqslant 3$，得$\sqrt{2}\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3}$，　∴　$\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -\sqrt{2}$，得函数 $y=f(x^2)$的定义域为$[-\sqrt{3},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{3}]$.

变式：设函数 $y=f(x^2)$的定义域为$[2,3]$，求函数 $y=f(x)$的定义域.

解：∵　$2\leqslant x\leqslant 3$，　∴　$4\leqslant x^2\leqslant 9$，得函数 $y=f(x^2)$的定义域为$[4,9]$.

积累与巩固

1. 若 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$，则方程 $f(4x)=x$ 的根是　　(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，则函数 $f[f(x)]$的定义域为　　(　　).

A. $\{x \mid x\neq -1\}$　　B. $\{x \mid x\neq -2\}$

C. $\{x \mid x\neq -1, \text{且 } x\neq -2\}$　　D. $\{x \mid x\neq -1, \text{或 } x\neq -2\}$

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$________；

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$________.

4. 若函数 $f(x)$对任意实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$成立，则 $f(0)=$________.