

总主编/蔡上鹤

特别
合作

sina 新浪网
中学生学习报

Magic



魔力！高效！经典！权威！

魔法数学

Magic Math

专题突破

集合与简易逻辑

体验征服学习考试
精彩感觉！

高中版

丛书主编/严文科

请认准此防伪标识



补上你知识木桶上
最短的那一块

- 最全面、最创新的素质教育
- 最科学、最优化的学习流程
- 最新颖、最独到的情境设置



著名节目主持人 何昊

长征出版社
CHANGZHENG PRESS



总主编/蔡上鹤

Magic



魔力！高效！经典！权威！

魔法数学

Math

专题突破

集合与简易逻辑

高中版

丛书主编/ 严文科

本册主编/ 李 慧 关清波

编 委/ 于文君 于春明 朱 林

张 笋 孙江昆 邵承青

孙炳木 周正实 杜敦杰

长征出版社

CHANGZHENG PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

魔法数学专题突破. 高中: 集合与简易逻辑/李慧, 关清波主编.

—北京: 长征出版社, 2004

ISBN 7-80015-814-4

I. 魔… II. ①李… ②关… III. 数学课—高中—教学参考资料

IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 044314 号

魔法数学专题突破高中版

主创设计 / 魔法教育发展研究中心

电 话 010-80602977

网 址 <http://www.magic365.com.cn>

出 版 / 长征出版社

(北京市西城区阜外大街 34 号 邮编: 100832)

行销企划 / 北京九恒世纪文化有限公司

(服务热线: 010-80602977)

经 销 / 全国新华书店

印 刷 / 北京宏伟双华印刷有限公司

开 本 / 880×1230 1/32

字 数 / 4160 千字

印 张 / 130 印张

版 次 / 2004 年 6 月第 1 版

印 次 / 2004 年 6 月第 1 次印刷

书 号 / ISBN 7-80015-814-4/G · 313

全套定价 / 192.00 元

版权所有 · 侵权必究

Magic

魔法系列丛书



总顾问

方明
张怀西
周洪宇

全国教育工会主席,中国陶行知研究会会长。
全国政协副主席,民进中央副主席。
第十届全国人大代表,华中师范大学教育学院副院长,全国中青年教育理论工作者委员会副会长。
北京四中校长,全国优秀校长,全国教育系统劳动模范。
吉林省人大代表,白城市第一中学校长。
全国“五一”劳动奖章获得者,洋思中学校长。
哈尔滨市十四中学校长,全国知名校长。



总 主 编

张定远
蔡上鹤

著名教材专家,中学语文教育权威,课程教材研究所研究员,人教社资深编审,全国中学语文学术委员会主任。

中学数学教育权威,人民教育出版社资深编审,国家教育部课程教材研究所教授,高中新大纲新教材编委,国务院特殊津贴专家。

英语教育界泰斗,北京外国语大学英语系教授,著名英语语法专家。

中学物理教育权威,著名教材专家,人民教育出版社资深编审。

北京市特级教师,著名教材编写专家,北京市化学教学研究会会员。

著名教材专家,中学生物教育权威,人民教育出版社资深编审。

中学政治教育权威,著名教材专家,人民教育出版社资深编审。

著名历史学家,教材专家,中学历史教育权威,人民教育出版社资深编审。

著名教材专家,中学地理教育权威,人民教育出版社资深编审,课程教材研究所研究员。



编委会

(以姓氏音序排列)

[illegible]



致读者

在新的世纪,国内基础教育正发生着日新月异的变化,广大教师和学生对中学教辅读物出版创新的呼声也此起彼伏:中学教辅需要精品,需要品牌,需要从更远、更新的角度重新打造!在这一大背景下,魔法英语以其独特的品质和魅力赢得了读者的尊重和认可,应接不暇的咨询电话和雪片般的订单让我们更加深刻地体会到:中国的基础教育太需要“魔法”这样卓越的图书了!

数以万计的中学教师和学生问我们:你们何时出版“魔法语文”“魔法数学”“魔法物理”“魔法化学”等其他学科的图书?

肩负着社会的责任,带着广大中学师生的期盼,我们联合了美国蒙登戈国际语言研究中心、英国剑桥国际语言研究院等国内外数十所教育研究机构,邀请了张定远、蔡上鹤、薄冰、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等十余名基础教育界权威、国内顶级教材专家,在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下,隆重推出了以《魔法英语》为龙头的《魔法语文》《魔法数学》《魔法物理》《魔法化学》《魔法生物》《魔法政治》《魔法历史》《魔法地理》系列魔法图书。

“享受学习每一刻!”是魔法系列图书最基本的理念,我们希望把魔法系列图书这一成功的理念推广到中学教育的每一个学科、每一个年级、每一个领域。

一千多位教育专家及知名特高级教师联手缔造的魔法系列图书,已经走在中学教辅图书的最前沿,成为一个全新的中学教辅品牌!一个真正由专家打造的具有国际品质的中学教辅品牌!

我们希望给中学生提供一个崭新的学习平台,为每位读者付出的时间和殷切的期待提供丰厚的回报。我们力求通过不懈的努力,让魔法系列图书解放中学生的学习,解放中学生的考试,让学习变得“轻松、快乐、高效”的思想光芒照耀每位读者!

我们与读者的心是相通的,同广大一线教师的心是相通的。现在,我们付出的每一份努力,都得到了广大教师和读者的支持和肯定。面对这些勉励和关怀,我们将会以百倍的努力来报答。未来我们会做得更好,这是我们的目标,也是我们不变的承诺。

魔法系列图书愿做中学生学习的最佳助手,最贴心的朋友!让魔法系列图书伴随着我们的幸福、快乐和回忆,一起成长!

魔法教育发展研究中心

2004.6





前言

Preface

根据教育专家多年的研究发现,几乎每位学生在学习过程当中都有薄弱的学科,每一学科中都有薄弱的专题,而正是这些薄弱学科、薄弱的专题阻碍了学生的成功。“亡羊补牢,未为迟也。”为了帮助更多中学生在高考中走向成功,我们组织了全国数十名有多年教学和研究经验的特高级教师、教研员,在张定远、薄冰、蔡上鹤、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等中学教育界权威、教材专家的悉心指导下,在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下,精心编写了本系列图书。

本丛书在编写过程中秉承“科学划分、高效实用”的编写理念,尊重现行教材体系,依据教学大纲与考试大纲,结合近几年数学命题实践及课堂教学实际,将高中数学专题科学地设置为:《集合与简易逻辑》《函数》《数列》《三角函数》《平面向量》《不等式》《直线与圆的方程》《圆锥曲线方程》《空间直线与平面》《空间向量与简单几何体》《排列、组合、二项式定理》《概率统计(理)》《概率统计、导数(文)》《极限、导数、复数(理)》《高中数学思想方法》十五个分册。

本书具备如下特点:

细分专题,针对性强:适合高中不同年级的学生对自己的薄弱学科、薄弱专题集中复习,不受年级、教材限制。

内容详尽,重点突出:以大纲为面,考纲为线,所有该专题的内容全面详尽,重点难点内容突出。

表述灵活,直观高效:本书灵活使用图、表、眉批、旁注等多种表达方式进行内容阐述,使平常枯燥的学习过程变得直观、具体、高效。

信息敏锐,材料新颖:本书采用了大量的前沿性、趣味性、现实性资料,结合最新的高考信息和命题趋势,从最新的角度组织学习和复习,具有很强的实用性和超前性。



前言

Preface

丛书栏目功能定位如下:

【教考动态】紧扣教学大纲和考试大纲,总结分析中学教学教材改革的新趋势、新动向,突出最新考试信息和对未来高考命题走向的预测,有很强的指向性。

【知识精讲】对所涉及科目的知识点,高度集中地作全面、详尽地分析,以利学生在有限的时间里,集中补差、补弱,系统有效地提高自己的知识能力,补上自己知识木桶上最短的那一块。

【经典例题】针对**【知识精讲】**中的内容,重点精选一线教师多年积累的最典型例题进行分析,与知识精讲栏目形成互动,总结规律,点拨技巧,使学生融会贯通,举一反三,触类旁通。

【思维跨越】对重点、难点和热点延伸,使学生既从点上把握,又能够纵横扩展,最终对所学知识能够达到点面结合,灵活运用。

【范例剖析】针对**【思维跨越】**中的内容,对综合性强的拓展题作解析,结合最新的《考试大纲》,评价每道题的命题角度和能力层级要求,分析解题过程,点拨解题技巧。

【高考连线】收集了与本节内容相关的近几年的高考题并进行简要解析,使学生了解高考,感受高考,为决胜高考做准备。

【专题训练】专题训练由三个层次组成,第一层次的基础训练,重在基础;第二层次的拓展训练,重在提高;第三层次的综合训练,重在运用。通过这三个层次的练习从而使知识的训练由浅入深,阶梯形提高,最终达到把握基础知识,培养和提高学生的综合素质和应试能力。

尽管我们在编写过程中,本着对学生高度负责的态度,处处把关,但如果还有疏漏,诚请读者指正。

编者

2004年6月于北京



Magic



目 录

Contents

第一讲	集合的概念及运算.....	(1)
	教考动态.....	(1)
	知识精讲.....	(2)
	经典例题.....	(3)
	思维跨越.....	(4)
	范例剖析.....	(5)
	高考连线.....	(11)
	专题训练.....	(12)
	轻松阅读.....	(15)
	答案解析.....	(20)
第二讲	含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法.....	(26)
	教考动态.....	(26)
	知识精讲.....	(26)
	经典例题.....	(28)
	思维跨越.....	(28)
	范例剖析.....	(28)
	高考连线.....	(32)
	专题训练.....	(33)
	轻松阅读.....	(36)
	答案解析.....	(37)
第三讲	简易逻辑.....	(42)
	教考动态.....	(42)
	知识精讲.....	(42)
	经典例题.....	(43)
	思维跨越.....	(45)



Magic



目 录

Contents

范例剖析.....	(46)
高考连线.....	(51)
专题训练.....	(51)
轻松阅读.....	(56)
答案解析.....	(59)
第四讲 充要条件.....	(64)
教考动态.....	(64)
知识精讲.....	(64)
经典例题.....	(65)
思维跨越.....	(66)
范例剖析.....	(69)
高考连线.....	(74)
专题训练.....	(76)
轻松阅读.....	(79)
答案解析.....	(81)



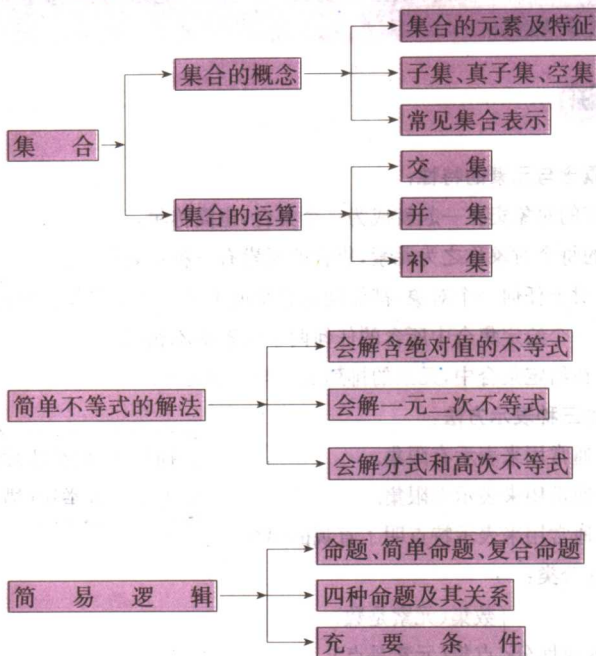
Magic



第一讲 集合的概念及运算

集合与简易逻辑

知识网络构建



第一讲 集合的概念及运算

教考动态



1. 教考要求

理解集合、真子集、子集、补集、交集、并集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简



单的集合.这部分教纲、考纲要求一致.

2. 命题动态

高考中对集合的考查有两种主要形式:一是浅层次的考查,一般以选择题的形式出现,主要考查集合的定义(如互异性)及集合的各种运算.二是深层次的考查,是以集合为工具的考查,考查集合语言(如求不等式组的解集)和集合思想的运用,体现在用集合思想来分析、解决各种数学问题.在考查集合知识的同时突出考查准确使用数学语言的能力和用数形结合的思想解决问题的能力,小题目综合化是这部分内容的一种命题新趋势.

知识精讲



1. 集合概念与元素的特性:

某些特定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.

集合中的每个对象称之为元素,集合的元素有三种重要特征:

确定性:对于任何一个对象,都能确定它是或不是某个给定集合的元素.

互异性:一个给定集合中所含的任何两个元素都不相同.

无序性:在给定集合中,元素的排列次序与集合无关.

2. 集合的三种表示方法:

列举法:通常用来表示有限集.

描述法:通常用来表示无限集.

图示法:通常用来表示特点明了直观的集合.

描述法(列举法)的另一种方法是列举法(描述法)

3. 集合的分类:

按元素的属性分	{	数集(元素是数)
		点集(元素是点)
		序对集(元素是有序数对)
按元素的个数分	{	有限集(元素是有限个)
		无限集(元素是无限个)
		空集(不含任何元素)

4. 子集的概念和性质、集合的相等:

集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,叫做 A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 若 $A \subseteq B$, 且 $B \supseteq A \Rightarrow A = B$, 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 就说集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$)



Magic



第一讲 集合的概念及运算

子集有如下性质:

任何一个集合都是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;

空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集;

传递性:若 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$

5. 并集的概念和性质:

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 并集的性质: $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup B = B \cup A$

6. 交集的概念和性质:

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 交集的性质: $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B = B \cap A$

7. 补集的概念和性质:

设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集,即 $A \subseteq S$,由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 S 中子集 A 的补集,记作 $C_S A$. 即 $C_S A = \{x \mid x \in S \text{ 且 } x \notin A\}$

补集的性质: $C_S A = \emptyset$; $C_S \emptyset = S$; $C_S (C_S A) = A$, $A \cup C_S A = S$, $A \cap C_S A = \emptyset$
 $C_S (A \cup B) = C_S A \cap C_S B$, $C_S (A \cap B) = C_S A \cup C_S B$.

经典例题



例1 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 求证: $B \subseteq A$.

证明: 由 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, 得 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$, 由 $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 得 $B = \{2, 3\}$.

$\because 2, 3 \in B$, 且 $-1 < 2 < 3$, $\therefore 2, 3 \in A$, $B \subseteq A$, 又 $\because -1 \in A$, 但 $-1 \notin B$, $\therefore B \subsetneq A$.

例2 设全集 $I = \{2, 3, 5\}$, $A = \{|a-5|, 2\}$, $C_I A = \{5\}$, 则 a 的值是 ()

☐ A 2

☐ B 8

☐ C 2 或 8

☐ D -2 或 8

解: $\because A \cup C_I A = I = \{2, 3, 5\}$, $\therefore 3 \in A = \{|a-5|, 2\}$, $\therefore |a-5| = 3$, 解得 $a = 2$ 或 8. 选 C.

思维跨越



1. 集合间的关系:

$$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A; A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

2. 在解方程或不等式(组)时常用到集合运算的观点,如方程组或不等式组的解集可以看成是交集;二次方程的解集可以看成两个一次因式组成的解集的交集.

3. 计算集合中元素的个数问题,在教材中不做重点,但实际应用很广,特别今后在排列组合、概率等章节中都会应用到.下面列出一些常见常用公式:若 x 是一个有限集,则 x 内所含全部元素的个数用 $\text{card}(x)$ 来表示.设 A, B, C 是三个有限集合

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

你会用吗?

$$\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B)$$

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

$$\text{card}(A \cap B \cap C) = \text{card}(A \cup B \cup C) - \text{card}(A) - \text{card}(B) - \text{card}(C) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C)$$

若 $B \subseteq A$, 则 $\text{card}(B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \setminus B)$

4. 解决集合问题时数学思想的运用.

数形结合思想:解答抽象集合问题,一般借助于文氏图求解,而求解点集问题,则首先要明确点集是怎样的几何图形,将点集问题转化为坐标平面上的曲线问题,以“形”助“数”,形象、直观、方便快捷.

等价转化思想:在解答集合问题时,有时需要对给定的条件进行转化,只有通过运用等价转化思想,给定的条件才得以有效利用.

$$\text{如 } \emptyset \subsetneq A \cap B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

分类讨论思想:根据解题的实际需要,有时需要对解题过程的某一环节进行分类讨论.分类讨论要注意“起点”的寻求和“层次”的划分,做到“起点”讨论合理、自然,“层次”划分明确、清晰,分类讨论的原则是“既不重复,也不遗漏”.下面是一些常见的分类讨论方法:

有些问题中含有绝对值,根据绝对值的定义去掉绝对值符号进行分类讨论;

根据某些定理或公式的限制条件进行分类讨论;

根据运算的要求进行分类讨论;



Magic



第一讲 集合的概念及运算

对于一个命题,如果题设和结论不是惟一确定,而是有多种可能,就要按可能出现的情况一一加以讨论;

对于自然数按剩余类进行分类讨论.

函数与方程思想:将函数问题转化为方程问题,如借助二次方程的判别式求解函数与 0 的关系.

5. 学习集合这一节需要注意的几个问题:

(1) 准确把握集合概念,熟练运用集合与集合的关系解决实际问题.

(2) 能根据集合元素的性质,尤其是互异性,进行解题后的检验.

(3) 注意空集的特殊性,在解题时应特别留心,防止遗漏掉空集这一特殊情况.

(4) 注意数形结合即数轴的运用和文氏图的运用.

(5) 对于含有字母的题目,要充分注意字母的取值范围,必要时应进行分类讨论.

范例剖析



例 1 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集个数是()

A 32

B 31

C 16

D 15

分析:可以运用分类的思想对集合元素的个数进行讨论.

解:设集合 A 含有 n 个元素,则 A 的子集分别为:不含元素的集合(空集)、含 $i(i=1,2,\dots,n)$ 个元素,共 $n+1$ 类,它们的个数分别为 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ 个,故子集总数共有:

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ 个,本题应选 A.

很一般的解法,当然很重要了



探究提升

此题的分析方法具有一般性,其中 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ 可作为公式用于选择题、填空题中,应注意题目变形后的处理:如

集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的真子集个数是(B)

A. 32 B. 31 C. 16 D. 15

集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的非空真子集个数是(B)

A. 32 B. 30 C. 16 D. 15

Magic

魔法数学专题突破 集合与简易逻辑

其实一般方法也算通法,是高考主要考查的方法

例2 集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则()

☐ A $M=N$

☐ B $M \subsetneq N$

☐ C $M \supsetneq N$

☐ D $M \cap N = \emptyset$

变化的目标是求同存异

分析: 考虑分析两个集合的异同点.

解: M 中: $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k}{4} + \frac{1}{4}$; N 中: $x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{4} + \frac{1}{4}$.

只要看 $\frac{2k}{4}$ 与 $\frac{k+1}{4}$ 的关系即可, 显然 $\{x | x = \frac{2k}{4}, k \in \mathbb{Z}\} \subsetneq \{x | x = \frac{k+1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$

故应选 B.

变式题: 集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则()

☐ A $M=N$

☐ B $M \supsetneq N$

☐ C $M \subsetneq N$

☐ D $M \cap N = \emptyset$



探究提升

对常见的各种形式的数集应认识透彻. 如 $\frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{3}, \frac{k}{8}, \pm \frac{k}{2}$ 等形式的数集, 在后面三角函数中, 将有所应用和体现, 它和整数集有什么区别, 应深入进行分析思考, 培养学生分析问题、解决问题的能力.

例3 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 m 的值组成的集合.

分析: 由 $A \cup B = A$ 得 $B \subseteq A$, 对集合 B 的可能情况进行讨论分析求解.

解: $A = \{2, 3\}$

$\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A$

解法一: 若 $B = \emptyset$, 则 $m = 0$;

若 $B \neq \emptyset$, 则 $x = -\frac{1}{m}$

这种解法是定义法的解题过程吗?

$\because B \subseteq A, \therefore -\frac{1}{m} \in A, \left(-\frac{1}{m}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{m}\right) + 6 = 0$



Magic



第一讲 集合的概念及运算

解得 $m = -\frac{1}{2}, m = -\frac{1}{3} \therefore m$ 的值组成的集合是 $\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$

解法二:显然 $A \neq B$, 故 B 是 A 的真子集, 而 A 的真子集为 $\emptyset, \{2\}, \{3\}$,
则分 $B = \emptyset, B = \{2\}, B = \{3\}$ 讨论求解.

从而可得 $m = 0, m = -\frac{1}{2}, m = -\frac{1}{3}$ 这个解法又是怎样的特征呢?

$\therefore m$ 的值组成的集合是 $\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$

变式题 1: 设 $A = \{x \mid x^2 + 4x = 0\}, B = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 如果 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

分析: 由 $A \cap B = B$ 可推出 $B \subseteq A$, 那么 B 有哪些可能情况? 逐一分析解决

变式题 2: 设 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}, B = \{x \mid \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}, C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 求当 a 取什么实数时, $A \cap B \neq \emptyset$ 和 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立.

分析: 由于集合 B, C 分别是方程: $\log_2(x^2 - 5x + 8) = 1$ 和 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 的解集, 可以求得集合 B, C 具体元素, 再由 $A \cap B \neq \emptyset$ 推出 $A \cap B \neq \emptyset$ 分析讨论, 最后结合 $A \cap C = \emptyset$ 进行检验.



探究提升

空集是任何非空集合的真子集, 这一点在解题时最容易遗漏, 应通过做题加强理解巩固.

例 4 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若集合 A 中元素至多只有一个, 求实数 a 的取值范围.

分析: 集合 A 是数集, 其中元素 x 表现为方程的解, 求集合中元素个数问题转化为求方程解的个数问题.

解法一: (1) $a = 0$ 时, 方程为 $-3x + 2 = 0$, 解得 $x = \frac{2}{3}$, 符合题意. 你想到了吗?

Magic

魔法数学专题突破 集合与简易逻辑

(2) $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 为一元二次方程. 集合 A 中至多有一个元素即表明一元二次方程无根或有两个相等的实数根. 即 $\Delta = 9 - 8a \leq 0$, 解得 $a \geq \frac{9}{8}$.

综合(1)、(2)可知, 实数 a 的取值范围是: $a = 0$ 或 $a \geq \frac{9}{8}$.

解法二: 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个不相等实数根的充要条件是

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 9 - 8a > 0 \end{cases} \text{ 解得 } a < \frac{9}{8} \text{ 且 } a \neq 0. \text{ 取其补集, 则方程 } ax^2 - 3x + 2 = 0 \text{ 或无实数}$$

根, 或只有一个实数根, 或有两个相等的实数根, 因此, 所求实数 a 的取值范围是:

$$a = 0 \text{ 或 } a \geq \frac{9}{8}$$

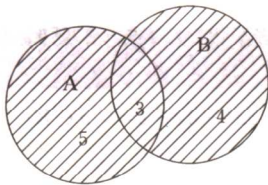
“正难则反”策略用过吗?



探究提升

解法一很好地体现了分类讨论思想的运用, 考查了对参数方程、集合中元素的互异性及对空集含义的理解. 解法二运用“正难则反”的解题策略, 当问题从正面解困难或麻烦时, 则可考虑先求解问题的反面, 巧妙地运用“补集思想”使问题“化繁为简”, “化难为易”.

例 5 某水电站建设实行招标, 大坝承包给一个公司, 电站厂房承包给另一个公司, 有 12 个公司来投标, 8 个可建大坝, 7 个可建电站厂房, 求共有几种不同的承包方案?



分析: 将问题转化为集合问题, 记可建大坝的公司为集合 A , 可建厂房的公司为集合 B , 既可建大坝又可建厂房的公司为 $A \cap B$, 设这 12 个公司组成的集合为全集为 S , 如图所示.

解: 由分析中假设可知