十一五

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

丛书主编　钟承奎

（一类数学与基地班教程）

高等数学

第一册　一元微积分

张志强　编著

兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

丛书主编　钟承奎

（一类数学与基地班教程）

高等数学

第一册　一元微积分

张志强　编著

兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

一元微积分/张志强编著 .—兰州:兰州大学出版社,
2006.8

(高等数学/钟承奎主编)

ISBN 7-311-02792-6

Ⅰ.一... Ⅱ.张... Ⅲ.微积分—高等学校—教材
Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 101199 号

高等数学

第一册 一元微积分

张志强 编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路 222 号 电话:8912613 邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州大学出版社激光照排中心排版

兰州新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张:27.25

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

字数:430 千字 印数:1～3000 册

ISBN7-311-02792-6/O·191 定价:38.00 元

总序

《高等数学》系列教材为教育部"普通高等教育'十一五'国家级规划教材"，共四册：《一元微积分》、《多元微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。主要供非数学专业对数学要求更高一些的专业(需要一类数学的专业)与基地班的本科大学生使用，其它专业与班级在使用本套教材时可对教材内容进行适当选择。

关于数学在其它科学中的重要作用，有一些人常用"数学是科学的工具"这样的术语来描述，其实这样的描述并不确切，有的人甚至把这句话理解为数学只不过是科学发展的一个居于次要的、仆从地位的、可用可不用的工具而已，这就更大错特错了。现代科学(尤其是物理学)发展中的许多事例已经确凿地表明，如果一定要说"数学是科学的工具"，那么数学也是科学发展中特别重要的、不可或缺与不可替代的、而且在很多时候占据主导地位与起着决定性作用的工具。其实这里我们想说的是，数学不是科学的一个一般的、普通的工具，数学对于科学的重要性，无论给予多么高的评价都不会过分。现代科学的发展史同样也表明，对于科学的发展来说，不光数学理论是重要的，而且数学特有的思维方法也特别重要。在一定意义上可以说，每门学科的发展史都是该学科的数学化程度逐渐提高的历史。我们看到，当今数学化程度最高的一些学科已经和数学密不可分，并逐渐和数学融为一体。在这些学科中的伟大的科学家无一例外地同时也是数学家，数学和科学的统一必将是个大趋势。对于非数学专业的大学生而言，数学素养是专业素养中的重要组成部分。另外，数学还是一种文化，学习数学对于促进人的全面发展与人格的完善具有积极的意义。总之，数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。作为非数学专业的大学生一定要下决心努力学好高等数学这门课程。因为数学对于同学们在校期间的专业课程的学习和本科毕业后的继续学习、工作以及生活都是非常重要的。

我们编写这套教材的目的和任务就是，要使同学们能较好地掌握各相关专业所必需的高等数学领域中的最基本、最重要的理论知识，并且能较好地掌握其中所体现的一些重要的数学思想和方法，使同学们在获取数学知识的同时切实提高数学素养，特别是增强数学思维能力与创新意识，从而为后续专业

课程的学习与深造以及今后的工作打下坚实的数学知识与思维方法方面的基础。

一部好的教材无疑会对教学效果起到十分重要的作用。本套教材是在吸收和借鉴国内外同类教材,特别是近几年出版的一批"面向二十一世纪课程"教材和国家"十五"规划教材以及我校出版的四套高等数学教材优点的基础上,结合教学实际情况,按照新的教学要求和教学任务,组织具有较高学术水平且有丰富教学经验的教师认真编写而成的。在编写中我们特别注意了以下几个方面。

第一,与时俱进,与数学和其它学科的发展现状相适应。例如,由于很多学科对数学知识内容需求的扩大,以前仅限于微积分内容的传统的高等数学教材显然不能满足现在的需要,因此本套教材中增加了线性代数和概率论与数理统计的内容;再如,微积分学是牛顿和莱布尼兹等人于 17 世纪末创立的,属于经典数学的范畴,对于这些内容,本教材力求用现代数学的思想观点去统帅与处理,这样可以使同学们能够站在更高的层次上对这些内容的本质与作用有更深入一些的理解,也便于与现代数学的衔接;还有,计算机的诞生和迅速发展对各门学科均有很大影响,数学更是首当其冲,高等数学应当作出相应的响应。

第二,重点突出,各学科所需要的数学知识实在是太多了,把它们全写入教材,既不可能也无必要。一方面,在知识内容上重点突出,我们力求选择那些最基本、最重要、最有用的内容编入教材,并把这些重点内容下大力气写好;另一方面,使学生能较好地掌握一些重要的数学思想和方法。因此在教材的编写中结合有关的具体内容突出重点并力求写好,这方面在帮助学生理解诸如"数学家是怎样抽象出这些重要的数学概念的?"、"数学家是怎样猜想出这些定理的?"、"这些定义和定理究其实质是怎么回事?"等问题方面能起到画龙点睛的作用。

第三,深入浅出,通俗易懂,便于自学。对于重要的数学概念与定理,除了解释清楚它们的物理意义与几何意义外,还从多种角度出发并用通俗易懂形象直观的语言揭示出它们的本质。此外,教材中的例题和习题的选取与配备适应了教学目的的需要。例题有典型性与启发性,习题难易得当、类型多样,能适应不同的需要,特别是增加了一些有助于较高水平的学生提高分析与解决问题能力和创新能力的思考题。

在这里我们还要特别强调一下的是,虽然在兰州大学相关专业试用本套教材的本科生考研过关率有较大的提高,但是我们认为,在本科生教材的编写与使用上一定不要按照应试教育那一套去片面追求考研率。否则就会舍本求

末,高分低能,后患无穷。本套教材重在培养厚基础与高素质的人才,至于考研率的提高,只不过是一种水到渠成的副产品而已。我们希望并相信绝大多数使用本教材的本科生在毕业后能够实现考取研究生的愿望,而且是高分高能、后劲十足,将来能成为有较大作为的栋梁之材。

虽然本套教材的编写人员尽了最大的努力,但难免还会存在不足之处,敬请各位专家、同行和读者批评指正。

兰州大学《高等数学》系列教材编审委员会

2006 年 8 月于兰州大学

前　　言

《高等数学》系列教材的微积分部分是在吸收和借鉴国内外同类教材优点的基础上，结合教学实际情况，按照新的教学要求和教学任务编写的. 在教材的编写过程中，特别注意了下面几点：

1. 以数学修养和素质教育为中心　本教材突出数学思想和方法教育，突出思维、推理、建模和创新能力教育，突出对实际问题的分析、解决和组织能力教育，积极渗透现代数学思想方法和数学成就，以更合理更科学的章节和时间安排来组织教材，力求内容更新，重点突出，难点通俗. 对于有些问题，采用了多观点和多方法处理. 加大了数学应用问题和综合分析问题的介绍力度.

本教材按照了解、掌握、精通和强化四个层次安排和设计，对于涉及数学主流和数学发展的一些深层次理论做了必要的介绍，希望学生有机会了解更多的数学思想和方法. 强化部分按照基地班和考研需要编写，一方面加强了例题数量和难度，另一方面扩大了综合程度和应用广度，对于计算方法和计算技巧，应用方法和应用技巧等都有适当强化.

2. 以全面提高数学教学质量为目标　为了更有效地提高教学质量，一方面对于代表数学主流的东西尽可能地讲深、讲透；另一方面切实贴近考研，对于有利于考研的内容尽可能地拓展、强化.

例题以提供课堂讲授、习题指导和学生自学内容三个层次编写，按照简单、综合和应用三个次序排列. 有些内容，任课教师可根据自己的教学情况和时间，合理选择，灵活掌握.

在习题选择和设计方面，尽量优化结构，分层分类，学用配套，兼顾考研. A 类习题按基本教学要求编写，习题数量、难度、题型和综合性都有严格控制. B 类习题按考研要求编写，习题的难度、深度、广度和题型以及综合性、多样性、层次性和灵活性等都做了系统考虑和精心安排，为优秀学生提供了更深入学习高等数学的良好机会和优越环境.

尽可能排除次要因素对主要内容的干扰，在保证严格数学语言的前提下，更多地采用了形象用语，对于许多难点和抽象问题给出了独特的通俗解释.

3. 按照教学计划整体优化教材结构　一元微积分按照 108 学时设计，多元微积分按照 90 学时设计. 一元微积分的基本授课时间设计为 92 学时，机

动时间为 16 学时. 具体安排如下:

第一章	极限理论	17 学时
	§1.1 函数与数列 (2)	§1.2 数列的极限 (4)
	§1.3 函数的极限 (3)	§1.4 无穷小与无穷大 (5)
	§1.5 连续函数 (3)	
第二章	导数与微分	10 学时
	§2.1 导数的概念 (2)	§2.2 求导法则 (2)
	§2.3 高阶导数与隐式导数 (4)	§2.4 函数微分 (2)
第三章	中值定理及其应用	15 学时
	§3.1 微分中值定理 (3)	§3.2 罗必达法则 (2)
	§3.3 泰勒公式 (4)	§3.4 导数的应用 (6)
第四章	定积分与不定积分	13 学时
	§4.1 定积分概念 (3)	§4.2 微积分基本定理 (2)
	§4.3 积分方法 (6)	§4.4 变限积分与分段积分 (2)
第五章	分类积分与积分应用	13 学时
	§5.1 积分的分类计算 (4)	§5.2 定积分的应用 (6)
	§5.3 广义积分 (3)	
第六章	无穷级数	14 学时
	§6.1 数项级数 (4)	§6.2 函数项级数 (2)
	§6.3 幂级数 (5)	§6.4 傅立叶级数 (3)
第七章	常微分方程 I	10 学时
	§7.1 微分方程的基本概念 (2)	§7.2 一阶微分方程 (3)
	§7.3 高阶微分方程 (5)	

本书为教育部“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”，业已经过试用修改，同时根据试用意见，增加了配套习题解答《高等数学强化与考研教程》，书中不妥之处，恳请各位专家、同行和读者继续批评指正.

编　者

2006年 8月于兰州大学

引论　微积分的起源、发展与应用

高等数学是一门数学综合性课程，内容涉及微积分学，空间解析几何，常微分方程，线性代数和概率统计等多门数学分支．虽然说它是理科各专业的重要基础课，也是进一步学习其它数学分支的必备基础，但仍然有许许多多的同学不断地问这样或类似的问题，例如：我不是学数学专业的，为什么一定要必修高等数学？不学高等数学行不行？学习高等数学以后究竟有没有作用？学习高等数学与所学专业到底有多大关系？高等数学是一门什么样的课程？我怎样才能学好这门课程？高等数学很深奥、很难学吗？

高等数学的应用范围越来越广泛，对于大家所关心的问题，不可能有一个人人满意的完全回答，但我们还是想从微积分的起源、发展与应用三个方面给予部分解答．

高等数学之所以成为理科各专业的必修基础课，不是为了竞争需要，而是因为各专业的深入发展对高等数学的要求越来越高，特别是社会对高等数学的深度、广度、系统性和理论完备性提出了越来越苛刻的要求，对综合应用高等数学的思想、方法、理论和知识去解决实际问题的分析能力、思维能力、建模能力和组织能力的修炼和培养表现出了前所未有的热情、渴望、关注和重视．如果你是一个努力向上的人，是一个希望将来有所作为的人，那你就必须学习高等数学，而且要学好高等数学，有时间的话，还要进一步学习有关的现代数学．不仅高等数学的知识对你的专业很重要，而且高等数学分析问题、处理问题的数学思想和数学方法对你的专业也很重要，甚至更为重要．现代社会离不开高等数学，高等数学是科学计算、科学表达和科学思维的重要工具，也是许多创新思想的灵感源泉．可以说牛顿力学是用微积分建立的加速度与引力模型；Maxwell 方程是用微积分建立的电磁场模型；相对论是用流形上的微积分建立的引力场模型；各种各样的天体运动方程、大气运动方程、流体运动方程等都是建立在高等数学基础上的科学模型．高等数学与经济学的结合产生了经济数学；高等数学与金融学的结合产生了金融数学；高等数学与生态学的结合产生了生态数学；高等数学与计算机的结合，从开始到现在从来就没有停止过，计算机的程序或操作，本质上就是编写函数和调用函数；神经网络也是人们用高等数学建立的人脑模型；大型数学软

件 Matlab 更是把高等数学的应用推到了一个极点。自动控制理论、数字信号处理、时间序列分析、人工智能、动态系统仿真、科学建模、算法分析、数据分析及可视化等都需要高等数学的支持. 社会对高等数学的要求越来越高，理科各专业必修高等数学自然是顺应潮流，势在必行.

前面非常肤浅地谈了一点儿学习高等数学的必要性，相信大家对高等数学或多或少地有了一些新的看法. 下面我们将从历史角度，追踪一下微积分产生的三大问题——速度问题、切线问题和面积问题，希望大家对高等数学有一个更全面的了解.

一 速度问题

在高中物理中，我们遇到的质点运动都是匀速运动. 而现实中的运动大多是变速的，一会儿快，一会儿慢，一会儿加速，一会儿减速. 在这种情况下，如果还是用路程关于时间的比值来表示速度的话，那么结果会与真实运动背道而驰.

考察自由落体运动 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$, 其中 S 是物体的下落路程， t 是下落时间. 开始时，物体运动得很慢，过一会儿，物体运动得很快. 为了对物体运动的快慢程度有一个准确的刻划，我们必须借助于一个依赖于时间的函数 $v(t)$ 来表示物体在任意时刻 t 的快慢程度，换句话说，我们必须引入物体的瞬时速度 $v(t)$. 如何定义瞬时速度，人们想到了时间间隔 $[t,t+\Delta t]$ 上的平均速度

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t,$$

并把物体在 t 时刻的瞬时速度定义为 gt. 瞬时速度的这一定义与实验结果吻合得很好，从而有力地推动了微积分的发展. 但随着应用范围的不断扩大，人们对无穷小的取舍变得越来越困惑，甚至不可思议，无穷小也因此蒙上了神秘的面纱. 如何从理论上合理地解释无穷小现象变得日益迫切和重要. 人们经过好长时间的不懈努力终于解决了这一问题，即什么是无穷小量？怎样计算和判定无穷小量？一个无穷小量在什么时候可以忽略，在什么时候不能忽略？对这些问题的最终回答导致了极限理论的建立. 有了极限理论，微积分才有了理论基础，才从实验和神秘变成了真正意义上的科学，才有了飞速的发展.

二 切线问题

无穷小问题，同样在几何上存在，这不是一个偶然现象，而是一个普遍存在，正因为如此，微积分才会变得越来越重要，生命力才会变得越来越强大．为了计算一条曲线 $y=f(x)$ 在 x 点的切线斜率，人们想到了用割线斜率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

来逼近切线斜率，但很快发现，有些斜率很容易计算，有些则不知所措．比如，当 $f(x)=x^2$ 时，人们可以将 $f(x)$ 在 x 点的切线斜率定义为 $2x$, 但当 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ 时，就不知道该怎么计算了．主要原因也是因为极限理论没有形成．

三 面积问题

速度问题、切线问题是一类变化率问题，即相对变化的极限问题．解决变化率问题的数学工具和数学模型便是我们即将要学习的微分、导数和求导运算，微分的基本观点就是从局部和微观角度分析问题和处理问题．一个宏观上变化的量在微观意义下可以是一个不变的量，一个常量；一个宏观上弯曲的几何图形在微观意义下可以是一个平直的图形，一个多面体．在非线性或非均匀变化的条件下，如果仅从宏观角度考虑问题，那么一般的初等定理和初等公式将不再成立；如果换一个想法，从微观角度来考虑问题，那么一般的初等理论仍然可以平移过来．从宏观到微观，我们可以利用微分解决变化率问题；反过来，从微观到宏观，我们可以利用积分解决面积问题，即一类连续求和，无穷累积问题．解决连续求和问题的数学工具和数学模型便是我们即将要学习的定积分、不定积分和积分计算．

从圆的面积计算到曲边梯形的面积计算，人们创立了用阶梯图形逼近曲边图形的重要思想和方法．人们发现 $[0,1]$ 区间上由非负连续函数 $y=f(x)$ 构成的曲边梯形的面积可以用阶梯图形的面积

$$\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right)$$

来逼近，其中 $x_i=\dfrac{i}{n}, i=1,2,\cdots,n$. 在面积计算问题中，人们同样遇到了无穷小障碍，如何解决可积性问题，积分计算问题成了微积分的发展动力．

不同性质的问题表现出了惊人的相似，不能不说微积分问题具有难以估量的多样性和广泛性．随着这些问题的不断解决，微积分也就走向了成熟和

辉煌，正是微积分的多样性和无所不在性推动着它一步一步地走向社会和大众.

最后，我们粗略地了解一下微积分思想对现代数学的影响.

(1) 对开区间、闭区间和连续思想的深入研究，人们发现了开集公理和闭集公理，以此为基础创立了点集拓扑学.

(2) 微积分的自身发展有 n 维空间上的微积分，流形上的微积分，无穷维空间上的微积分等.

(3) 人们对向量和向量空间的研究，提出了线性空间，线性拓扑空间，内积空间，赋范空间， Hilbert 空间和 Banach 空间等.

(4) 人们对可积性的深入研究发现了测度论以及在物理学和数学上都具有非常广泛应用的 Lebesgue 积分.

(5) 微积分沿微分方程方向的发展，也产生了许多与微分方程，偏微分方程，微分动力系统等有关的数学分支.

(6) 微积分沿极值方向的发展产生了变分学，临界点理论，最优规划，最优决策和最优控制等.

(7) 微积分沿分析方向的发展有实分析，复分析，凸分析，非线性分析和非光滑分析等.

(8) 微积分沿几何与代数方向的发展有微分几何，微分拓扑，黎曼几何，辛几何，李群与李代数，同伦与同调等.

微积分思想对现代数学的形成和发展具有深远的影响，不是简单几句所能说清楚的，一个人对数学知识的了解越深，他就会越感到微积分思想的伟大. 可以说没有微积分，就没有现代数学.

学习高等数学难不难，这要看你对它的兴趣、态度和投入时间. 只要你带着浓厚的兴趣，以积极主动的态度，投入必要的劳动时间，你一定会感到既轻松又愉快.

目 录