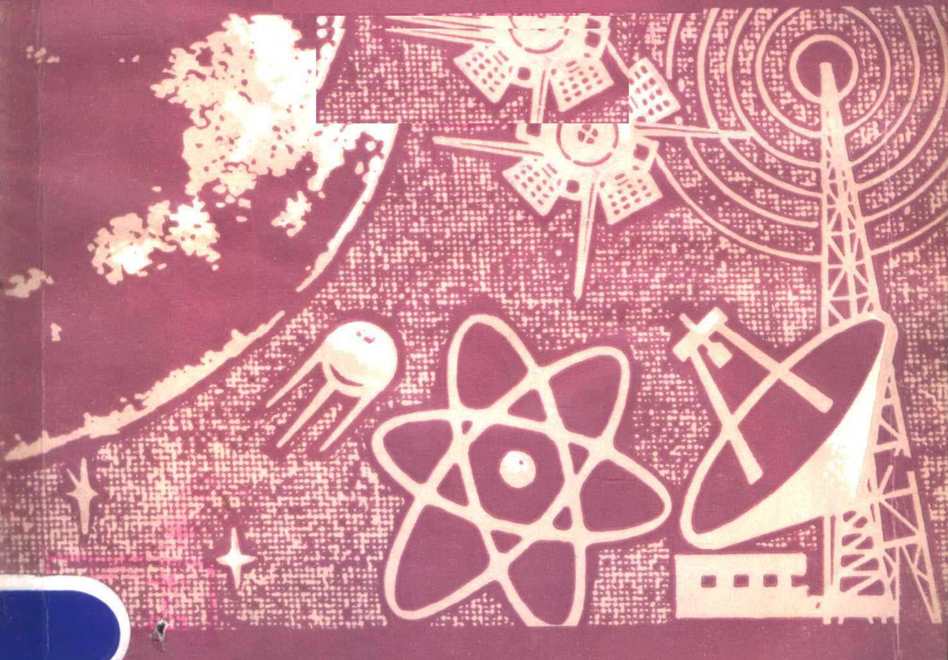
平面解析几何
解题要领与题解

李祥伦　郭之尔



平面解析几何

解题要领与题解

李祥伦　郭之尔　编著

安徽人民出版社

平面解析几何

解题要领与题解

李祥伦　郭之尔

●

安徽人民出版社出版

（合肥市跃进路1号）

安徽省新华书店发行

蚌埠人民印刷厂印刷

●

开本787×1092　1/32　印张13.75　字数300.000

1980年1月第1版　1980年1月第1次印刷

印数1—100,000

统一书号：13102·30　定价：1.08元

前　言

这本《平面解析几何——解题要领与题解》是参照全日制十年制学校中学数学教学大纲编写的。全书共五章，每章分内容提要、解题方法和注意事项、例题分析、习题和题解四个部分。本书在阐述解题要领时，注意结合实例，书中通过对一定数量例题的分析，启发和引导初学者在理解概念的基础上掌握解题方法。全部习题也都有详解，便于自学。本书可供知识青年、在校高中学生学习平面解析几何之用，也可供中学数学教师备课时参考。

本书在编写过程中，承蒙合肥工业大学卢树铭老师帮助审阅和修改，又承薛凌同志帮助绘制插图，在此一并表示谢意。

由于我们教学业务水平不高，又缺乏教学经验，因而书中有些例题和习题不一定具有代表性，解题方法也不一定是最优，缺点、错误一定不少，敬请读者批评指正。

编著者

一九七九年一月

目　　录

第一章　坐标法的初步应用

——平面直角坐标系

内　容　提　要

坐标法(又叫解析法)是研究几何图形性质的一种方法。这种方法是借助于坐标系，使数与形结合起来，从而用代数的方法来研究图形的几何性质。坐标法贯穿在整个解析几何中，是解析几何的基础。这一章，我们在平面直角坐标系中，对关于与点有关的几何问题，通过一定数量例题、习题的分析和求解，说明坐标法的具体运用，为解整个解析几何的有关习题奠定基础。

在这一章里要注意理解和掌握以下几点：

一、有关概念

1.有向直线和有向线段

指定了正向的直线，叫有向直线(或叫做轴)。具有起点、正向和长度单位的直线，叫做数轴。指定了起点和终点的线段，叫做有向线段。用长度单位度量有向线段所得到的数，叫做有向线段的长度(或叫有向线段的绝对值)。既能表示有

向线段的长度又能表示有向线段的方向的数，叫做有向线段的数量。在解析几何中，表示有向线段或它的数量时，记号中的字母排列顺序都包括方向的意义在内（如记号 AB 表示由 A 到 B，记号 BA 表示由 B 到 A），所以书写时，对记号中的字母顺序，应按照它们的位置来处理，不能随意改变。

2.直线的倾斜角和直线的斜率

直线 l 向上方向与 X 轴正向所成的最小正角 α（图1—1）叫做直线 l 的倾斜角，直线 l 平行于 X 轴时，$\alpha=0$，直线垂直于 X 轴时，$\alpha=\frac{\pi}{2}$。因此，直线倾斜角的范围是 $0\leqslant\alpha<\pi$。

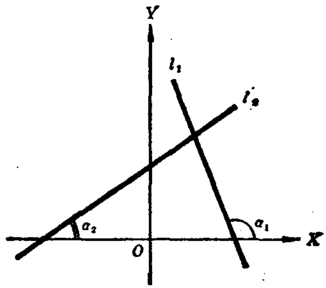


图 1—1

直线 l 的倾斜角 α 的正切 $\operatorname{tg}\alpha$，叫做直线 l 的斜率，用 k 表示，即 $k=\operatorname{tg}\alpha$。只有当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，即直线 l 垂直于 X 轴时，斜率 k 才不存在。

直线的倾斜角和直线的斜率都是用来表示直线的方向的。

二、有关公式

1.平面上两点间的距离

平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 间的距离 $|P_1P_2|$ 是：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

2. 线段的定比分点

已知线段的两个端点是 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，把线段 P_1P_2 分成定比 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$ 的点 P 的坐标是：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad (\lambda\neq-1)$$

当 $\lambda\geqslant0$ 时，P 点在 P_1、P_2 之间，叫做 P 点内分 P_1P_2，当 $\lambda<0$ 时，P 在 P_1P_2 的延长线上，叫做 P 点外分 P_1P_2。当 $\lambda=1$ 时，点 P 便是 P_1P_2 的中点，它的坐标是：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

3. 直线的斜率

通过两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率是：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (x_1\neq x_2)$$

或

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad (x_1\neq x_2)$$

4. 三角形的面积

以 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形的面积是：

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

三、有关定理

1.轴上有向线段的加法定理(沙尔公式)

对轴上任意三点 A、B、C，关系式 $AB+BC=AC$ 总是成立。

应用这个公式的方法是先把第二条线段的起点重合在第一条线段的终点上，再以第一条线的起点为起点，第二线段的终点为终点，这样的结果就是这两条线段的和。

2.两条直线平行(垂直)的充要条件

两条直线平行的充要条件是它们的斜率相等，即 $k_1=k_2$。

两条直线垂直的充要条件是它们的斜率互为负倒数，即 $k_1\cdot k_2=-1$。

3.三点共线的充要条件

$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ 三点共线的充要条件是：

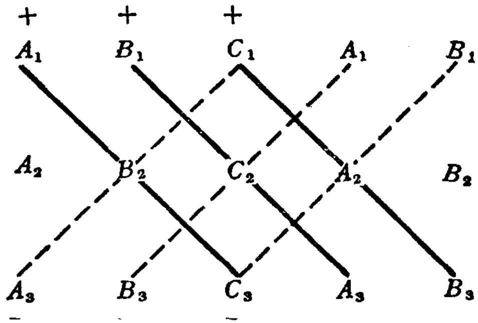
$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3} \text{ 或 } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

注：

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ 叫做三阶行列式，它的计算方法是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=A_1B_2C_3+B_1C_2A_3+C_1A_2B_3-C_1B_2A_3$$
$$-A_1C_2B_3-B_1A_2C_3$$

为了便于记忆可形式地写成：



得 $A_1B_2C_3+B_1C_2A_3+C_1A_2B_3-C_1B_2A_3-A_1C_2B_3-B_1A_2C_3$

解题方法和注意事项

用坐标法证明或解几何问题时，关键在于选择坐标系。坐标系选择得当，可使计算、推证简化，选择不当不仅推算麻烦，有时甚至达不到目的。坐标系的选择一般要考虑以下几点：(1) 参加运算各点的坐标尽可能地简单；(2) 在假设各点的坐标时，尽可能地少出现未知数；(3) 假设各点坐标时，不要把结论当作已知条件来假设。

为了达到上述目的，就需要弄清题目中的已知条件是什么，要求的结论是什么；在弄清条件和结论的情况下，充分利用图形本身的特点。例如，要用解析法证明“菱形的两条对角线互相垂直平分”，因为两对角线互相垂直是要证明的结论，所以在选择坐标系时，不能取两对角线所在的直线为坐标轴。为了使参加运算各点的坐标尽可能地简化，并且使

假设各点的坐标应尽可能地少出现未知数，我们只要注意到菱形具有"各边的长相等"和"对边互相平行"这些特点，就可以取菱形一个顶点为原点，这点所在的一边 OA 所在的直线为 X 轴，过 O 点垂直于 X 轴的直线为 Y 轴，建立直角坐标系，如图 1—2 所示。为设出各点的坐标，可取菱形的边长为 a，并设 OA 与 OC 的夹角为 θ，则菱形的四个顶点的坐标为 $O(0,0)$、$A(a,0)$、$B(a+a\cos\theta, a\sin\theta)$、$C(a\cos\theta, a\sin\theta)$。

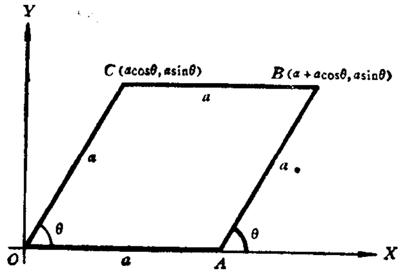


图 1—2

在选择适当坐标系和明确题目的已知条件和结论的基础上，就要考虑有助于解决问题的几何性质或已知的定理、公式。如上例，就需要利用中点公式，分别求出两对角线的中点，看中点坐标是否重合，如果重合，说明两对角线互相平分。要证明两条对角线互相垂直，就需要分别求出它们的斜率，看它们是否互为负倒数，如果是的，就说明这两条对角线互相垂直。

又如"已知平行四边形的三个顶点的坐标，求第四个顶点的坐标"，解这个问题，首先是建立直角坐标系，把已知坐标的三个顶点分别在平面坐标系中标出来，并设第四个顶点的坐标为$(x、y)$，画出草图。在这基础上再寻找在四边形是平行四边形的前提下，要达到求出第四个顶点坐标的途径有几条，从中选择最简单的求证途径。

我们知道，"平行四边形两组对边分别平行"。由此，

我们可以利用两直线平行的条件，分别求出要求的顶点所在的两直线方程，解这两个直线方程所组成的方程组，就可以求出第四个顶点的坐标。此外，我们还知道，“平行四边形的两条对角线互相平分”。从这点出发，就可以先求出两条对角线的中点坐标，因为是互相平分的，所以两对角线中点一定是重合的，即它们的纵、横坐标应该是对应相等。由此也可以达到所求第四个顶点坐标的目的。

综上所述，可归纳出用坐标法研究几何问题的方法是：(1) 明确题目的要求，即弄清哪些是已知条件，要求的结论是什么；(2) 结合图形的特点，适当地选择坐标系，并设出参加运算各点的坐标；(3) 从已知条件达到要求的结论为目的，寻找有助于解题的图形性质和有关定理、公式，以确定解题的方法。

例　题

例1　点 D 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的中点，用解析法证明 $AC^2+BC^2=2(CD^2+AD^2)$。

分析　题目的已知条件是 $\triangle ABC$ 是任意三角形，D 为 AB 边上的中点，结论是 $AC^2+BC^2=2(CD^2+AD^2)$。在这样的条件下，为了使参加运算各点的坐标尽可能地简单，我们可取 AB 边所在的直线为 X 轴，AB 的中点为坐标原点建立坐标系如图 1—3 所示。

由于 AB 的长可以是任意的，我们可设它为 $2a$，这样 A、

B、D三点的坐标就分别为$(-a, 0)$，$(a, 0)$，$(0, 0)$。又∵$\triangle ABC$是任意的，因此设点C的坐标是(c, d)。对于点C不能错设为(o, b)，以免出现用特殊代替一般的错误，使证明失去普遍性。为了达到证明$AC^2+BC^2=2(CD^2+AD^2)$的目的，需要计算出各个线段的长，这可用平面上两点间的距离公式来解决。

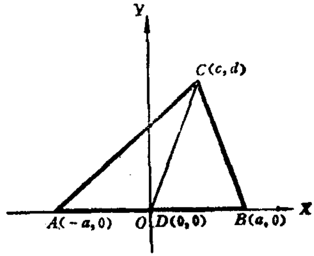


图 1—3

证 建立坐标系如图，设A、B、C、D各点的坐标依次为$(-a, 0)$，$(a, 0)$，(c, d)，$(0, 0)$，那么

$$AC^2=(c+a)^2+(d-0)^2=c^2+2ac+a^2+d^2$$

$$BC^2=(c-a)^2+(d-0)^2=c^2-2ac+a^2+d^2$$

$$\therefore\quad AC^2+BC^2=2a^2+2c^2+2d^2=2(a^2+c^2+d^2)$$

又∵ $CD^2=c^2+d^2$，$AD^2=a^2$

即 $CD^2+AD^2=c^2+d^2+a^2$

$$\therefore\quad AC^2+BC^2=2(CD^2+AD^2)$$

例2 用解析法证明梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半。

分析 本题的已知条件是四边形$ABCD$为梯形，E、F分别是两腰中点，结论是$EF\parallel AB\parallel CD$，且

$$|EF|=\frac{1}{2}(|AB|+|CD|)。$$

本题要用解析法来证明，就需要选择适当的坐标系。为使假设的各点坐标中尽量少出现未知数，可用梯形下底一端

为原点，并使下底与 X 轴重合，如图 1—4 所示为宜。如设梯形的下底为 a，则梯形下底的另一端 B 的坐标就为 $(a, 0)$。由于梯形的上、下底平行，故梯形上底两端点的纵坐标相同，设它为 c，并设它们的横坐标分别为 b，d。这样，梯形 $ABCD$ 各顶点的坐标就依次为 $(0, 0)$，$(a, 0)$，(b, c)，(d, c)。这里要注意的是，在设各点的坐标时，不能假设 E、F 的纵坐标相等。因为 E、F 的纵坐标相等正是我们要设法证明的。

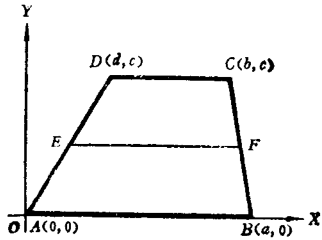


图 1—4

在选定坐标系和设出梯形各顶点的坐标之后，再根据题目的条件寻找证明结论的途径。我们知道，若能证明梯形两腰中点的连线的斜率为零，或证得梯形两腰中点的纵坐标相等，都能证明梯形两腰中点连线平行于底。至于两腰中点连线等于上、下底的和的一半，则容易证明。这只要算出这些线段的长，然后进行运算就可以了。因此，解题时，必须先根据已设的各顶点坐标，利用中点公式确定出两腰中点的坐标，然后利用距离公式算出上、下底和中位线的长。

证 建立坐标系如图，设梯形 $ABCD$ 的各顶点坐标依次为 $(0, 0)$，$(a, 0)$，(b, c)，(d, c)，E、F 分别为 AD、BC 的中点，那么，由中点公式得知 E 点的坐标为 $(\frac{d}{2}, \frac{c}{2})$，$F$ 点的坐标为 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$。

$\because$ E、F 点的纵坐标相等，

$\therefore$ $EF \parallel AB \parallel CD$。

又由两点间距离公式得知

$$|EF|=\frac{a+b}{2}-\frac{d}{2}=\frac{a+b-d}{2}$$

$$\frac{|AB|+|CD|}{2}=\frac{(b-d)+a}{2}=\frac{a+b-d}{2}$$

$\therefore$ $|EF|=\dfrac{|AB|+|CD|}{2}$。

例3 从圆上一点 A 作直径 BC 的垂线 AD，分直径成两线段 BD 和 DC，用坐标法证明 AD 是 BD 和 DC 的比例中项。

证一 以直径 BC 所在直线为 X 轴，由 B 到 C 的方向为 X 轴的正向，以圆心 O 为坐标原点建立直角坐标系，如图 1—5 所示。

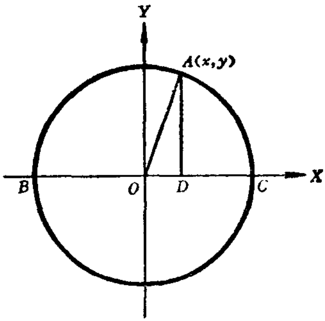


图 1—5

设圆的半径为 r，于是 B、C 的坐标分别为 $(-r,\ 0)$，$(r, 0)$；因为 A 是圆上任一点，可取它的坐标为 $(x,\ y)$；由于 $AD \perp BC$，所以 D 点的坐标为 $(x,\ 0)$。

由两点间距离公式，得 $|OA|=\sqrt{x^2+y^2}$

又 $OA=r$， $\therefore$ $r^2=x^2+y^2$

即 $y^2=r^2-x^2=(r+x)(r-x)$

而 $y=|AD|$，$r+x=|BD|$，$r-x=|DC|$

$\therefore \quad |AD|^2 = |BD| \cdot |DC|$

证得 AD 是 BD 和 DC 的比例中项。

证二 由题设知 $AD \perp BC$，取 D 为坐标原点，BC 所在直线为 X 轴，由 B 到 C 的方向为 X 轴的正向，建立直角坐标系，如图1—6所示。

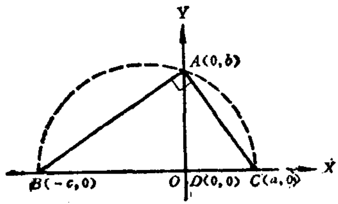


图 1—6

设 D、A、B、C 各点的坐标依次为(0，0)，(0，b)，($-c$，0)，(a，0)

那么 $|BD| = c$，$|DC| = a$，$|AD| = b$

$\because$ A 是圆周上的点，$\angle BAC$ 是直径所对的圆周角，由平面几何可知 $\triangle BAC$ 是直角三角形，它的三边之间的关系为

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

而 $BC^2 = (a+c)^2$，$AB^2 = c^2 + b^2$，$AC^2 = a^2 + b^2$

$\therefore \quad (a+c)^2 = (b^2 + c^2) + (a^2 + b^2)$

于是有 $b^2 = a \cdot c$

$\therefore \quad AD^2 = |BD| \cdot |DC|$

故 AD 是 BD 和 DC 的比例中项。

从上面两种证法可以看出，坐标系的选择非常重要。选择第一种证法的坐标系，推证过程较为简单。

例4 用坐标法证明平行四边形对角线互相平分。

分析 要证明平行四边形对角线互相平分，只要能证明它们的中点重合就行了。要达到这一点，必须求出中点的坐标，这就要求选择适当的坐标系。