随机过程论

基础·理论·应用

（第二版）

武汉大学学术丛书

Wuhan University Academic Library

胡迪鹤 著

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学学术丛书

国家自然科学基金
国家教育部专业基金
资助课题

随机过程论

基础·理论·应用

（第二版）

胡迪鹤 著

武汉大学出版社

内 容 简 介

本书由三大部分组成：一是近代随机过程论的基础，含点集拓扑、积分与测度、Banach 空间、Banach 代数及算子半群。二是随机过程论的基本理论，含马尔可夫过程、鞅、平稳过程. 三是随机过程的应用，含更新过程的应用、各种马尔可夫过程的应用、平稳序列的应用、鞅的应用。

本书兼顾了各种人员的要求，满足了不同目的的读者需要。基础好的理论研究工作者可重点参考第二部分——随机过程的基本理论；研究生主要参考第二部分并以第一部分做预备知识；应用研究工作者可重点参考第三部分——随机过程的应用，并以第一、第二部分做理论根据。

本书既可作为研究生的教学参考书，又可作为理论研究及应用研究的引导书。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程论：基础、理论、应用/胡迪鹤著. —2 版. —武汉：武汉大学出版社，2005.5

(武汉大学学术丛书)

ISBN 7-307-04540-0

Ⅰ.随… Ⅱ.胡… Ⅲ.随机过程 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 033797 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：刘　欣　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：武汉大学出版社印刷总厂

开本：880×1230　1/32　印张：20.75　字数：572 千字　插页：3

版次：2005 年 5 月第 1 版　　2005 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-04540-0/O·323　　定价：39.00 元

胡迪鹤

教授，博士生导师。1935年出生，1957年毕业于北京大学数学力学系，毕业后留北京大学数学力学系任教至1973年。师从许宝騄院士（许先生是我国有史以来最早的一批院士（1948年）之一)学习概率极限理论与马尔可夫过程论。自1959年1月起，主讲过《分析概率论》、《马氏过程》、《排队论》、《概率与统计》、《测度与积分》等5门课程，在《数学学报》和《北京大学学报》发表和接受待发的论文6篇。翻译了W. Feller著《An Introduction to Probability Theory and its Applications》的第一卷(上册由科学出版社1964年出版)。1960~1963年担任教研室秘书协助许宝騄教授抓教学科研工作。1960年8月，以“高教部暑期专家讲学团”的团员身份赴贵阳为川、贵、滇、桂诸省教师讲授《概率论》。1973年调入武汉大学数学系工作至今。1980年由讲师越级晋升为正教授，1986年被国务院学位办公室评为博士生导师，1979年至1981年应J. L. Doob教授之邀在美国伊利诺大学数学系访问研究，1992年夏应J. Taylor教授之邀在美国弗吉尼亚大学数学系讲学并合作研究。2001~2004年三度赴香港浸会大学讲学并合作研究。在概率论与随机分形方面，出版过专著8部(共300万字)，编著1部，发表论文96篇，作为合作导师，指导过博士后7名。培养过博士生26名，硕士生50多名，其专著与论文8次获省部级以上学术奖，2004年获湖北省优秀研究生导师称号并先后主持过国家自然科学基金国家教委基金和科学院基金项目共13次。仍是A Member of “the Bernoulli Society of the Mathematical Statistics and Probability”。1991年起享受国务院有特殊贡献专家的津贴。

曾任武汉大学校务委员会委员，武汉大学学术委员会委员，武汉大学数学系主任，数学所副所长；并兼任国家教委科技委数学组成员，国家教委教学指导委员会委员，中英奖学金留学人员资格审查委员会委员，中国数学会常务理事，中国概率论与数理统计学会常务理事，湖北省数学会副理事长兼秘书长，武汉市科协副主席，“应用概率统计”及“数学杂志”副主编；并且为“Mathematical Reviews”和“Zentralblatt fur Mathematik/Mathematics Abstracts”的评论员。

纪念恩师

许金騄先生

诞辰九十周年

杨迺鹏

2000年

第一版序言

今年是许宝騄先生诞生九十周年。许先生是我国最早的一批院士之一，“是我国最早从事概率论、数理统计科学研究并达到世界先进水平的一位数学家”，对我国近代数学的发展，有过卓越的贡献，享誉国内外，堪称一代宗师。作为长期跟随许先生学习过的弟子之一，特撰此书，以示对先生之敬意。

随机过程论方面的书，无论是专著或教材，国内外已有不少，但随机过程的基础、理论、应用三者皆含的书却不多。本书集这三方面的内容，故名之曰《随机过程论——基础·理论·应用》。

本书分三部分：第一部分是基础，包含前三章。第 1 章是点集拓扑简介，这一章取材于许宝騄先生 1964 年在北京大学概率论讨论班上报告的内容。第 2 章是测度与积分摘要。测度与积分在随机过程的研究中，是不可须臾或缺的工具，因此择其要者集于第 2 章。第 3 章是随机过程研究中最常用的泛函分析的基本内容，诸如 Banach 空间、Banach 代数、算子半群。第二部分是本书的核心，概括了随机过程的基本理论，主要讲三种随机过程模型：马尔可夫过程、鞅过程、平稳过程。其中四章讲马尔可夫过程，鞅过程与平稳过程各占一章。这种比例分配是合乎这三类过程的内涵、历史长短、文献多寡的实际情况的。第二部分还有一章论述随机过程的基本概念，这是第 4 章。第 11 章作为随机分析的一些引子，简单论述了随机微分方程式，特别是 ITÔ 积分。第三部分是第 12 章，讲随机过程的应用。其讲法是用理论模型来带实际应用，讲明该理论如何与实际问题结合，间或举一二例以示范。在这一部分中，主要讲述了更新过程、分枝过程、生灭过程、宽平稳序列和鞅的应用。

随机过程论，即使从 A. A. Markov 于 1907 年发表的重要论文算起，也已有近百年的历史，其文献、成果浩如烟海。本书只不过是沧海一粟，如能对读者有所裨益，即不虚此笔墨了。

作者才智平平，书中谬误之处在所难免，敬请不吝指教。

作 者
2000 年 2 月 18 日
于武昌珞珈山

第二版序言

该书第一版于 2000 年出版，2002 年第二次印刷。此为第二版，作者在第二版中，改正了个别印刷错误并增加了部分内容。

作 者
2005 年 3 月 15 日
于武昌珞珈山

目 录

第1章　点集拓扑简介

本书的集合运算符号，取通用之表示法．如 Ω 为任一集合，$\omega\in\Omega$ 表示 ω 属于 Ω，或 ω 是 Ω 之元素；$A\subset\Omega$ 表示 A 含于 Ω，或 A 是 Ω 之子集；$\{\omega\}$ 表示含 ω 的单点集；$\bigcup$ 与 $\bigcap$ 分别表示求并与求交运算；$A-B$ 与 $A\Delta B$ 分别表示 A 与 B 之差及 A 与 B 之对称差；$\varnothing$ 表示空集；$A^c\triangleq\Omega-A$ 表示 A 之补集．有时简记 $A\cap B$ 为 AB．

$\mathbf{R}^d$ 恒表示 d 维欧氏空间，$\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$，$\bar{\mathbf{R}}=[-\infty,\infty]$．

1.1　拓扑空间中的开集、闭集、G_δ 集、F_σ 集、Borel 集与子空间

定义 1.1　设 Ω 为任一集合，$\mathscr{T}$ 为 Ω 的一个子集族(有时称子集族为集合系)，如果 $\mathscr{T}$ 满足：

(C_1)　$\varnothing\in\mathscr{T}$, $\Omega\in\mathscr{T}$;

(C_2)　$A_\gamma\in\mathscr{T}\Longrightarrow\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\in\mathscr{T}$ (Γ 是任一指标集)；

(C_3)　$B_n\in\mathscr{T}$ $(1\leqslant n\leqslant N,\ N$ 是任一正整数$)\Longrightarrow\bigcap\limits_{n=1}^{N}B_n\in\mathscr{T}$, 则称 $(\Omega,\mathscr{T})$ 是一个**拓扑空间**，$\mathscr{T}$ 是 Ω 上的一个**拓扑**，当 $A\in\mathscr{T}$ 时，称 A 为**开集**；$\Omega-A$ 为**闭集**．

定义 1.2　设 $(\Omega,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，$A\subset\Omega$，含于 A 的最大开集，即 $\bigcup\limits_{G\subset A,\ G\in\mathscr{T}}G$ 称为 A 的**开核**，记之为 A°．

命题 1.1　设 $(\Omega,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，Ω 中的子集的开核具有下列性质：

(1)　$(A-A^\circ)^\circ=\varnothing$;

(2) $A \subset B \Longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$;

(3) $G \subset A, G \in \mathscr{T} \Longrightarrow G \subset A^\circ$;

(4) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

(5) $A \in \mathscr{T} \Longleftrightarrow A = A^\circ$;

(6) $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^\circ \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^\circ$ （Γ 是任一指标集）;

(7) $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^\circ \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^\circ$ （Γ 是任一指标集）;

(8) $A^\circ B^\circ = (AB)^\circ$.

定义 1.3 设 x 是拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$中任一点，含 x 的任何开集均称为 x 的**邻域**.

命题 1.2 设 A 为拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$的任一子集，则

(1) A 为开集之充要条件是：A 中每一点 x 均有一个含于 A 的邻域；

(2) $x \in A^\circ \Longleftrightarrow x$ 有一个含于 A° 之邻域.

证 (1) 必要性. 若 A 为开集，则 $A = A^\circ$，故 A (即 A°) 中每一点 x 均有含于 A 之邻域 A°.

充分性. 只需证 $A \subset A^\circ$. 事实上，任取 $x \in A$，由假设知：有开集 G 满足 $x \in G \subset A$. 由 A° 之定义，此 G 必含于 A°，从而 $x \in A^\circ$. 充分性得证.

(2)是显然的.

定义 1.4 设 A 为拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$之子集，含 A 之最小闭集，即 $\bigcap_{F \supset A,\ F\text{闭}} F$，称为 A 之**闭包**，记之为 $\overline{A}$.

命题 1.3 设$(\Omega,\mathscr{T})$是拓扑空间，Ω 中的子集的闭集与闭包具有下列性质：

(1) 任意多个闭集之交是闭集；

(2) 有限多个闭集之并是闭集；

(3) $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

(4) $A \subset F$，F 是闭集 $\Longrightarrow \overline{A} \subset F$;

(5) $\overline{A}$ 是闭集；

(6) A 是闭集 $\Longleftrightarrow A=\overline{A}$；

(7) 对任一指标集 Γ，恒有

$$\overline{\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)}\supset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A_\gamma},\quad \overline{\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)}\subset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\overline{A_\gamma};$$

(8) $(\overline{A})^c=(A^c)^\circ$，$\overline{(A^c)}=(A^\circ)^c$；

(9) $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(10) 若 G 是开集，则对 Ω 的任何子集 A 有 $\overline{(AG)}=\overline{(\overline{A}G)}$.

证 (1) ～ (9) 是显然的. 只证(10). 因为

$$\begin{aligned}(\overline{A}G)(\overline{(AG)})^c&=(\overline{A}G)((AG)^c)^\circ=(\overline{A}G)(A^c\cup G^c)^\circ\\&=\overline{A}(G(A^c\cup G^c))^\circ=\overline{A}(GA^c)^\circ\\&=\overline{A}G(A^c)^\circ=G\overline{A}(\overline{A})^c=\varnothing,\end{aligned}$$

故

$$\overline{A}G\subset\overline{(AG)},$$

从而 $\overline{(\overline{A}G)}\subset\overline{(AG)}$，而 $\overline{(AG)}\subset\overline{(\overline{A}G)}$ 是显然的，故(10) 成立.

命题 1.4 对拓扑空间 $(\Omega,\mathscr{T})$ 中任一子集 A，总有：$x\in\overline{A}$ 的充要条件是 x 的任一邻域与 A 有非空交集.

证 因为由命题 1.3 (8) 知

$$\begin{aligned}x\in(\overline{A})^c&\Longleftrightarrow x\in(A^c)^\circ\\&\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G \text{ 满足：} x\in G\subset(A^c)^\circ=(\overline{A})^c\\&\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G \text{ 满足：} x\in G \text{ 且 } G\overline{A}=\varnothing.\end{aligned}$$

此即命题 1.4 成立.

定义 1.5 称拓扑空间 $(\Omega,\mathscr{T})$ 的子集 F 是 **F_σ 集**，如果 F 可表示为有限或可数无穷个闭集之并；称 Ω 的子集 G 是 **G_δ 集**，如果 G 可表示为有限或可数无穷个开集之交.

显然任一闭集必为 F_σ 集，任一开集必为 G_δ 集.

定义 1.6 设 Ω 是任一集合(未必赋有拓扑)，Σ 是 Ω 上的一个非空子集族.

(1) 称 Σ 是**半环**，如果

(a) $\varnothing \in \Sigma$;

(b) $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cap B \in \Sigma$;

(c) $A, B \in \Sigma,\ A \supset B \Longrightarrow A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i,\ C_i \in \Sigma,\ C_i \cap C_j = \varnothing\ (i \neq j)$.

(2) 称 Σ 是**环**，如果

$A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cup B \in \Sigma,\ A \cap B \in \Sigma,\ A - B \in \Sigma.$

(3) 称 Σ 是**代数**，如果 Σ 是环，而且 $\Omega \in \Sigma$.

(4) 称 Σ 是 **σ 环**(或 **σ 代数**)，如果 Σ 是环(或代数)且

$$“A_n \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma”.$$

(5) 称含 Σ 的最小 σ 代数为**由 Σ 产生的 σ 代数**，记之为 $\sigma(\Sigma)$. 仿之，可定义**由 Σ 产生的环**、**由 Σ 产生的代数**、**由 Σ 产生的 σ 环**.

(6) 若$(\Omega, \mathscr{T})$是拓扑空间，由 $\mathscr{T}$ 产生的 σ 代数 $\sigma(\mathscr{T})$ 称为 **Borel σ 代数**，其中每个元素 $A \in \sigma(\mathscr{T})$ 皆称为 **Borel 集**. 有时记 $\sigma(\mathscr{T})$ 为 $\mathscr{B}(\Omega)$，而 $\mathscr{B}^1 \triangleq \mathscr{B}(\mathbf{R})$.

命题 1.5 设$(\Omega, \mathscr{T})$是拓扑空间，则

(1) 任一 F_σ 集、任一 G_δ 集都是 Borel 集；

(2) 可数个 Borel 集之交或并皆为 Borel 集，两 Borel 集之差亦为 Borel 集.

定义 1.7 设$(\Omega, \mathscr{T})$是拓扑空间，$\Omega^* \subset \Omega$，则$(\Omega^*, \Omega^*\mathscr{T} \triangleq \{A\Omega^* : A \in \mathscr{T}\})$亦为拓扑空间，称之为**相对于 Ω^* 的子空间**. $(\Omega^*, \Omega^*\mathscr{T})$的开集或闭集，称之为**开于 Ω^*** 或**闭于 Ω^***.

命题 1.6 设$(\Omega, \mathscr{T})$是拓扑空间，$\Omega^* \subset \Omega$. 则有：

(1) A 开于 Ω^* 的充要条件是：存在开集 G，使 $A = \Omega^* G$;

(2) A 闭于 Ω^* 的充要条件是：$\Omega^* A^c$ 开于 Ω^*；

(3) A 闭于 Ω^* 的充要条件是：存在闭集 F，使 $A = \Omega^* F$.

证 (1)和(2)显然成立. 只证(3). 事实上，

$$\begin{aligned} A \text{ 闭于 } \Omega^* &\Longleftrightarrow \Omega^* A^c \text{ 开于 } \Omega^* \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G\text{，使 } \Omega^* A^c = \Omega^* G \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G, \text{ 使 } \Omega^* (\Omega^* A^c)^c = \Omega^* (\Omega^* G)^c$$

$$\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G, \text{ 使 } A = \Omega^* G^c.$$

在子空间$(\Omega^*, \Omega^* \mathscr{T})$中，"取补集"、"取闭包"、"取开核"分别记作$(\cdot|\Omega^*)^c$，$\overline{(\cdot|\Omega^*)}$，$(\cdot|\Omega^*)^\circ$. 显然，

$$(A \mid \Omega^*)^c = \Omega^* A^c.$$

命题 1.7 设$(\Omega,\mathscr{T})$为拓扑空间，$\Omega^* \subset \Omega$，则有

(1) $\overline{(A \mid \Omega^*)} = \Omega^* \overline{A}$;

(2) $(A \mid \Omega^*)^\circ = \Omega^* ((\Omega^*)^c \cup A)^\circ$.

证 (1) $\overline{(A \mid \Omega^*)} = \bigcap\limits_{\substack{E\text{闭于}\Omega^* \\ E \supset A}} E = \bigcap\limits_{\substack{F\text{闭} \\ F \supset A}} \Omega^* F = \Omega^* \overline{A}.$

(2) 由命题 1.3 (8) 及本命题之(1) 知

$$\begin{aligned}(A \mid \Omega^*)^\circ &= (\overline{((A \mid \Omega^*)^c \mid \Omega^*)} \mid \Omega^*)^c \\ &= (\overline{(\Omega^* A^c \mid \Omega^*)} \mid \Omega^*)^c \\ &= (\Omega^* \overline{(\Omega^* A^c)} \mid \Omega^*)^c \\ &= \Omega^* (\Omega^* \overline{(\Omega^* A^c)})^c \\ &= \Omega^* ((\Omega^* A^c)^c)^\circ \\ &= \Omega^* ((\Omega^*)^c \cup A)^\circ.\end{aligned}$$

1.2 稠密、无处稠密、纲

定义 2.1 设$(\Omega,\mathscr{T})$是拓扑空间，$A,B \subset \Omega$. 称**A对B稠密**，如果$\overline{A} \supset B$. 若$B(\overline{A})^c$对B稠密，则称**A对B无处稠密**. 特别地，若$B = \Omega$，则"对B"二字略去.

显然，

$$\begin{aligned}A \text{ 对 } B \text{ 无处稠密} &\Longleftrightarrow B(\overline{A})^c \text{ 对 } B \text{ 稠密} \\ &\Longleftrightarrow \overline{(B(\overline{A})^c)} \supset B \\ &\Longleftrightarrow B(\overline{(B(\overline{A})^c)})^c = \varnothing\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow B((B(\overline{A})^c)^c)^\circ = \varnothing$$

$$\Longleftrightarrow B(B^c \cup \overline{A})^\circ = \varnothing.$$

特别地，A 稠密的充要条件是$\overline{A} = (\overline{A})^\circ = \Omega$；$A$ 无处稠密的充要条件是$(\overline{A})^\circ = \varnothing$.

定义 2.2 设$(\Omega,\mathscr{T})$是拓扑空间，$A,B \subset \Omega$. 若 A 可表示为可数个对 B 无处稠密集之并，则称 A 对于 B 属于**第一纲集**，否则称 A 对于 B 属于**第二纲集**.

特别地，若 $B = \Omega$，则"对于 B"三字略去. 即 A 属于第一纲集的充要条件是 A 可表示为可数个无处稠密集之并，否则称 A 为属于第二纲集.

如不特别声明，以下所言之集，皆为拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$之子集，而 F(或 F_n) 与 G(或 G_n) 分别表示 Ω 中之闭集与开集.

命题 2.1 (1) 若 A 对 B 稠密，$A_1 \supset A$，$B_1 \subset B$，则 A_1 对 B_1 稠密.

(2) A 对 B 稠密之充要条件是 A 对 $\overline{B}$ 稠密.

(3) A 对 BG_0 稠密之充要条件是：

$$\varnothing \neq BG \subset BG_0 \Longrightarrow AG \neq \varnothing.$$

证 (1) 和(2) 显然成立. 只证(3).

必要性. 设 A 对 BG_0 稠密，即$\overline{A} \supset BG_0$. 若$\varnothing \neq BG \subset BG_0$，则由命题 1.3 (10) 有

$$\overline{(AG)} = \overline{(\overline{A}G)} \supset \overline{(BG_0G)} = \overline{(BG)} \neq \varnothing.$$

故$AG \neq \varnothing$. 必要性证毕.

充分性. 设$\overline{A}$不包含BG_0，即$(\overline{A})^cBG_0 \neq \varnothing$. 取$G = (\overline{A})^cG_0$，即得$BG \neq \varnothing$，$BG \subset BG_0$，但$AG = \varnothing$. 充分性证毕.

命题 2.2 (1) A 对 B 稠密的充要条件是：

$$“BG \neq \varnothing \Longrightarrow AG \neq \varnothing”.$$

(2) A 为稠密集的充要条件是：

$$“G \neq \varnothing \Longrightarrow AG \neq \varnothing”.$$

(3) A 对 BG_0 稠密的充要条件是：AG_0 对 BG_0 稠密.

(4) 若 A 对 G_0 稠密，G_1 对 G_0 稠密，则 AG_1 对 G_0 稠密.

证 (1) 在命题 2.1 (3) 中置 $G_0=\Omega$ 即得(1).

(2) 在(1)中取 $B=\Omega$ 即得(2).

(3) 充分性显然成立. 下证必要性. 设 $\overline{A}\supset BG_0$，则由命题 1.3 (10) 得

$$\overline{(AG_0)}=\overline{(\overline{A}G_0)}\supset\overline{(BG_0)}\supset BG_0,$$

故 AG_0 对 BG_0 稠密.

(4) 据假设 $\overline{A}\supset G_0$，$\overline{G_1}\supset G_0$，故由命题 1.3 (10) 及命题 2.2 (3) 得

$$\overline{(AG_1)}=\overline{(\overline{A}G_1)}\supset\overline{(G_0G_1)}\supset G_0,$$

此即 AG_1 对 G_0 稠密. 命题 2.2 证毕.

系 2.1 有限个开稠密集之交亦为稠密集.

命题 2.3 A 对 B 无处稠密之充要条件为："$GB\neq\varnothing\Longrightarrow\exists G_0\subset G$，使 $G_0B\neq\varnothing$，$G_0A=\varnothing$".

证 必要性. 设 A 对 B 无处稠密，即 $B(\overline{A})^c$ 对 B 稠密. 若 $GB\neq\varnothing$，则由命题 2.2 (1) 知：$GB(\overline{A})^c\neq\varnothing$. 取 $G_0=G(\overline{A})^c$ 即为所求.

充分性. 设 A 不是对 B 无处稠密，则有 $B(B^c\cup\overline{A})^\circ\neq\varnothing$. 但条件成立，故存在 G_0 使 $G_0\subset(B^c\cup\overline{A})^\circ$，$G_0B\neq\varnothing$，$G_0A=\varnothing$. 所以

$$G_0B\subset(B^c\cup\overline{A})B=\overline{A}B.$$

因此

$$G_0B\subset G_0B\overline{A}B=BG_0\overline{A}\subset B\,\overline{(G_0\overline{A})}$$
$$=B\,\overline{(G_0A)}=\varnothing.$$

矛盾. 充分性得证.

命题 2.4 若 A 与 B 皆对 G 无处稠密，则 $A\cup B$ 对 G 无处稠密.

证 据假设 $G(\overline{A})^c$ 和 $G(\overline{B})^c$ 皆对 G 稠密. 由命题 2.2 (4) 知