锦囊妙解

中学生数理化系列

主编/张和良

不可不知的素材

MATH

高二数学

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解 中学生数理化系列

不可不知的素材

高二数学

总策划 司马文

丛书主编 万强华

编委 刘芬 江华平 欧阳哗 郑永盛 吴小平 管厚坤 胡志芳 吴小菲 王智军 张和良 张延良 黄维

本册主编 张和良

编者 李天寿 刘小洪 何东华

机械工业出版社

本书是“锦囊妙解中学生数理化系列”的《不可不知的素材 高二数学》分册，它体现了新课标改革精神，不受任何版本限制。书中体现了系统的知识讲解，不设置习题。设置有知识表解、知识与规律、身边的数学和联系生活应用题四个栏目。本书内容新颖，题材广泛，目的是要从本质上提高学生理解知识的能力，以及分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

不可不知的素材.高二数学/张和良主编.—北京：机械工业出版社，2006.6
(锦囊妙解中学生数理化系列)
ISBN 7-111-18922-1

Ⅰ.不... Ⅱ.张... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 056599 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：石晓芬 责任编辑：石晓芬 贾 雪
责任印制：洪汉军
三河市宏达印刷有限公司印刷
2006 年 9 月第 1 版·第 1 次印刷
169mm×230mm ·13 印张 ·320 千字
定价：19.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话：(010)68326294
编辑热线：(010)88379037
封面无防伪标均为盗版

前 言
Preface

武林竞技，想要取胜，或"一把枪舞得风雨不透"，或有独门绝技，三招之内，挑敌于马下。古有"锦囊妙计"，今有"锦囊妙解"辅导系列。继"锦囊妙解——中学生英语系列"、"锦囊妙解——中学生语文系列"之后，我们又隆重推出了"锦囊妙解——中学生数理化系列"。

这是一套充满智慧的系列丛书：能使你身怀绝技，轻松过关斩将，技增艺长。

这更是一套充满谋略的系列丛书，能使你做到"风雨不透"，意外脱颖而出，圆名校梦。

这套丛书紧密结合教材内容，力求将教学需求和实际中高考要求完美结合。在体例设计、内容编排、方法运用、训练考查等方面都充分考虑各个年级学生的实际，由浅入深，循序渐进，稳步提高，并适度、前瞻性地把握中高考动态和趋向，在基础教学中渗透中高考意识。

本丛书作者均为多年在初中、高中一线教学的精英，每册都由有关专家最后审稿定稿。

这套丛书按中高考数、理、化必考的知识点分成三大系列：《不可不读的题》、《不可不知的素材》和《不可不做的实验》。从七年级到高考，并按数学、物理、化学分类，配套中学新课标教材，兼顾老教材：共有 36 册。

本丛书有如下特点：

1. 选材面广，知识点细，针对性强

在《不可不读的题》中，我们尽量选用当前的热点题，近几年各地的中高考题，并有自编的创新题。在《不可不知的素材》中，我们力求做到知识面广、知识点细而全、知识网络清晰，并增加一些中高考的边缘知识和前瞻性知识。在《不可不做的实验》中，我们针对目前中学生实验水平低、实验技能差、实验知识缺乏的情况，结合教材的知识网络，详细而全面地介绍了实验。有实验目的、原理、步骤、仪器，实验现象、结论、问题探讨，并增加了实验的一般思路和方法。除介绍课本上的学生实验和教师的演示实验外，还增加了很多中高考中出现的课外实验和探究实验。

2. 指导到位

本丛书在指导学生处理好学习中的基础知识的掌握、解题能力的娴熟、能力的提高方面,有意想不到的功效。选择本丛书潜心修炼,定能助你在考场上游刃有余,一路顺风,高唱凯歌。

3. 目标明确

在强调学生分析问题和解决问题能力的同时,在习题、内容上严格对应中高考命题方式,充分体现最新中高考的考试大纲原则和命题趋势。

梦想与你同在,我们与你同行。我们期盼:静静的考场上,有你自信的身影。我们坚信:闪光的金榜上,有你灿烂的笑颜。

本丛书特邀江西师范大学附属中学高级教师、南昌市学科带头人万强华担任主编。本丛书由张和良主编。

我们全体策编人员殷切期待广大读者对丛书提出宝贵意见。无边的学海仍然警示着我们:只有不懈努力,才会取得胜利,走向辉煌。

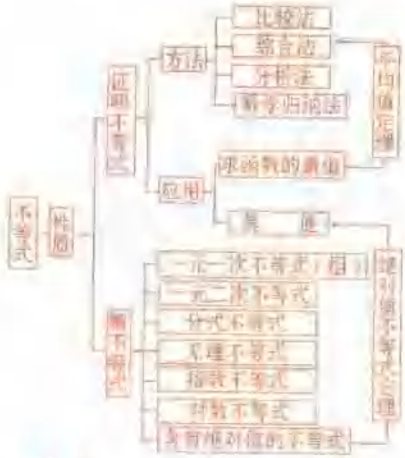
编　者

2006 年 9 月

目 录
Contents

第六章　不　等　式

本章知识概要



第一节　不等式的性质

知识表解

不等式的概念

概念	定义
不等式	用不等号“＞、≥、＜、≤或≠”表示的式子叫做不等式 仅含“＞”或“＜”号的式子叫做严格不等式 含“≥”或“≤”号的式子叫做相伴严格不等式 注意:常见下列形式的混合不等式的意义必须明确,如: (1)$a\geq b\Leftrightarrow(a>b)\vee(a=b)$;(2)$a>b>c\Leftrightarrow(a>b)\wedge(b>c)$; (3)$a\geq b>c\Leftrightarrow[(a>b)\vee(a=b)]\wedge(b>c)$ (注:“$\vee$”、“$\wedge$”分别表示逻辑联结词“或”、“且”)
不等式的解和解集	能使含未知数 x 的不等式成立的 x 的取值叫做不等式的解 不等式的所有解组成的集合叫做不等式的解集 注意:不等式的解集是不等式成立的充要条件
不等式组的解集	不等式组中,各个不等式解集的交集叫做不等式组的解集

（续）

概念		定义
不等式分类	绝对不等式	对全体实数都成立的（只要式子有意义）不等式
	条件不等式	只在实数集的某个真子集（非空集）中成立的不等式
	矛盾不等式	对任何实数都不成立的不等式
两不等式的关系	从不等号的方向看	两个不等式中，如果一个不等式的左边大于右边，另一个的左边小于右边，那么这两个不等式就叫做异向不等式
		两个不等式中，如果每一个的左边都大于（或小于）右边，那么这两个不等式就叫做同向不等式．
	从不等式的解集看	解集相等的几个不等式叫做同解不等式（或称它们等价）； 同解不等式之间的变形叫做不等式的同解变形．

不等式的性质

实数大小比较	(1) $a>b\Leftrightarrow a-b>0$；(2) $a<b\Leftrightarrow a-b<0$；(3) $a=b\Leftrightarrow a-b=0$
不等式的基本性质和推论	(1)互逆性：$a>b\Leftrightarrow b<a$
	(2)传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$
	(3)加法的单调性：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$ 推论：①移项法则：$a+b>c\Leftrightarrow a>c-b$ ②同向不等式的可加性：$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$ ③异向不等式的可减性：$a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$
	(4)乘法的单调性：①$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；②$a>b,c>0\Rightarrow ac<bc$ 推论：①正值同向不等式的可乘性：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$ ②正值异向不等式的可除性：$a>b>0,0<c<d\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ ③正值不等式的可倒性：$a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
	(5)幂和算术根的单调性： ①$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{Z},n>1)$；②$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{Z},n>1)$

绝对值不等式的概念和性质

定义	若 $x\in\mathbf{R}$,则 $\lvert x\rvert=\begin{cases}x & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$
几何意义	$\lvert x\rvert$ 表示数轴上坐标为 x 的点到原点的距离 $\lvert x-a\rvert$ 表示数轴上坐标为 x 的点到坐标为 a 的点的距离
运算性质	(1) $\lvert a\cdot b\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$;(2) $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}(b\neq0)$;(3) $\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert\leqslant\lvert a+b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ 补充说明: ①当且仅当 $ab\geqslant0$ 时,右边取等号,即 $\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert\leqslant\lvert a+b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ ②当且仅当 $ab\leqslant0$ 时,左边取等号,即 $\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert=\lvert a+b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ (4) $\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert\leqslant\lvert a-b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ 补充说明: ①当且仅当 $ab\leqslant0$ 时,右边取等号,即 $\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert\leqslant\lvert a-b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ ②当且仅当 $ab\geqslant0$ 时,左边取等号,即 $\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert=\lvert a-b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ (5) $\lvert a_1+a_2+\cdots+a_n\rvert\leqslant\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\cdots+\lvert a_n\rvert$

重要不等式

	不等式
1	设 $a\in\mathbf{R}$,则 $a^2\geqslant0$(当且仅当 $a=0$ 时,取“=”号)
2	设 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a^2+b^2\geqslant2ab$(当且仅当 $a=b$ 时,取“=”号)
3	设 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)$(当且仅当 $a=b$ 时,取“=”号)
4	设 $a,b\in[0,+\infty)$,则 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时,取“=”号)
5	设 $a,b,c\in[0,+\infty)$,则 $a^3+b^3+c^3\geqslant3abc$(当且仅当 $a=b=c$ 时,取“=”号)
6	设 $a,b,c\in[0,+\infty)$,则 $a+b+c\geqslant3\cdot\sqrt[3]{abc}$(当且仅当 $a=b=c$ 时,取“=”号)
7*	设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in[0,+\infty)$,$n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant2$,则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时,取“=”号)
8*	柯西(Cauchy)不等式:设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,则 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$(当且仅当 $ad=bc$ 时,取“=”号)
9	设 $a,b\in(0,+\infty)$,则 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$(当且仅当 $a=b$ 时,取“=”号)

知识与规律

1. 不等式的性质刻画了在一定条件下两个量的不等关系. 值得注意的是其中有一类具有充要性的特征,条件和结论可互相推出,解不等式的每一变形只能依据这一类性质,才能保证变形的同解性;另一类性质只具有充分性的特征,它可以作为证明不等式的依据,但不能作为解不等式的依据.

2. 有关判断性命题,主要依据不等式的概念和性质. 一般地,要判断一个命题为真命题,必须严格证明,要判断一个命题为假命题,或者举反例,或者由题中条件推出与结论矛盾的结果.

3. 有关比较实数大小,常用作差或作商法. 一方面要灵活运用题中条件,还要结合不等式性质、配方或因式分解. 如果要比较的多,可恰当选取"分界量",如先找出正的负的,在正数中找比 1 大的比 1 小的等.

4. 要注意不等式性质成立的条件. 例如,在应用"$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"这一性质时,有些同学要么是弱化了条件,得 $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,要么是强化了条件,而得 $a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

5. 应用平均值定理求函数的最大值或最小值(通常简称为"最值")及注意事项.

①设 $a,b\in(0,+\infty)$,则 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号),由此得到:若 $ab=P$(定值),则当且仅当 $a=b$ 时,$a+b$ 取得最小值 $2\sqrt{P}$;若 $a+b=S$(定值),则当且仅当 $a=b$ 时,ab 取得最大值 $\left(\frac{S}{2}\right)^2$.

②设 $a,b,c\in(0,+\infty)$,则 $a+b+c\geqslant3\sqrt[3]{abc}$(当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号),由此得到:若 $abc=P$(定值),则当且仅当 $a=b=c$ 时,$a+b+c$ 取得最小值 $3\sqrt[3]{P}$;若 $a+b+c=S$(定值),则当且仅当 $a=b=c$ 时,abc 取得最大值 $\left(\frac{S}{3}\right)^3$.

③把应用这两个不等式求函数的最值应注意的事项简述成口诀"一正、二定、三等号",就是说,前提是 a、b、c 必须是正数;不等式中一端是变数,但另一端必须是定值;不等式中"$\geqslant$"中一定能取得"=",三条缺一不可.

6. 利用算术平均数与几何平均数定理求函数最值错因举例.

错因之一

利用定理$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$时,$a$、$b$ 必须为正值

例　求函数 $y=2-3x-\frac{4}{x}$的最值.

错解　$\because y=2-(3x+\frac{4}{x})$,而 $3x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{3x\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{3}$,$\therefore y_{\max}=2-4\sqrt{3}$.

错因　上面的解法实质是一错解,那么错在哪里呢? 错在 $x<0$ 还是 $x>0$ 未加严格区分. 事实上,如取 $x=-1$ 时,就有 $y=9$,可见对 x 的取值万万不可轻视!

正解　显然 $x\neq0$,则

(1)当 $x>0$,$y=2-\left(3x+\frac{4}{x}\right)$.

令 $y_1=3x+\frac{4}{x}$,$\because x>0$,$\therefore 3x>0$,$\frac{4}{x}>0$.

故 $y_1=3x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{3x\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{3}$,

其中当且仅当 $3x=\frac{4}{x}$,即 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$(负值不合题意,舍去)时取等号,

$y_{1\min}=4\sqrt{3}$,易知当 y_1 取最小值时,y 取最大值.

$\therefore$ 当 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$时,$y_{\max}=2-4\sqrt{3}$.

(2)当 $x<0$,$y=2-\left(3x+\frac{4}{x}\right)$.

令 $y_1=3x+\frac{4}{x}$,则 $-y_1=(-3x)+\left(-\frac{4}{x}\right)$,

$\because x<0$,$\therefore -3x>0$,$-\frac{4}{x}>0$,

故 $-y_1 \geq 2\sqrt{(-3x)\left(-\frac{4}{x}\right)}=4\sqrt{3}$，即 $y_1 \leq -4\sqrt{3}$，

其中当且仅当 $-3x=-\frac{4}{x}$，即 $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$（正值不合题意，舍去）时，$y_{1\max}=-4\sqrt{3}$.

$\therefore$ 当 y_1 取最大值时，y 取最小值.

$\therefore$ 当 $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 时，$y_{\min}=2-(-4\sqrt{3})=2+4\sqrt{3}$.

错因之二

利用算术平均数与几何平均定理求函数最值时，和或积必须是定值.

例　设 $a \geq 0, b \geq 0, a^2+\frac{b^2}{2}=1$，求 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值.

错解　$a\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{2}(2a)\cdot\sqrt{1+b^2}$

$\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{4a^2+(1+b^2)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(a^2+\frac{1}{2}\right)+\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)\right]=$

$\frac{1}{2}\left[\left(a^2+\frac{1}{2}\right)+1\right] \geq \frac{3}{4}$（$a=0$ 时取等号）.

错因　$a\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{2}\cdot(2a)\cdot\sqrt{1+b^2} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{4a^2+(1+b^2)}{2}$ 中，$\frac{4a^2+(1+b^2)}{2}$ 并非定值，致使解答错误.

正解　为利用均值不等式时出现定值，先进行适当的“凑、配”：

$a^2+\frac{b^2}{2}=1 \Rightarrow a^2+\frac{1+b^2}{2}=\frac{3}{2}$，

$a\sqrt{1+b^2}=\sqrt{2}\cdot a\cdot\sqrt{\frac{1+b^2}{2}}$

$\leq \sqrt{2}\cdot\left(\frac{a^2+\frac{1+b^2}{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\times\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

当 $\begin{cases} a^2+\frac{b^2}{2}=1 \\ a=\sqrt{\frac{1+b^2}{2}} \end{cases}$ 时，即 $\begin{cases} a=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 时，$a\sqrt{1+b^2}$ 取最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

错因之三

利用算术平均数与几何平均定理求函数最值时，必须注意能取到等号.

例　求 $y=x^2+\frac{3}{x}(x>0)$ 的最小值.

错解　$\because y=x^2+\frac{3}{x}=x^2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}$

$\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3\sqrt[3]{2}$.

$\therefore y_{\min}=3\sqrt[3]{2}$.

错因　$x^2=\frac{2}{x}=\frac{1}{x}$ 无解，即不能取到“=”号.

正解　$y=x^2+\frac{3}{x}=x^2+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x} \geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{3}{2x}\cdot\frac{3}{2x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{18}$，当且仅当 $x^2=\frac{3}{2x}=\frac{3}{2x}$，即 $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$ 时，$y_{\min}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{18}$.

7. 在含参数的不等式中，求参数的最值问题，一般是把问题转化为求另一函数的最值问题. 设 $x \in A$，$[f(x)]_{\max}=M$，$[f(x)]_{\min}=m$，则有：

①不等式 $t \geq f(x)$ 在 $x \in A$ 上恒成立 $\Leftrightarrow t \geq M$；

②不等式 $t \leq f(x)$ 在 $x \in A$ 上恒成立 $\Leftrightarrow t \leq m$.

例　设 a 是正数，且使不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq a\sqrt{x+y}$ 对一切正数 x、y 都成立，求 a 的最小值.

解法 1　$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq a\sqrt{x+y} \Leftrightarrow a \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} \Leftrightarrow$

$a \geq \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)_{\max}$.

$\because \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2 \leq \frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{2}$，

$\therefore \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}}$，

即 $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} \leq \sqrt{2}$，且当 $x=y$ 时，

$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)_{\max}=\sqrt{2}$.

$\therefore a \geqslant \sqrt{2}$，即 a 的最小值是$\sqrt{2}$.

评述　这里应用了课本习题中的一个题目的结论：$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$，估计每个同学都做过这个题目，建议同学们记住这个补充公式."熟练掌握一些常用的运算方法，记忆一些必要的补充公式，对于提高运算能力是有益的."（引自《高考数学能力考查与题型设计》，教育部考试中心编著，高等教育出版社 1998 年第 1 版，第 95 页）

解法 2　（因为有算术平方根，所以考虑换元法）

设 $x+y=m\ (m>0)$，$x=m\cos^2\alpha$，$y=m\sin^2\alpha$，$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

则$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{m}(\cos\alpha+\sin\alpha)$.

于是，$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant a\sqrt{x+y} \Leftrightarrow \sqrt{m}(\cos\alpha+\sin\alpha) \leqslant a\sqrt{m} \Leftrightarrow a \geqslant \cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\because f(\alpha)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的最大值为$\sqrt{2}$，

$\therefore a \geqslant [f(\alpha)]_{\max}=\sqrt{2}$，$\therefore a$ 的最小值为$\sqrt{2}$.

身边的数学

一块钱哪里去了

一个唱片商店里（图 6－1－1），卖 30 张老式硬唱片，一块钱卖两张，另外 30 张唱片是一块钱卖 3 张. 那天，这 60 张唱片全卖完了. 30 张一块钱两张的唱片收入 15 元. 30 张一块钱 3 张的唱片收入 10 元. 总共是 25 元（图 6－1－2）.

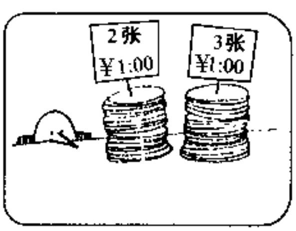


图 6－1－1

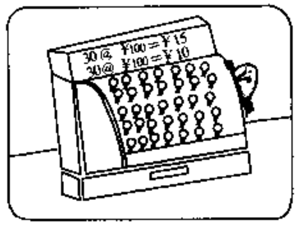


图 6－1－2

第二天商店老板又拿出 60 张唱片放到柜台上.

老板：何必要自找麻烦来分唱片？如果 30 张唱片是一块钱卖两张，30 张是一块钱卖 3 张，何不把 60 张唱片放在一起，按两块钱 5 张来卖（图 6－1－3）？这是一样的.

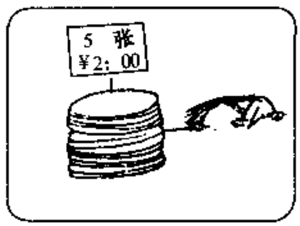


图 6－1－3

商店关门时，60 张唱片全按两块钱 5 张卖出去了（图 6－1－4）. 可是，商店老板点钱时发现只卖得 24 元，不是 25 元，这使他很吃惊.

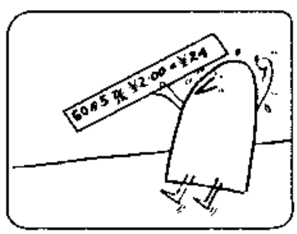


图 6－1－4

你认为这一块钱到哪里去了(图6－1－5)？是不是有个伙计偷了？是不是给顾客找错了钱.

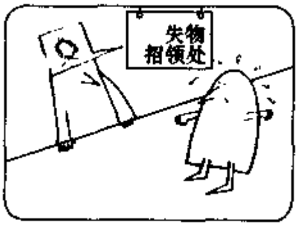


图6－1－5

这条悖论是建立等式和不等式性质的极好例子. 正如上面的故事所表明的，那个老板觉得把两种唱片放在一起，每5张卖两块钱，和分开来一种卖两张一块钱，一种卖3张一块钱是“同样的”，这就搞错了. 没有任何道理能说明两种卖法应该收入同样的钱数. 上面的例子中两者之间的差很小，以致于看上去好像那一块钱是不留意造成的，成老是遗失了.

如果考虑一个同样的问题，但价格稍为不同些，大家就更能清楚地看出问题了. 假定贵一些的唱片卖两块钱3张，或者说是每张唱片的价格是2/3元. 较便宜的唱片卖1块钱两张，或者说每张1/2元. 老板把这两种唱片混合，卖3块钱5张. 假设每种有30张，如前面一样，分开来卖，得到35元，可是合起来卖60张共得36元. 这样老板就多得了1元，而不是少了1元！

这时，我们就需要对此悖论作一下代数分析了. 我们假设价格较高的唱片是每张卖 b/a 元，价格较低的唱片每张卖 d/c 元. 两个分数都要化简为最简分数. 例如上面唱片中的例子，贵的唱片是一块钱两张，即每张1/2元；便宜的唱片是一块钱3张，即每张1/3元，故 $a=2$，$c=3$，$b=d=1$.

假若所有唱片都各以两种不同的价格卖，则一张唱片的平均价格是 b/a 和 d/c 之和的一半. 如果两种唱片合起来，按一个价格卖，那么 $a+c$ 张唱片就卖 $b+d$ 元钱，一张唱片的平均价格就是 $\frac{b+d}{a+c}$. 显然，两套唱片合起来卖要收入同样多的钱数就必须是

$$\frac{\frac{b}{a}+\frac{d}{c}}{2}=\frac{b+d}{a+c}$$

令人吃惊的是，这个等式只有在 $a=c$ 时成立，而与 b 和 d 的值无关. 如果 $a>c$，则两套唱片合起来卖可得的钱多一些(自然是在 $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$ 的条件下，如我们这个说明中的一例子，这里 $a=3$，$c=2$). 如果 $a<c$，则合起来卖就要赔钱(如上面唱片所举例子)*.

*为比较两种卖法的差额，可计算如下：

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}-2\left(\frac{b+d}{a+c}\right)$$
$$=\left(\frac{b}{a}-\frac{b+d}{a+c}\right)+\left(\frac{d}{c}-\frac{b+d}{a+c}\right)$$
$$=\frac{bc-ad}{a(a+c)}+\frac{ad-bc}{c(a+c)}$$
$$=\frac{bc-ad}{a(a+c)}\left(1-\frac{a}{c}\right)$$

由于 $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$，所以 $bc-ad>0$.

若 $a=c$，则二者之差为0，

若 $a>c$，则二者之差为负，即单卖赚钱少，

若 $a<c$，则二者之差为正，即单卖赚钱多.

这个例子告诉我们，当看到不同种类的货物联合销售时，要判断我们是否真的买到了便宜货并不是一件轻而易举的事.

联系生活应用题

例 1 （箱体设计的最佳方案问题）如图 6－1－6 所示，为了处理含有某种杂质的污水，要制造一底宽为 2m 的无盖长方体沉淀箱，污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出. 设箱底的长度为 a m，高为 b m，已知流水中杂质的质量分数与 a、b 的乘积成反比，现有制箱材料 60m^2，问当 a、b 各为多少时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（A、B 孔的面积忽略不计）？

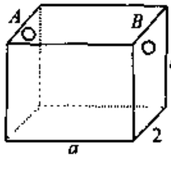


图 6－1－6

解法 1　设 y 为流出的水中杂质的质量分数，则 $y=\frac{k}{ab}$，其中 $k>0$ 为比例系数，依题意，所求 a、b 值使 y 最小.

根据题设，有 $4b+2ab+2a=60(a>0,b>0)$，得 $b=\frac{30-a}{2+a}(0<a<30)$.

$$\therefore y=\frac{k}{ab}=\frac{k}{\frac{30a-a^2}{2+a}}=\frac{k}{-a+32-\frac{64}{a+2}}=$$

$$\frac{k}{34-\left(a+2+\frac{64}{a+2}\right)}\geqslant\frac{k}{34-2\sqrt{(a+2)\cdot\frac{64}{a+2}}}$$

$$=\frac{k}{18}.$$

当且仅当 $a+2=\frac{64}{a+2}$ 时，等号成立，y 达到最小值，这时 $a=6$，$a=-10$（舍去）. 将 $a=6$ 代入 b 的表达式得 $b=3$，所以当 a 为 6m，b 为 3m 时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

解法 2　依题意，即所求的 a、b 值使 ab 最大. 由题设知

$4b+2ab+2a=60(a>0,b>0)$，即 $a+2b+ab=30(a>0,b>0)$.

$\because a+2b\geqslant2\sqrt{2ab}$，

$\therefore 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab}+ab\leqslant30$（当且仅当 $a=2b$ 时取等号）.

由 $a>0,b>0$，解得 $0<ab\leqslant18$，

即当 $a=2b$ 时，ab 取得最大值为 18.

$\therefore 2b^2=18$，解得 $b=3,a=6$.

故当 a 为 6m，b 为 3m 时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

评述　在实际生活中，有关统筹安排、最佳决策、最优化的问题，可以通过对给出的一些数据进行分析，转化成相应的不等式问题，并利用不等式的有关知识和方法予以解决. 本题主要考查学生综合应用所学数学知识. 思想和方法解决实际问题的能力，考查建立函数关系、不等式性质、最大值和最小值等基础知识，其中解法 1 从建立函数关系出发，运用基本不等式求最值；而解法 2 是由方程出发，构造关于 ab 的不等式，从而求出 ab 的最大值.

例 2 某游泳馆出售冬季游泳卡，每张 240 元，使用时规定不记名，每卡每次只限 1 人，每天只限 1 次，某班有 48 名同学，老师打算组织同学们集体去游泳，除需购买若干张游泳卡外，每次游泳还需包一辆汽车，无论乘坐多少名同学，每次的包车费均为 40 元，若使每个同学游 8 次，每人至少交多少元钱？

解　设买 x 张游泳卡，则游泳活动的总开支为

$$y=\frac{48\times8}{x}\cdot40+240x=240\left(\frac{64}{x}+x\right)\geqslant3840.$$

当且仅当 $x=\frac{64}{x}$，即 $x=8$ 时最合算，故每人最少交 $\frac{3840}{48}$ 元 $=80$ 元.

例 3 某工厂每天需原料 8t，每吨价格为 500 元，每购买一次的手续费为 400 元，工厂仓库保管费为每吨每天 1 元. 通常结算仓库保管费用时，按"每批原料吨数 × 每批原料进仓至用完时储存天数 × 每吨每天保管费用 $\times\frac{1}{2}$"计算. 原料供应商提出价格折扣条件为：一次订购 m t 以上可享受 9 折优惠. 试问当 m 取什么

值时,该厂将不愿接受折扣条件?

解　设工厂打算一次购进 n t,

①若 $n\leqslant m$,则不享受优惠,此时所付费用为:购原料及手续费 $500n+400$,这批原料可用 $\frac{n}{8}$ 天,共需保管费 $n\times\frac{n}{8}\times\frac{1}{2}$ 元 $=\frac{n^2}{16}$ 元.

$\therefore$ 平均每天费用 $y=(500n+400+\frac{n^2}{16})\div\frac{n}{8}=4000+\frac{3200}{n}+\frac{n}{2}\geqslant 4000+2\sqrt{1600}=4080$.

当且仅当 $\frac{3200}{n}=\frac{n}{2}$,即 $n=80$ 时,费用最省,即不享受优惠待遇时,每 10 天购买一次原料,平均每天费用为 4080 元.

②若 $n>m$,则享受优惠,此时所付费用为购原料费及手续费 $450n+400$,这些原料可用 $\frac{n}{8}$ 天,共需保管费 $\frac{n^2}{16}$ 元.

$\therefore$ 平均每天费用 $\left(450n+400+\frac{n^2}{16}\right)\div\frac{n}{8}=3600+\frac{3200}{n}+\frac{n}{2}$.

当 $3600+\frac{3200}{n}+\frac{n}{2}>4080$ 时,厂方将不愿享受优惠,解此不等式 $n>\frac{960+160\sqrt{35}}{2}$ t $\approx$ 954t,即当原料供应商提出一次订购数 m 超过 954t 才可享受优惠价时,厂方不愿享受优惠.

例 4　(宣传画所用纸张面积问题)设计一幅宣传画,使画面面积为 4840cm^2,画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$,画面上、下各留 8cm 的空白,左、右各留 5cm 空由,怎样确定画面高与宽的尺寸,才能使宣传画所用纸张面积最小?如果要求 $\lambda\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$,那么 λ 为何值时,能使宣传画所用纸张面积最小?

解　设画面高为 x cm,宽为 λx cm,则 $\lambda x^2=4840$.

设纸张面积为 S,则有 $S=(x+16)(\lambda x+10)=\lambda x^2+(16\lambda+10)x+160$.

将 $x=\frac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}$ 代入上式,得 $S=5000+44\sqrt{10}\left(8\sqrt{\lambda}+\frac{5}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

当 $8\sqrt{\lambda}=\frac{5}{\sqrt{\lambda}}$,即 $\lambda=\frac{5}{8}(\frac{5}{8}<1)$ 时,S 取得最小值,此时高 $x=88$cm,宽 $\lambda x=55$cm.

如果 $\lambda\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$,可设 $\frac{2}{3}\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1\leqslant\frac{3}{4}$,则由 S 的表达式,得

$S(\lambda_1)-S(\lambda_2)=44\sqrt{10}(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2})(8-\frac{5}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}})$.

$\because\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\geqslant\frac{2}{3}\geqslant\frac{5}{8}$,$\therefore 8-\frac{5}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}>0$.

因此 $S(\lambda_1)-S(\lambda_2)>0$,是单调增函数.

故当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时,$S(\lambda)$ 取最小值,宣传画所用纸张面积最小.

例 5　(运输成本的估算问题)甲、乙两地相距 s km,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c km/h. 已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成,可变部分与速度 v(km/h)的平方成正比,且比例系数为 b,固定部分为 a 元.

(1)把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(km/h)的函数,并指出这个函数的定义域;

(2)为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?

解　(1)由题意,得 $y=(a+bv^2)\frac{s}{v}=\frac{as}{v}+bsv=s(\frac{a}{v}+bv)(0<v\leqslant c)$.

(2)$\because s,a,b,v\in\mathbf{R}^*$,$\therefore y=s(\frac{a}{v}+bv)\geqslant 2s\sqrt{ab}$.

当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$,即 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$ 时,取得“=”号.

若 $\frac{ab}{b}\leqslant c$,则当 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$ 时,y 有最小值;若

$\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$，则当 $v=c$ 时，y 有最小值.

$$s(bv+\frac{a}{v})-s(bc+\frac{a}{c})=\frac{s}{vc}(c-v)(a-bcv)$$

$\because v\in(0,c]$，$\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$，即 $a<bc^2$，

$\therefore a-bcv\geqslant a-bc^2>0$.

$\therefore s\left(bv+\frac{a}{v}\right)\geqslant s\left(bc+\frac{a}{c}\right)$.

综上所述，为了使全程成本最小，当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}\leqslant c$ 时，行驶速度应为 $\frac{\sqrt{ab}}{b}$；当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时，行驶速度应为 c.

评述　最优化问题是不等式应用题中的最为常见的题型，应阅读理解材料，弄清问题背景，建立合理的数学模型，将实际问题转化为数学问题，在运用不等式知识寻求最优解的过程中要注意相应的条件. 如在本题中，由均值不等式易得，当 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$ 时，y 取最小值，然而 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$，怎么办？至此，应对 $\frac{\sqrt{ab}}{b}$ 分类讨论，由 $y=bv+\frac{a}{v}$ 的图像，当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时，y 有最小值，剩下的问题只需证明 $s\left(bv+\frac{a}{v}\right)\geqslant s\left(bc+\frac{a}{c}\right)$ 即可.

例7　某工厂拟建一座平面图为矩形且面积为 200m^2 的三级污水处理池（平面图如图 6－1－7 所示），由于地形限制，长、宽都不能超过 16m，四周围池壁建造单价为每米 400 元，中间两道隔墙建造单价为每米 248 元，池底建造单价为每平方米 80 元，池壁的厚度忽略不计. 试设计污水池的长和宽，使总造价最低，并求出最低造价.

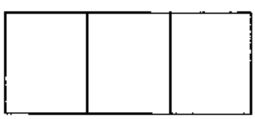


图 6－1－7

解　设污水池长为 x m，则宽为 $\frac{200}{x}$m，于是总造价

$$Q(x)=400\left(2x+2\cdot\frac{200}{x}\right)+248\times2\times\frac{200}{x}+80\times200$$

即 $Q(x)=800\left(x+\frac{324}{x}\right)+16000$.

由 $\begin{cases}0<x\leqslant16\\0<\frac{200}{x}\leqslant16\end{cases}$ 得 $12\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant16$.

下面研究 $Q(x)$ 在 $[12\frac{1}{2},16]$ 上的单调性.

对任意的 $x_1,x_2\in[12\frac{1}{2},16]$，且 $x_1<x_2$，有 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2<16^2<324$，

即 $x_1x_2-324<0$.

$\because Q(x_2)-Q(x_1)=800[(x_2-x_1)+324(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1})]=\frac{800(x_2-x_1)(x_1x_2-324)}{x_1x_2}<0$，

$\therefore Q(x_1)>Q(x_2)$，故 $Q(x)$ 在 $\left[12\frac{1}{2},16\right]$ 上是减函数，从而有 $Q(x)\geqslant Q(16)=45000$.

即当污水池的长为 $x=16$m 宽为 $\frac{200}{x}\text{m}=12.5$m 时，有最低造价 45000 元.

例7　（纸片翻折问题）如图 6－1－8 所示，$ABCD$ 是矩形纸片，将纸片左下角折起，使点 A 与 BC 上一动点 P 重合，且折痕线段 MN 的端点 M、N 分别在边 AB、AD 上，若 $AB=2$，$AD=4$，则怎样折纸可使得折痕 MN 最短？

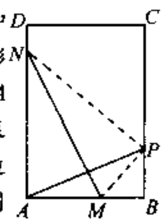


图 6－1－8

解　设 $\angle PAB=\theta$，$|MA|=x$，

由题意，知 $|MA|=|MP|$.

在 $\triangle PBM$ 中，$|MB|^2+|PB|^2=|MP|^2$.

$\therefore(2-x)^2+(2\tan\theta)^2=x^2$.

$\therefore x=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$.

在 Rt $\triangle MNA$ 中，$|MN|=\frac{|MA|}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}\left(\frac{\pi}{12}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$.

$\because\sin^2\theta\cos^4\theta=\frac{1}{2}\times2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\theta\leqslant\frac{1}{2}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$.

$\therefore |MN|_{min}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 当 $2\sin^2\theta=\cos^2\theta$，即 $\theta=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

评述　在最值问题中，引入一个合适的变量是非常关键的一步. 在该题中，引进 $\angle PAB=\theta$ 为参变量，大大简化了运算，最后使用平均不等式求其最值是常用方法.

例8　(拉灯的高度问题)现在要在一些家庭圆桌上方装一只“拉灯”，由于该灯到桌面的距离可以调节，这样桌面上的光线亮度可以根据不同需要加以选择. 根据光学上的定律，电灯 A 到圆桌边缘 B 的照度 $i=\frac{k\sin\varphi}{l^2}$，其中 k 为电灯的发光强度，l 为电灯到圆桌边缘的距离，φ 为电灯到圆桌边缘光线与桌面所成的角，那么在半径为 r 的圆桌上方多高作为灯的位置时(如图 6－1－9 所示)，才能使桌子边缘上的照度最大?

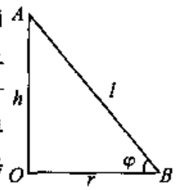


图 6－1－9

解　在公式 $i=\frac{k\sin\varphi}{l^2}$ 中，$0°<\varphi<90°$，在 Rt$\triangle AOB$ 中，$l=\frac{r}{\cos\varphi}$.

代入上式，得 $i=\frac{k}{r^2}\sin\varphi\cos^2\varphi=$

$\frac{k}{r^2}(\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}(\cos^2\varphi)$.

$i^2=\frac{k^2}{2r^4}\cdot 2\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\cos^2\varphi$

$\leqslant\frac{k^2}{2r^4}\cdot\left(\frac{2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\cos^2\varphi}{3}\right)^3=\frac{4k^2}{27r^4}$.

所以　$i\leqslant\frac{2k}{3\sqrt{3}r^2}$.

当且仅当 $2\sin^2\varphi=\cos^2\varphi$，即 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，所以当 $h=r\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}r$ 时，圆桌边缘的照度最大，其最大值为 $\frac{2\sqrt{3}k}{9r^2}$.

评述　利用均值定理求函数的最大值时，要注意等号成立的条件. 当“和”为定值时，“积”有最大值. 在解决具体问题时，“和”为定值的情形往往需要适当的配凑.

例9　(电路消耗功率最大问题)如图 6－1－10 所示，电路中电源的电动势为 E，内阻为 r，R_1 为固定电阻，求可变电阻 R_2 调至何值时，它所消耗的电功率最大，其最大功率是多少?

解　依据电学知识，建立数量关系，利用不等式的知识求最值.

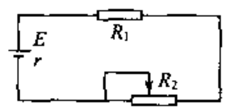


图 6－1－10

由电学知识，得 $P=UI=\frac{U_2(E-U_2)}{R_1+r}$

$\because U_2(E-U_2)\leqslant\left[\frac{U_2+(E-U_2)}{2}\right]^2=\frac{E^2}{4}$(定值)，

$\therefore$ 当且仅当 $U_2=E-U_2$，即 $U_2=\frac{E}{2}$ 时，P 达到最大值，此时 $\frac{E}{I_1}=\frac{2U_2}{I_2}$. $I_1=I_2$，得 $2R_2=r+R_1+R_2$，即 $R_2=r+R_1$. 此时消耗的电功率最大，其最大的功率是 $\frac{E^2}{4(r+R_1)}$.

评述　利用基本不等式求最值问题，要注意使用的条件“一正、二定、三相等”，即已知 x，y 都是正数，则

(1)若积 xy 是定值 P，则当且仅当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$;

(2)若和 $x+y$ 是定值 S，则当且仅当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

其证明原理是：$x,y\in\mathbf{R}^+$　$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$.

例10　木梁的强度与梁宽和梁高的平方之积成正比，从圆柱形的木材截取横面是矩形的木梁，问如何截能使梁的强度最大?