高等学校教材

概率论与数理统计

主编　苏德矿　张继昌

高等教育出版社

高等学校教材

概率论与数理统计

主编　苏德矿　张继昌
编者　王志江　沈　灏　宗云南　张迪平
　　　王　勤　吴志松　赵雅囡　周君兴

高等教育出版社

内容提要

本书主要内容有：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理与中心极限定理、数理统计基础、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析初步。可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)本科生概率论与数理统计课程的教材，也可作为经济、管理等有关专业本科生的概率论与数理统计课程的教材。书中冠有“*”的部分供对概率论与数理统计有较高要求的专业选用和有兴趣欲扩大知识面的学生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/苏德矿，张继昌主编. —北京：高等教育出版社，2006.6

ISBN 7-04-019380-9

Ⅰ.概… Ⅱ.①苏…②张… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 052619 号

策划编辑 徐 可　**责任编辑** 高尚华　**封面设计** 李卫青
责任绘图 吴文信　**版式设计** 王艳红　**责任校对** 朱惠芳
责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京七色印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2006年6月第1版
印　　张	16.5	印　　次	2006年6月第1次印刷
字　　数	300 000	定　　价	17.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　19380-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

前　言

本书是根据教育部高等学校工科数学教学指导委员会拟定的概率论与数理统计课程教学基本要求，并参照中华人民共和国教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试概率论与数理统计部分考试大纲，在认真研究现行教材的基础上，取长补短而编写的。

本书主要内容有：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理与中心极限定理、数理统计基础、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析初步。可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)本科生概率论与数理统计课程的教材，也可作为经济、管理等有关专业本科生的概率论与数理统计课程的教材。书中冠有“*”的部分供对概率论与数理统计有较高要求的专业选用和有兴趣欲扩大知识面的学生阅读。

我们在编写时强调基本概念、基本思想、基本方法，力求做到由浅入深、深入浅出、化难为易、说理透彻、简明扼要，有较多的例题并具有典型性。以期举一反三，并注重实际应用。既便于教师教学，更利于学生自学。

本书由苏德矿、张继昌主编。王志江、沈灏、宗云南、张迪平、王勤、吴志松、赵雅囡、周君兴(按章编写排序)共同编写。第一章由中国计量学院王志江编写，第二章由杭州电子科技大学沈灏编写，第三章由浙江理工大学宗云南编写，第四章由浙江科技学院张迪平编写，第五章由浙江工业大学王勤编写，第六章、第九章由浙江林学院吴志松编写，第七章由浙江大学城市学院赵雅囡编写，第八章由浙江财经学院周君兴编写。全书由张继昌统稿。

浙江大学教务处副处长金蒙伟教授对本书的编写给予了极大的关怀与支持。在此向他表示衷心的感谢。

本教材的书稿虽经多次认真修改与校对，但仍然会有一些错误，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学过程中不断完善起来。

编者于杭州

2006年3月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

§1.1　随 机 事 件

一、随机试验与样本空间

在自然界与人类的社会活动中，人们观察到的现象大体可以分为两种类型：

一类是可事前预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的，或者根据它过去的状况，在相同条件下完全可以预言将来的发展，例如，向空中抛掷一颗骰子，骰子必然会下落；在没有外力作用下，物体必然静止或做匀速直线运动；太阳每天必然从东边升起，西边落下等等，称这一类现象为确定性现象或必然现象.

另一类现象则不然，例如，远距离射击较小的目标，可能击中也可能击不中；又如掷骰子，可能出现 1 点到 6 点中的某一点；从含有 5 件次品的一批产品中抽取 3 件，取到的次品件数可能是 0、1、2、3 等等，这类在个别试验中呈现不确定的结果，而在相同条件下大量重复试验中呈现规律性的现象称之为随机现象，这种规律性称为统计规律性. 概率论是研究随机现象统计规律性的科学.

在一定条件下，对自然与社会现象进行的观察或实验称为试验. 在概率论中，把满足以下条件的试验称为随机试验(random experiment)：

1. 试验在相同条件下是可重复的；

2. 试验的全部可能结果不止一个，且都是事先可以知道的；

3. 每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果，至于是哪一个结果则事前无法预知.

为简单计，今后凡是随机试验简称试验，并记之以英文字母 E，称试验的每一个结果为样本点，并称全体样本点的集合为试验的样本空间，样本点与样本空间分别用希腊字母 ω 和 Ω 表示.

例 1　设试验 E_1：将一枚硬币连掷两次，观察两次中出现正面、反面的情况，此试验有 4 种结果，即 4 个样本点，样本空间是

$$\Omega=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$$

其中样本点(正,正)表示第一，二次均掷出正面，其余类推.

例2 设试验 E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数，样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

例3 设试验 E_3：从装有三个白球(记为1,2,3号)与两个黑球(记为4,5号)的袋中任取两个球.

(1) 如果观察取出的两个球的颜色，设样本点：

ω_0 表示“取出两个白球”

ω_1 表示“取出一个白球与一个黑球”

ω_2 表示“取出两个黑球”

于是样本空间是由三个样本点构成的集合

$$\Omega'_3=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$$

(2) 如果观察取出的两个球的号码，则样本点：

ω_{ij}表示“取出第 i 号与第 j 号球”($1\leqslant i<j\leqslant 5$)

于是样本空间是由 $C_5^2=10$ 个样本点构成的集合

$$\Omega''_3=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\}$$

这个例子表明，试验的样本点与样本空间是根据试验的内容而确定的.

例4 设试验 E_4：观察一台电视机的寿命(从开始使用到第一次维修的时间)，则样本空间

$$\Omega_4=\{\omega_x\mid x\geqslant 0\}$$

例5 设试验 E_5：观察并记录某地区每日中午12点时的气温，假设该地区这一时刻的气温不会低于4 ℃，也不会高于35 ℃，则样本空间

$$\Omega_5=\{\omega_x\mid 4\leqslant x\leqslant 35\}$$

例6 设试验 E_6：观察顾客在超市购买的商品数，则样本空间

$$\Omega_6=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_i,\cdots\}$$

其中 i 表示该顾客在超市购买的商品数.

二、随机事件

试验的结果称为事件，如果在每次试验的结果中，某事件可能发生，也可能不发生，则这一事件叫做随机事件，简称事件，如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做必然事件；如果某事件一定不发生，则叫做不可能事件.

通常用 A，B，C，…表示随机事件，而 Ω 表示必然事件，$\varnothing$ 表示不可能事件.

例7 已知一批产品共100个，其中有95个合格品和5个次品. 检查产品

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

质量时，从这批产品中任意抽取 10 个来检查，则在抽出的 10 个产品中，“次品数不多于 5 个”这一事件是必然事件 Ω，“次品数多于 5 个”这一事件是不可能事件$\varnothing$；而事件 A：“没有次品”；B：“恰有 1 个次品”；C：“有 2 个或 3 个次品”；D：“次品数少于 4 个”等等都是随机事件.

现在我们说明随机事件与样本空间的关系.

在例 3 中，设随机事件 A 表示“取出的两个球都是白球”，则对于样本空间 Ω'_3 来说，我们有

$$A = \{\omega_0\}$$

而对于样本空间 Ω''_3 来说，我们有

$$A = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$$

这表明随机事件 A 是样本空间 Ω'_3 或 Ω''_3 的一个子集.

由此可见，任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集，该子集中任一样本点 ω 发生时事件 A 即发生.

因为样本空间 Ω 中任一样本点 ω 发生时，必然事件 Ω 都发生，所以 Ω 是所有样本点构成的集合. 这就是说，必然事件 Ω 就是全集.

因为样本空间 Ω 中任一样本点 ω 发生时，不可能事件$\varnothing$都不发生，所以$\varnothing$是不含任何样本点的集合，这就是说，不可能事件$\varnothing$是空集.

应该指出，试验的任一样本点 ω 也是随机事件，今后我们将称试验的样本点为试验的基本事件，显然，基本事件就是样本空间 Ω 的仅由单个样本点构成的子集.

三、随机事件的关系及运算

既然事件是样本空间的某个子集，所以集合论中的包含、相等、并、交等概念以及集合的运算对事件都应适用. 那么这些关系与运算对事件而言应赋予怎样的涵义呢?

1. 事件的包含

如果事件 A 的发生必然导致 B 发生，即事件 A 的样本点都是事件 B 的样本点，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B 中，此时，也称事件 A 是 B 的子集，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$，如图 1－1.

事件 A 是 B 的子事件即 $B \supset A$，换一说法：如果事件 B 不发生必导致事件 A 也不发生.

特别地，若 $B \supset A$ 且 $A \supset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$.

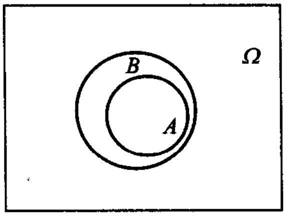
由于必然事件在每一次试验中都发生，所以对任何一个随机事件 A 都有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega$$

2. 事件的和(并)

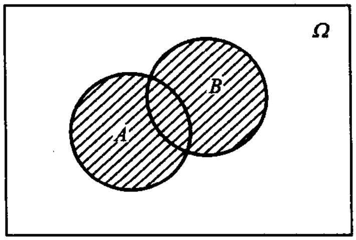
“两事件 A 与 B 中至少有一事件发生”这一事件叫做事件 A 与事件 B 的和(并)，记作 $A\cup B$.

$A\cup B$ 是由 A 或 B 的所有样本点组成的集合 $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$，如图1－2所示.



$B\supset A$

图1－1



$A\cup B$

图1－2

类似地，“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”这一事件称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记作

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

例8 有两门火炮同时向一个目标各射击一次，设 A 表示甲火炮击中目标，B 表示乙火炮击中目标，C 表示目标被击中，则 C 表示事件 A 或 B 至少有一个发生，即

$$C=A\cup B$$

3. 事件的积(交)

“事件 A 与 B 同时发生,”这一事件称事件 A 与事件 B 的积事件(或交事件)，记作 $A\cap B$ 或 AB.

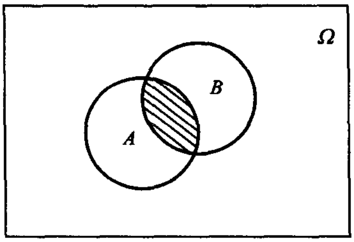
AB 是由 A 与 B 的所有公共样本点组成的集合，如图1－3所示. 类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件(交事件)，记作

$$A_1A_2\cdots A_n \quad 或 \quad \bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

4. 互不相容事件(互斥事件)

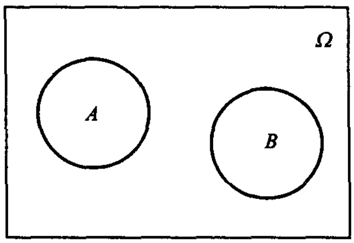
如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容事件(或互斥事件). 互不相容事件 A 与 B 没有公共样本点，如图1－4所示.

如例7中，A 与 B 互斥，A 与 C 互斥，B 与 C 互斥.



$A\cap B$

图 1－3



$AB=\varnothing$

图 1－4

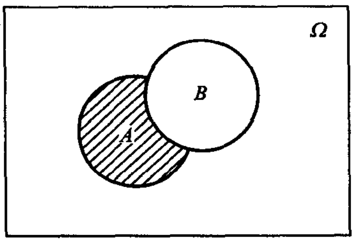
5. 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"，这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$，$A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合，如图1－5所示.

6. 对立事件(互逆事件)

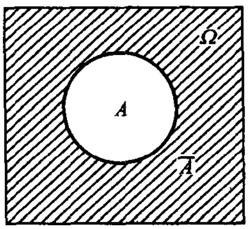
如果两事件 A 与 B 互不相容，并且它们中必有一事件发生，即两事件 A 与 B 有且仅有一事件发生，即 $A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 对立(或互逆)，称事件 B 是事件 A 的对立事件(或逆事件)，同样，事件 A 也是事件 B 的对立事件(或逆事件)，记作 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$.

$\overline{A}$ 是由所有属于 Ω 而不属于 A 的样本点组成的集合，如图 1－6 所示，显然，$\overline{\overline{A}}=A$，$A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$.



$A-B$

图 1－5



$\overline{A}$

图 1－6

例 9 抛掷一颗均匀的骰子，观察出现的点数，记 A 表示出现奇数点，则 $\overline{A}$ 表示出现偶数点，同样，若 B 表示出现的点数小于 3，则 $\overline{B}$ 表示出现的点数大于或等于 3.

注意：互不相容事件与对立事件两个不同的概念，若 B 是 A 的对立事件，则有 $A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，故 A 与 B 一定互不相容，反之若 A 与 B 互不

相容，仅有 $AB=\varnothing$，不一定有 $A\cup B=\Omega$ 成立，所以，B 不一定是 A 的对立事件.

7. 完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组.

根据以上定义，容易得到以下事件之间的运算规律：

(1) 交换律 $$A\cup B=B\cup A,\ AB=BA \tag{1.1}$$

(2) 结合律 $$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ (AB)C=A(BC) \tag{1.2}$$

(3) 分配律 $$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC),\ A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C) \tag{1.3}$$

(4) 摩根律 $$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B} \tag{1.4}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \tag{1.5}$$

例 10 掷一颗骰子，观察点数，令 A 表示掷出奇数点，B 表示掷出点数不超过 3，C 表示掷出点数大于 2，D 表示掷出 5 点，则

$$A=\{1,3,5\},B=\{1,2,3\},C=\{3,4,5,6\},D=\{5\}$$

于是 $$A\cup B=\{1,2,3,5\},\ B\cup C=\Omega,\ AB=\{1,3\},\ BD=\varnothing$$

$$\overline{A}=\{2,4,6\},\ \overline{A}C=\{4,6\},\ A-B=\{5\},\ B-A=\{2\}$$

例 11 某人连续购买体育彩票，令事件 A、B、C 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖，试用 A，B，C 及其运算表示下列事件：(1) 第三次未中奖；(2) 第三次才中奖；(3) 恰有一次中奖；(4) 至少有一次中奖；(5) 不止一次中奖；(6) 至多中奖两次.

解 (1) $\overline{C}$

(2) $\overline{A}\,\overline{B}C$

(3) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

(4) $A\cup B\cup C$

(5) $AB\cup AC\cup BC=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$

(6) $\overline{ABC}$

习题 1－1

1. 指出下列命题哪些正确，哪些不正确？

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$

(2) $A=A\overline{B}\cup AB$

(3) $\overline{A}B=A\cup B$

(4) $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(5) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$

(6) 若 $A\subset B$，则 $A=AB$

(7) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=A$　　(8) 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$

(9) 若 $AB=\varnothing$，则 $\overline{A}\,\overline{B}\neq\varnothing$　　(10) 若 $AB=\varnothing$，则 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$

2. 在分别标有号码 1～8 的八张卡片中任抽一张，设事件 A 为"抽得一张标号不大于 4 的卡片"，事件 B 为"抽得一张标号为偶数的卡片"，事件 C 为"抽得一张标号为能被 3 整除的卡片".

(1) 试写出试验的样本点和样本空间；

(2) 试将下列事件表示为样本点的集合，并说明分别表示什么事件？

(a) AB　　(b) $A\cup B$　　(c) $\overline{B}$

(d) $A-B$　　(e) $\overline{BC}$　　(f) $\overline{B\cup C}$

3. 将下列事件用事件 A、B、C 表示出来：

(1) 只有 A 发生；　　(2) A 不发生，但 B、C 至少有一个发生；

(3) 三个事件恰有一个发生　　(4) 三个事件至少有两个发生；

(5) 三个事件都不发生；　　(6) 三个事件最多有一个发生；

(7) 三个事件不都发生；　　(8) 三个事件至少有一个发生.

4. 设 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，$A=\{2,3,5\}$，$B=\{3,5,7\}$，$C=\{1,3,4,7\}$，求下列事件：

(1) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$　　(2) $\overline{A(\overline{BC})}$

§1.2 概　　率

一、频率和概率的统计定义

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为随机事件 A 发生的频率（简称频率）记作 $W(A)$；用公式表示如下：

$$W(A)=\frac{m}{n} \tag{1.6}$$

显然，任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数：$0\leqslant W(A)\leqslant 1$. 对于必然事件，在任何试验序列中，总有 $m=n$，所以必然事件的频率恒等于 1，即 $W(\Omega)=1$.

同理，$W(\varnothing)=0$.

经验证明：当试验重复多次时，随机事件 A 的频率具有一定的稳定性，就是说，在不同的试验序列中，当试验次数充分大时随机事件的频率常在一个确定的数字附近摆动.

例如：我们来看下面的试验结果，表 1－1 中 n 表示抛硬币的次数，m 表示正面向上的次数，$W=\frac{m}{n}$ 表示正面向上的频率.

表 1－1

试验者	抛掷次数 n	出现正面的次数 m	出现正面的频率 m/n
德摩根	2 048	1 061	0.518
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K.皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K.皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

从表中可以看出，不管什么人抛掷，当试验次数逐渐增多时，出现“正面向上”的频率逐渐接近0.5，而试验次数 n 越大，则 m/n 对0.5这个数值的偏差就越小，并逐渐稳定在0.5这个数值上，因而，数值0.5的确反映抛掷一枚均匀硬币时出现“正面向上”这一事件发生的可能性大小.

类似的例子可以举出很多，这说明随机事件在大量重复试验中存在着某种客观规律性——频率的稳定性，因为它是通过大量统计数据显示出来的，所以称为统计规律性.

二、概率的定义

由随机事件的频率的稳定性可以看出，随机事件发生的可能性可以用一个数来表示. 这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的介于0与1之间的数叫做随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$. 该定义通常称为概率的统计定义.

当试验次数充分大时，随机事件 A 发生的频率 $W(A)$ 正是在它的概率 $P(A)$ 的附近摆动. 在上面的例子中，我们可以认为正面向上的概率等于0.5.

直接估计某一事件的概率是非常困难的，甚至是不可能的，仅在比较特殊的情况下才能够计算出随机事件的概率. 概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件的概率的方法：我们把多次重复试验随机事件 A 的频率 $W(A)$ 作为随机事件 A 的概率 $P(A)$ 的近似值，即当试验次数 n 充分大时，

$$P(A) \approx W(A) = \frac{m}{n} \tag{1.7}$$

由概率的统计定义，我们可以得到概率的公理化定义：

随机试验的样本空间为 Ω，对随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，若满足下列三个公理，则称 $P(A)$ 为 A 的概率.

1. 非负性：$P(A) \geqslant 0$ (1.8)
2. 规范性：$P(\Omega) = 1$ (1.9)
3. 可加性：A 与 B 互不相容，则

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com