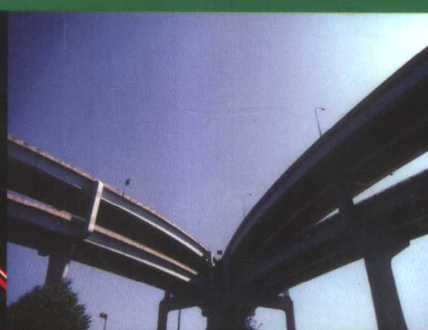
大学物理学

习题分析与解答

Physics



毛骏健 顾 牡 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学物理学
习题分析与解答

毛骏健　顾　牡　主编

宋志怀　吴天刚　鲍鸿吉　刘钟毅　编

高等教育出版社

内容提要

本书是同济大学毛骏健、顾牡主编的彩色版《大学物理学》的配套教学辅导书。本书按章节顺序对主教材中的习题进行了分析并予以解答，以启发学生的思路，巩固所学；并把每章的基本要求和知识要点给予简要的梳理，以帮助学生全面系统地理解主教材的内容。

本书可供以《大学物理学》作为主要授课教材的师生使用，也可供其他读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习题分析与解答 / 毛骏健，顾牡主编.
—北京：高等教育出版社，2006.7
ISBN 7-04-019688-3

Ⅰ.大… Ⅱ.①毛…②顾… Ⅲ.物理学-高等学校-解题 Ⅳ.O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 057667 号

策划编辑 陶 铮 **责任编辑** 张海雁 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹文军
版式设计 史新薇 **责任校对** 张 颖 **责任印制** 张泽业

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中国农业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168 1/16	**版　　次**	2006 年 7 月第 1 版
印　　张	13.25	**印　　次**	2006 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	390 000	**定　　价**	20.20 元

物料号 19688-00

前 言

物理学是一门重要的基础科学。长期以来，物理学作为理工科大学生的一门基础必修课程，并不仅仅是因为物理学知识本身有多么重要，更重要的是要学会一种科学的思维方式以及学会对事物的认识、判断、处理和解决的方法，从而使学生的综合能力得到培养。学习物理学，做习题是学习过程中的一个不可缺少的环节。通过演算习题，可以加深对物理学基本概念和规律的理解，提高学生分析问题和解决问题的能力。德国著名物理学家索末菲（A. Sommerfeld，1868—1951）曾告诫他的学生海森伯（W. Heisenberg，1901—1976，量子力学的奠基人之一）："要勤奋地去练习，只有这样你才会发现哪些你理解了，哪些你还没有理解。"但是我们在教学中发现，学生解题能力较差，常抓不住要领，由此萌发畏惧学物理的情绪。尤其是近几年高等教育向大众化方向转型，随着招生规模扩大，高校师生比降低，每位学生得到的辅导和答疑的机会减少；同时由于许多学校公共基础物理课课时数不断被压缩，从而造成习题课、辅导课减少甚至取消，这一切都将造成学生学习上的困难。

本书是毛骏健、顾牡主编的《大学物理学》主教材的配套学习辅导书，编者的目的是希望它能在学生的学习过程中发挥指导作用，帮助他们掌握和理解基本概念，学会分析问题和确立正确的解题思路。书中内容由"基本要求"、"知识要点"和"习题解答"三个部分组成：

（1）"基本要求"给出了每一章基本的教学内容，其中用了"掌握"、"理解"和"了解"三个等级词汇，分别表明对各知识点要求掌握的程度。

掌握：属较高要求。对于要求掌握的内容（包括定理、定律、原理等内容，物理意义及适用条件）都应比较透彻明了，并能熟练地用以分析和计算与理工科大学物理课程水平相适应的有关具体问题。对于一些能由基本定律导出的定理和结论要求会推导。

理解：属一般要求。对于要求理解的内容（包括定理、定律、原理等的内容，物理意义及适用条件）都应明了，并能用以分析和计算与理工科大学物理课程水平相适应的简单问题。对于一些能由基本定律导出的定理和结论不一定要求会推导。

了解：属较低要求。对于要求了解的内容，应该知道所涉及的问题的现象和有关实验，并能对其进行定性解释，还应知道与问题直接有关的物理量和公式等的物理意义。对于要求了解的内容，一般不作定量计算的要求，但不排除一些简单直接代公式性质的计算。

（2）"知识要点"列出了各章节内容中的基本概念、基本定律和定理以及基本公式，目的是帮助学生梳理和归纳所学知识，尤其是在复习迎考时，能帮助学生抓住重点。

（3）"习题解答"中的习题汇集了主教材中的所有习题，这些习题都是从国内外教材中精选，并改编而成的。其中许多习题结合实际和应用，内容新颖，能够引发联想和拓展思路；也有一些概念性强，看似抽象的习题，这些习题能够帮助学生理清基本概念，能够训练学生的逻辑思维、培养判断、分析和解决问题的能力。每道题的解答包括分析和解题两部分，对于较难和较复杂的题目，我们更注重分析，帮助学生理清思路，正确运用概念和公式，以求解题时思路明晰、逻辑性强和推理严密。

本书由主编和参编《大学物理学》主教材的成员编写，最后由毛骏健和顾牡统稿和定稿。

本书是同济大学《大学物理学》立体化教材建设的一个重要组成部分，在整个编写过程中得到了高等教育出版社和同济大学国家级工科物理课程教学基地的资助，同时也得到了同济大学物理教研室广大教师的热情关注和支持，在此，我们向他们表示由衷地感谢。

编　者

2006 年 5 月于同济大学

目　录

第一章　质点运动学

一、基本要求

1. 理解质点模型及参考系的概念.

2. 掌握位置矢量、位移、速度、加速度、角速度和角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量的定义和性质. 能借助于直角坐标系计算质点做空间运动时的速度、加速度.

3. 理解自然坐标系，能计算质点做圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度.

4. 了解质点的相对运动问题.

二、知识要点

1. 基本概念

(1) 质点：把物体看做是一个具有一定质量的几何点来处理实际问题，这样的几何点称为质点，质点是一种理想的模型.

(2) 参考系：为了描述物体的运动而被选定的参考物体称为参考系.

(3) 位置矢量：从坐标原点到某时刻质点所在位置所引的矢量. 在直角坐标系中，位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 随时间 t 的变化关系式——运动方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

(4) 位移：自运动始点指向终点的有向直线线段. 它描述质点在某段时间内位置的变化：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

(5) 速度：描述质点运动快慢和运动方向的物理量. 速度的大小称为速率.

平均速度：
$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

瞬时速度：
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中，速度矢量可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

在自然坐标系中，在速度矢量可以表示为

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$$

(6) 加速度：加速度是反映质点速度矢量随时间变化的物理量.

平均加速度：
$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度：
$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中，加速度可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中，加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

式中切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 反映了速度大小的变化；法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 反映了速度方向的变化.

2. 圆周运动的角量描述

（1）角位置：某时刻质点和坐标原点的连线与参考轴的夹角 θ 称为角位置. 质点在运动时，角位置随时间变化，可表示为

$$\theta=\theta(t)$$

（2）角位移：角位置在 Δt 时间内的变化量，$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$.

（3）角速度：角位移对时间的变化率：

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}$$

（4）角加速度：角速度对时间的变化率：

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

（5）线量与角量的关系：

$$\Delta s=R\Delta\theta$$

$$v=R\omega$$

$$a_t=R\alpha$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

3. 相对运动

一个运动质点在两个做相对平动的参考系中的速度关系为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为质点相对于 S 系的速度，$\boldsymbol{v}'$为质点相对于 S′系的速度，$\boldsymbol{u}$ 为 S′系相对于 S 系的速度.

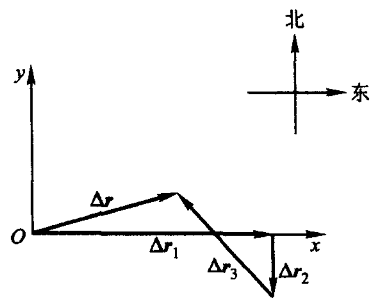
三、习题解答

1－1 一个人自原点出发，25 s 内向东走了 30 m，又在 10 s 内向南走了 10 m，再在 15 s 内向正西北走了 18 m. 求整个过程中

（1）位移和平均速度；

（2）路程和平均速率.

分析 区分位移与路程、平均速度与平均速率在物理概念上的差异. 位移是矢量，是表示空间位置变化的物理量；路程是标量，表示质点实际经过的路径曲线的长度. 平均速度是矢量，是 Δt 时间内位移对时间的平均变化率；平均速率是标量，是 Δt 时间内路程对时间的平均变化率.



习题 1－1 解图

解 建立 Oxy 平面直角坐标系，如习题 1－1 解图所示，根据题意标出每一时段相应的位移 $\Delta\boldsymbol{r}_1$、$\Delta\boldsymbol{r}_2$、$\Delta\boldsymbol{r}_3$ 和合位移 $\Delta\boldsymbol{r}$.

（1）人在 x 方向的位移为

$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3$$
$$=(30+0-18\cos 45°)\ \text{m}=(30-9\sqrt{2})\ \text{m}$$

人在 y 方向的位移为

$$\begin{aligned}\Delta y &= \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 \\ &= (0 - 10 + 18\sin 45^\circ)\ \text{m} = (9\sqrt{2} - 10)\ \text{m}\end{aligned}$$

位移大小

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 17.5\ \text{m}$$

$$\theta = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} = \arctan 0.158 = 9^\circ$$

方向为东偏北 9°. 平均速度大小为

$$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \frac{17.5}{25+10+15}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.35\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 相同,为东偏北 9°.

(2) 人走过的路程为

$$\Delta s = (30 + 10 + 18)\ \text{m} = 58.0\ \text{m}$$

平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{58}{50}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 1.16\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1-2 质点做直线运动,其运动方程为 $x = 12t - 6t^2$(式中 x 以 m 为单位,t 以 s 为单位). 求:

(1) $t = 4$ s 时,质点的位置、速度和加速度;

(2) 质点通过原点时的速度;

(3) 质点速度为零时的位置;

(4) 作 $x-t$ 图,$v-t$ 图和 $a-t$ 图.

分析 因为质点做直线运动,所以可用代数式计算来替代矢量运算. 将运动方程 $x(t)$ 对时间 t 求一阶导数和二阶导数,可分别得到速度和加速度的表达式,由此可以确定任一时刻的位置、速度和加速度.

解 (1) 运动方程为

$$x = 12t - 6t^2$$

速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12 - 12t$$

加速度表达式为

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -12$$

当 $t = 4$ s 时

$$\begin{aligned} x &= (12 \times 4 - 6 \times 4^2)\text{m} = -48\ \text{m} \\ v &= (12 - 12 \times 4)\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = -36\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ a &= -12\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}\end{aligned}$$

(2) 质点通过原点时 $x = 0$,代入运动方程可得

$$12t - 6t^2 = 0$$

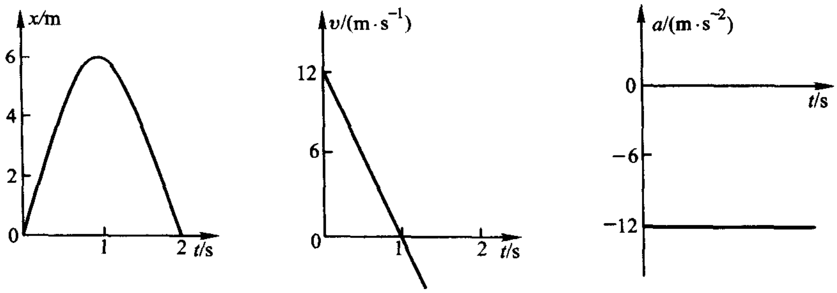
解得质点通过原点的时刻为 $t_1 = 0$,$t_2 = 2$ s,代入速度表达式 $v = 12 - 12t$ 中,分别可得质点通过原点时的速度

$$v_1 = 12\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_2 = -12\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 令 $v = 0$,由速度表达式 $v = 12 - 12t$ 式可确定速度为零时的时刻 $t = 1$ s. 该时刻质点的位置为

$$x = 12t - 6t^2 = 12 \times 1 - 6 \times 1^2 = 6(\text{m})$$

(4) 根据质点的位移、速度和加速度表达式作图.



习题 1－2 解图

1－3 质点沿直线运动，速度 $v=(t^3+3t^2+2)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，如果当 $t=2\ \mathrm{s}$ 时，质点位于 $x=4\ \mathrm{m}$ 处，求 $t=3\ \mathrm{s}$ 时质点的位置、速度和加速度.

分析 对速度函数求导可得质点加速度函数 $a(t)$，对速度函数积分可得运动方程 $x(t)$，由运动方程、速度表达式和加速度表达式可确定任意时刻质点的位置、速度和加速度.

解 质点的运动方程为

$$x=\int v\mathrm{d}t=\int(t^3+3t^2+2)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^4+t^3+2t+x_0$$

x_0 为待定常数. 由 $t=2\ \mathrm{s}$ 时，$x=4\ \mathrm{m}$，可得 $x_0=-12\ \mathrm{m}$，则

$$x=\frac{1}{4}t^4+t^3+2t-12$$

质点的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3t^2+6t$$

将 $t=3$ 代入位置、速度和加速度表示式，分别得

$$x=\left(\frac{1}{4}\times3^4+3^3+2\times3-12\right)\mathrm{m}=41.25\ \mathrm{m}$$

$$v=(3^3+3\times3^2+2)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=56\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a=(3\times3^2+6\times3)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=45\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

1－4 已知质点的运动方程为

$$x=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t,\quad y=\sin\frac{\pi}{4}t$$

式中 x、y 以 m 为单位，t 以 s 为单位. 求：

（1）质点的轨道方程，并在 Oxy 平面上描绘出质点的轨道；

（2）质点的速度和加速度表示式；

（3）$t=1\ \mathrm{s}$ 时质点的位置矢量、速度和加速度.

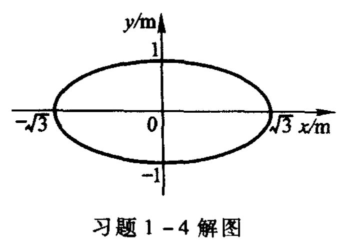
分析 按题意，质点做平面运动. 题设给出了运动方程 x 和 y 的两个分量式，消去参数 t，便可得到质点的轨道方程. 对运动方程求一阶导数和二阶导数可得相应的速度函数和加速度函数. 最后求得 $t=1\ \mathrm{s}$ 时质点的位置矢量、速度和加速度.

解 （1）已知运动方程为

$$x=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t,\quad y=\sin\frac{\pi}{4}t$$

消去参数 t，可得轨道方程

$$\frac{x^2}{3}+y^2=1$$



习题 1－4 解图

可见质点的运动轨道为一椭圆，如习题 1－4 解图所示.

（2）由质点的运动方程可得

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi\sin\frac{\pi}{4}t$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t$$

质点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi\sin\frac{\pi}{4}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t\right)\boldsymbol{j}\right]\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

质点的加速度为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}t$$

$$\boldsymbol{a}=\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2\cos\frac{\pi}{4}t\right)\boldsymbol{i}+\left(-\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\boldsymbol{j}\right]\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

（3）将 $t=1\ \mathrm{s}$ 代入质点的位置矢量、速度和加速度表示式，可得

$$\boldsymbol{r}_1=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\right)\mathrm{m}$$

$$\boldsymbol{v}_1=\left(-\frac{\sqrt{6}}{8}\pi\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\boldsymbol{j}\right)\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\boldsymbol{a}_1=\left(-\frac{\sqrt{6}}{32}\pi^2\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2\boldsymbol{j}\right)\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

1-5 一个人乘摩托车跳越一个大矿坑，他以与水平成 22.5°夹角的初速度 $65\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 从西边起跳，准确地落在坑的东边. 已知东边比西边低 70 m，忽略空气阻力. 问：

（1）矿坑有多宽？他飞越的时间多长？

（2）他在东边落地时的速度多大？速度与水平面的夹角为多大？

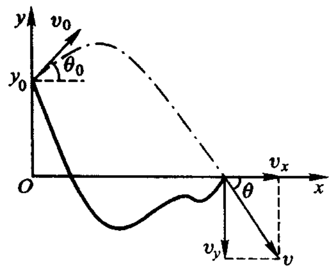
分析 可将飞越过程视为抛体运动. 根据运动叠加原理，可以将运动分解成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的上抛运动来处理. 落地时的速度可由落地时速度的水平分量和竖直分量合成而得.

解 （1）根据题意，建立坐标系 Oxy，如习题 1-5 解图所示.

以摩托车和人作为一质点，其运动方程为

$$x=v_0\cos\theta_0 t \tag{1}$$

$$y=y_0+v_0\sin\theta_0 t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$



习题 1-5 解图

在东边落地点有 $y=0$，由(2)式得

$$y_0+v_0\sin\theta_0 t-\frac{1}{2}gt^2=0$$

代入数据得

$$70+65\times\sin 22.5°t-\frac{1}{2}\times 9.8t^2=0$$

解得飞跃时间为

$$t=7.1\ \mathrm{s}$$

矿坑的宽度为

$$x=v_0\cos\theta_0 t=65\times\cos 22.5°\times 7.1\ \mathrm{m}=426\ \mathrm{m}$$

（2）落地时的速度在 x 轴和 y 轴方向的分量分别为

$$v_x = v_0\cos\theta_0 = 65\times\cos 22.5°\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 60.1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_y = v_0\sin\theta_0 - gt = (65\times\sin 22.5° - 9.8\times 7.1)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = -44.7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

落地时的速度

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{60.1^2+(-44.7)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 74.9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

速度方向与水平面的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{-44.7}{60.1} = -36.6°$$

1-6 质点沿直线运动，加速度 $a=4-t^2(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$，如果当 $t=3$ s 时，质点位于 $x=9$ m 处，速度大小为 $v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求质点的运动方程.

分析 已知质点做直线运动的加速度表达式 $a(t)$，对其一次积分便可得到速度表达式 $v(t)$，再次积分又可得到质点的运动方程 $x(t)$.

解 由加速度表达式 $a(t)$ 积分，可得速度表达式

$$v = \int a\mathrm{d}t = \int(4-t^2)\mathrm{d}t = 4t - \frac{t^3}{3} + v_0$$

再次积分可得

$$x = \int v\mathrm{d}t = 2t^2 - \frac{t^4}{12} + v_0 t + x_0$$

将题设给出的初始条件代入以上两式，可确定两个积分常数，$v_0=-1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$x_0=0.75$ m，则质点的运动方程为

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + 0.75$$

式中 x 以 m 为单位，t 以 s 为单位.

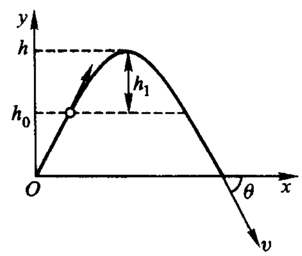
1-7 从地面向空中抛出一球，观察到它在 14.7 m 高处的速度 $\boldsymbol{v}=(3.98\boldsymbol{i}+9.8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$（$x$ 轴沿水平方向，y 轴沿竖直方向）. 当忽略空气阻力时，求：

（1）球能够上升的总高度；

（2）球所经过的总的水平距离；

（3）球落地时速度的大小和方向.

分析 球做抛体运动，在水平方向是匀速直线运动，竖直方向是上抛运动，运用运动叠加原理来求解.



习题 1-7 解图

解 据题意，建立坐标系 Oxy，如习题 1-7 解图所示.

$$h_0 = 14.7\ \mathrm{m}\ 时,\ \boldsymbol{v}_0 = (3.98\boldsymbol{i}+9.8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_{x0} = 3.98\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\ v_{y0} = 9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（1）$h_1 = \dfrac{v_{y0}^2}{2g} = \dfrac{9.8^2}{2\times 9.8}\ \mathrm{m} = 4.9\ \mathrm{m}$

球能上升的总高度

$$h = h_0 + h_1 = (14.7+4.9)\ \mathrm{m} = 19.6\ \mathrm{m}$$

（2）由 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ 得出球从抛出到最高处所需时间

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 19.6}{9.8}}\ \mathrm{s} = 2\ \mathrm{s}$$

球从抛出到落回到地面经历时间为 $2t$，球经过水平距离为

$$s = v_{x0}\times 2t = 3.98\times 2\times 2\ \mathrm{m} = 15.9\ \mathrm{m}$$

（3）球落地时水平速度不变

$$v_x = v_{x0} = 3.98\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

竖直速度

$$v_y = -\sqrt{2gh} = -\sqrt{2 \times 9.8 \times 19.6}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -19.6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

球落地时速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3.98^2 + (-19.6)^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 20.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

速度与 Ox 轴夹角

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-19.6}{3.98} = -78.6°$$

1－8 一台升降机以加速度 $1.22\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 上升，当上升速度为 $2.44\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 时，有一螺帽自升降机的天花板上脱落，天花板与升降机的底面相距 2.74 m.

（1） 试分别以地面和升降机为参考系，计算螺帽从天花板落到升降机底面所需的时间；

（2） 计算螺帽相对于地面下降距离.

分析 在不同的参考系中观察，螺帽的运动状况不同. 相对地面参考系，螺帽做竖直上抛运动，初速度为 $2.44\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$；相对升降机参考系，螺帽做初速度为零的落体运动（不是自由落体运动）.

解 （1） 以地面为参考系，螺帽做竖直上抛运动，升降机以加速度 a 做匀加速直线运动，螺帽落在地板上时，螺帽与升降机地板运动到同一空间位置，即在同一坐标系中螺帽和地板此时的位置矢量相同. 设螺帽刚脱落时升降机地板位于 $x=0$ 处，而螺帽位于 $x=h$ 处. 经 t 时刻螺帽落在地板上.

螺帽运动方程为

$$x = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

升降机地板运动方程为

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

上面两式相减，解得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a+g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.74}{1.22 + 9.8}}\ \mathrm{s} = 0.71\ \mathrm{s}$$

若以升降机为参考系，则螺帽以相对升降机的加速度 a' 由静止开始下落，运动路程就是升降机的高度 h. 螺帽相对升降机的加速度 $a' = a + g$，则

$$h = \frac{1}{2}a't^2 = \frac{1}{2}(a+g)t^2$$

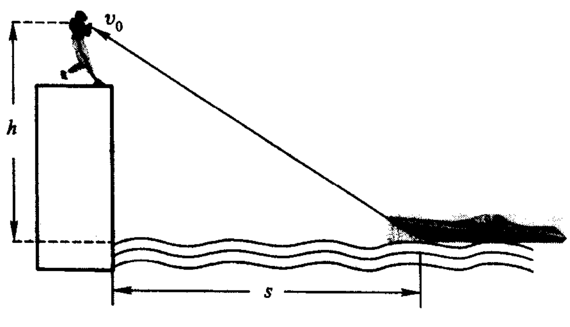
解得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a+g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.74}{1.22 + 9.8}}\ \mathrm{s} = 0.71\ \mathrm{s}$$

（2） 由（1）式可知，螺帽相对地面下降的距离

$$\Delta h = h - x = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = \left(-2.44 \times 0.71 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 0.71^2\right)\ \mathrm{m} = 0.74\ \mathrm{m}$$

1－9 在离水面高度为 h 的岸壁上，有人用绳子拉船靠岸，船位于离岸壁 s 距离处，当人以 v_0 的速度收绳时，试求船的速度和加速度的大小？



习题 1－9 图

分析 绳子长度的时间变化率即为收绳速率 v_0. 船在水面运动，它的位移发生在水面上，所以船距岸壁距离 s 的时间变化率是船的速率，也是系在船首绳端点的移动速率（绳上各点速度大小不能等同收绳速率，它们

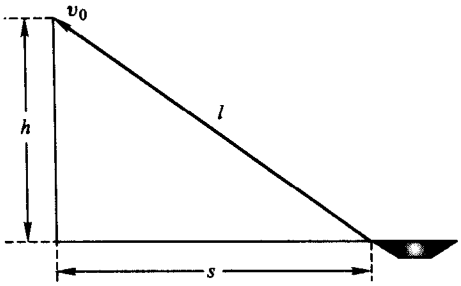
各点速度在绳的方向上分量大小相同,等于收绳速率).所以从绳长 l 与船、岸之距离 s 的关系入手可解得收绳速率与船速率的关系.

解 设某一时刻船的位置如习题 1-9 解图所示,可列式

$$l^2 = h^2 + s^2$$

将上式两边分别对时间求导得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$



习题 1-9 解图

按题意,并注意到 l、s 随 t 减少,所以 $-\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$就是收绳的速率 v_0,$-\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$坐就是船的速率 v,即

$$v = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{s}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{s}v_0 = \frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0$$

可见,v 大于 v_0,将上式对时间 t 求导,求得船的加速度大小为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{s\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} - l\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{s^2}v_0 = \frac{-sv_0 + lv}{s^2}v_0$$

$$= \frac{-s + \frac{l^2}{s}}{s^2}v_0^2 = \frac{h^2}{s^3}v_0^2$$

1-10 一个质点由静止开始做直线运动,初始加速度为 a_0,以后加速度均匀增加,每经过 τ 秒加速度增加 a_0,求经过时间 t 秒后质点的速度和运动的距离.

分析 这是质点运动学的第二类问题,即已知运动加速度,求运动方程.因此,解决问题的关键是首先根据题设条件确定加速度随时间变化的函数表达式,而后积分求解.

解 由题意可知,加速度和时间的关系为

$$a = a_0 + \frac{a_0}{\tau}t$$

而

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\quad \mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$$

两边积分得

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \left(a_0 + \frac{a_0}{\tau}t\right)\mathrm{d}t$$

$$v = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2$$

又

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$$

质点的运动距离为

$$x = \int_0^t v\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}t^2 + \frac{a_0}{6\tau}t^3$$

1-11 一个质点自原点开始沿抛物线 $2y = x^2$ 运动,它在 x 轴上的分速度为一恒量,其值为 $4.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,求质点位于 $x = 2\ \mathrm{m}$ 的速度和加速度.

分析 根据题意可知质点在 x 方向做匀速直线运动,y 方向的运动速度可由轨道方程两边对时间求导得.对速度求导便可得到质点的加速度.

解 由于 x 和 y 方向的分速度分别为 $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,对运动轨道方程 $2y = x^2$ 两边对时间求导得

$$2\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}\text{，即有 } v_y=xv_x$$

因为 $v_x=\frac{dx}{dt}=4.0\ m\cdot s^{-1}$，则有

$$v_y=4x$$

质点的速度

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}+4x\boldsymbol{j}$$

质点位于 $x=2$ m 的速度为

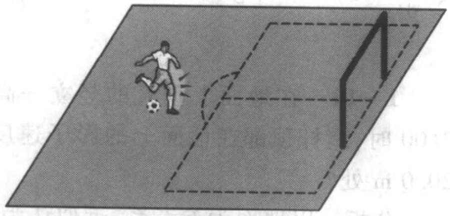
$$\boldsymbol{v}=4\boldsymbol{i}+(2\times4)\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$$

质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=\frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j}=\frac{d(4x)}{dt}\boldsymbol{j}=4v_x\boldsymbol{j}=16\boldsymbol{j}$$

本题中，v 的单位为 $m\cdot s^{-1}$，a 的单位为 $m\cdot s^{-2}$.

1-12 如图所示，一位足球运动员在正对球门前 25.0 m 处以 20.0 $m\cdot s^{-1}$的初速率罚任意球，已知球门高为 3.44 m，若要在垂直于球门的竖直平面内将足球直接踢进球门，问他应与地面成什么角度的范围内踢出足球？（足球可视为质点.）

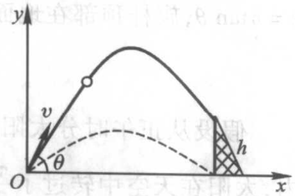


习题 1-12 图

分析 足球做抛体运动，若要在垂直于球门的竖直平面内将足球直接踢进球门，足球必须满足水平位移为 25.0 m 时，竖直方向的位移介于球门的高度范围内.

解 以罚球点为原点，沿平地为 x 轴，沿铅直方向为 y 轴，建立坐标系，如习题 1-12 解图所示. 足球在 x 方向和 y 方向的运动方程分别为

$$\begin{cases}x=v\cos\theta t\\ y=v\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$



习题 1-12 解图

消去 t 得足球斜抛运动的轨道方程

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v^2}(\tan^2\theta+1)\tag{1}$$

要将足球直接踢进球门，需满足条件 $x=25$ m、$0\leqslant y\leqslant3.44$ m，下面分两种情况来讨论

（1）将 $x=25$ m、$y\geqslant0$ 代入方程(1)并化简得

$$\tan^2\theta-3.27\tan\theta+1\leqslant0$$

解得

$$18.89°\leqslant\theta\leqslant71.11°$$

（2）将 $x=25$ m、$y\leqslant3.44$ m 代入方程(1)并化简得

$$\tan^2\theta-3.27\tan\theta+1.44\geqslant0$$

解得

$$\theta\geqslant69.92°\text{ 或 }\theta\leqslant27.92°$$

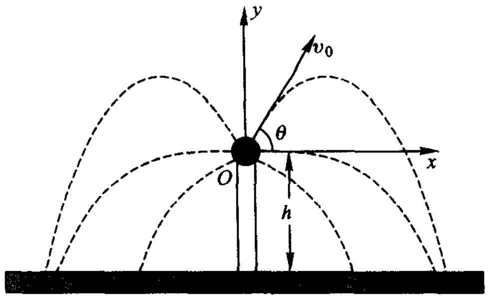
由上面两种情况讨论的结果可以得到射门的角度范围为

$$18.89°\leqslant\theta\leqslant27.92°\text{ 或 }69.92°\leqslant\theta\leqslant71.11°$$

1-13 在人工喷泉中，高度为 $h=1$ m 的铅直喷泉管安装在圆形水池的中央，如图所示. 水柱均以初速度 $v_0=\sqrt{2gh}$可沿各种仰角 θ 从喷嘴中喷出，$0°\leqslant\theta<90°$，g 为重力加速度. 若不考虑池壁的高度，欲使喷出的水全部都洒落在水池内，则水池的半径至少为多大？

分析 从喷嘴中喷出的各股水柱做初速度相同、仰角不同的抛体运动. 一般而言，由于仰角 θ 不同，相应的射程也不同. 容易证明其中以仰角为 45°喷出的水柱射程为最大，以此来确定水池的半径.

解 设以 θ 角喷出的水柱射程为最大，这一最大射程就是水池的最小半径 $R_{\min}$，如习题 1 - 13 图建立坐标. 水柱在 x 方向和 y 方向的运动方程分别为



习题 1 - 13 图

$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta t \\ y = v_0\sin\theta t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去 θ 得方程

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = v_0^2t^2$$

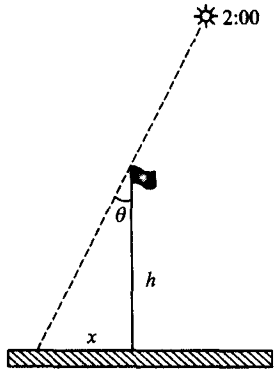
将 $y = -h = -1\ \mathrm{m}, v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g}(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$ 代入上式，并化简得

$$x^2 = 3gt^2 - 1 - \frac{1}{4}g^2t^4$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = 0$，可求得 $gt^2 = 6$ 时，水柱在 x 方向的射程最大，最大射程为

$$x = R_{\min} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{m}$$

1 - 14 在地面上垂直的竖立一高为 20.0 m 的旗杆，已知正午时分太阳在旗杆的正上方，求在下午 2:00 时，旗杆顶部在地面上的影子速度的大小？在何时刻旗杆的影子将伸展至 20.0 m 处？



习题 1 - 14 图

分析 以地面为参考系，近似认为太阳绕地球做匀速率圆周运动，旗杆在地面上的影子长度可由三角关系求得，其随时间的变化率就是影子速度的大小.

解 如图所示，旗杆在地面上的影子长度 x 随太阳在天空中的位置而变化，$x = h\tan\theta$，旗杆顶部在地面上的影子速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = h\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\mathrm{d}t} = h\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

假设从正午时分太阳在旗杆的正上方到下午 6:00 时太阳落山的 6 个小时内，太阳在天空中转过了 $\dfrac{\pi}{2}$ 度，太阳在天空的转动的角速度为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi/2}{6\times60\times60}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = \frac{\pi}{43\ 200}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} \qquad (2)$$

下午 2:00 时，太阳在天空中的角位置为

$$\theta = 2\times60\times60\times\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 7\ 200\times\frac{\pi}{43\ 200} = \frac{\pi}{6} \qquad (3)$$

将(2)式和(3)式代入(1)式得

$$v = h\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 20\times\sec^2\frac{\pi}{6}\times\frac{\pi}{43\ 200}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = \frac{\pi}{1\ 620}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 1.94\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由 $x = h\tan\theta$ 可知，当旗杆的影子伸展至 $x = 20.0$ m 时

$$\tan\theta = \frac{h}{x} = \frac{20.0}{20.0} = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

因此时间恰为下午 3:00 整.

1 - 15 一个质点做半径为 $r = 10$ m 的圆周运动，其角加速度 $\alpha = \pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$，若质点由静止开始运动，求质点在第一秒末

(1) 角速度、法向加速度和切向加速度；

(2) 总加速度的大小和方向.

分析 因为角加速度是常量,可直接用匀角加速运动的公式求得角速度,并由角量和线量关系式分别解出法向加速度和切向加速度,合成后可得总加速度.

解 (1) 质点的角速度为 $\omega=\alpha t=\pi\times1\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}=3.14\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$
质点的法向加速度和切向加速度分别为

$$a_n=r\omega^2=10\pi^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=98.7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_t=r\alpha=10\pi\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=31.4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2) 合成后的加速度为 $a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=103.5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$
加速度 $\boldsymbol{a}$ 与切线方向的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_t}=72°21'$$

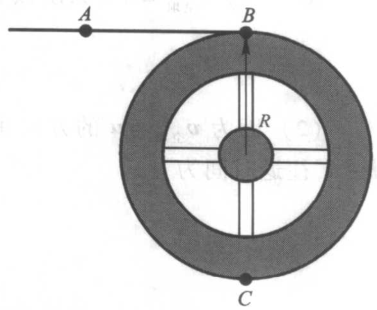
1-16 如图所示,一台卷扬机的鼓轮自静止开始做匀角加速转动,水平绞索上的 A 点经 3 s 后到达鼓轮边缘上的 B 点处. 已知 $AB=0.45$ m,鼓轮半径 $R=0.5$ m. 求 A 点到达最低点 C 时的速度与加速度.

分析 初始阶段,A 点沿轮的切线方向做匀加速直线运动,到达 B 点后才做匀角加速转动,所以最初 A 点的加速度即是轮边缘的切向加速度,而 A 点运动到 C 点处时的加速度为该处切向加速度和法向加速度的矢量和.

解 A 点到达 B 点是匀加速直线运动.

$$s=\frac{1}{2}a_t t^2$$

$$a_t=\frac{2s}{t^2}=\frac{2\times0.45}{3^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=0.10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$



习题 1-16 图

A 点到达 C 点经过路程 $s'=s+\pi R$
到达 C 点时的速度大小为

$$v=\sqrt{2a_t s'}=\sqrt{2a_t(s+\pi R)}$$
$$=\sqrt{2\times0.10\times(0.45+3.14\times0.5)}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=0.636\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

方向为 C 点切线向左.
到达 C 点处的法向加速度大小为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{0.636^2}{0.50}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=0.808\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

A 点到达 C 点时的加速度大小

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{0.808^2+0.10^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=0.814\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

加速度与速度方向夹角为

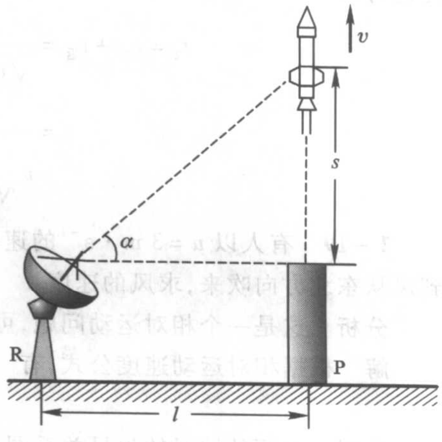
$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_t}=\arctan\frac{0.808}{0.10}=82°57'$$

1-17 如图所示,当雷达天线以角速度 ω 连续转动时,可借助天线发出的电磁波追踪一艘竖直向上飞行的火箭,已知火箭发射台 P 与雷达 R 相距为 l,求天线仰角为 α 时,火箭的飞行速度?

分析 火箭飞行的高度 s 可由三角关系用天线仰角 α 表示,s 随时间的变化率就是火箭飞行的速度大小.

解 如图所示,当天线仰角为 α 时有

$$s=l\tan\alpha,$$



习题 1-17 图

火箭的飞行速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=l\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=l\omega\sec^2\alpha$$

1－18 飞机自 A 城向北飞到 B 城，然后又向南飞回到 A 城. 飞机相对于空气的速率为 v，而空气相对地面的速率为 u，A、B 之间的距离为 L. 如果飞机相对于空气的速率保持不变，

试证：

（1） 当空气是静止的（即 $u=0$），来回飞行的时间为

$$t_0=\frac{2L}{v}$$

（2） 当空气的速度由南向北时，来回飞行的时间为

$$t_1=\frac{t_0}{\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)}$$

（3） 当空气的速度由东向西时，来回飞行的时间为

$$t_2=\frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}}}$$

分析 这是相对运动问题，由于在三种情况中空气相对于地面的速度 $\boldsymbol{v}_{空地}$ 不同，使飞机在 A、B 间相对于地面的飞行速度 $\boldsymbol{v}_{机地}$ 的大小也不同，根据相对运动速度关系式 $\boldsymbol{v}_{机地}=\boldsymbol{v}_{机空}+\boldsymbol{v}_{空地}$ 可求得结果.

解 （1） $v_{空地}=u=0$，所以 $t_{往}=t_{返}=\frac{L}{v_{机空}}=\frac{L}{v}$，即往返时间为

$$t_0=t_{往}+t_{返}=\frac{2L}{v}$$

（2） 因为 $\boldsymbol{v}_{空地}=\boldsymbol{u}$ 的方向由南向北，所以飞机往北飞行速度大小为 $v+u$，往南飞行速度大小则为 $v-u$，往返时间为

$$t_1=\frac{L}{v+u}+\frac{L}{v-u}=\frac{2L}{v}\cdot\frac{1}{1-\frac{u^2}{v^2}}=\frac{t_0}{1-\frac{u^2}{v^2}}$$

（3） 因为 $\boldsymbol{u}$ 的方向由东向西，飞机相对地面往返速度分别由习题 1－18 解图所示的矢量关系图表示.

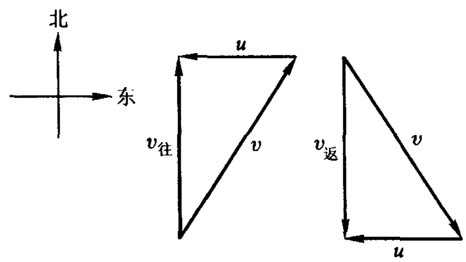
$$v_{往}=\sqrt{v^2-u^2}$$

$$v_{返}=\sqrt{v^2-u^2}$$

往返时间

$$t_2=t_{往}+t_{返}=\frac{2L}{\sqrt{v^2-u^2}}$$

$$=\frac{2L}{v\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}}}=\frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}}}$$



习题 1－18 解图

1－19 有人以 $u=3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率向东奔跑，他感到风从正北方向吹来，当奔跑的速率加倍时，则感到风从东北方向吹来，求风的速度.

分析 这是一个相对运动问题，可按题意画出两种情况的矢量关系图，通过几何关系求解.

解 根据相对运动速度公式，有

$$\boldsymbol{v}_{风人}=\boldsymbol{v}_{风地}-\boldsymbol{v}_{人地}$$

分别画出两种情况的矢量关系图（如习题 1－19 解图所示），由矢量图和已知条件得

$$v'_{人地}=2v_{人地}，即\ CB=2AB$$

因为按题意 $v'_{风人}$ 方向与 CB 方向的夹角为 45°，所以有