高联考研

2007年

李永乐·李正元考研数学⑩

数学二

【理工类】

数学全真模拟经典400题

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
北京大学 刘西垣

国家行政学院出版社

2007年李永乐·李正元考研数学⑩

数学全真模拟经典400题

（理工类·数学二）

主 编 清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 李正元
北 京 大 学 刘西垣

编 者 （以姓氏笔画为序）
北 京 大 学 刘西垣
北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 严 颖
北 京 大 学 范培华
中国人民大学 袁荫棠
空军雷达学院 徐宝庆
东北财经大学 龚兆仁
天津财经学院 鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学全真模拟经典 400 题．数学．2：理工类/李永乐，李正元主编．
．-北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 7-80140-342-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．①李…　②李…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 058910 号

数学全真模拟经典 400 题
［理工类・数学二］
李永乐　李正元　主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行电话：88517082
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×1092　1/16 开本　12.75 印张　340 千字
2006 年 8 月第 3 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-342-8/O・36　　定价：19.00 元

前　言

本套书（**李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典400题》等，国家行政学院出版社**）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性”，较“适合考生的需要”，我们深感欣慰。《**2007年考研数学全真模拟经典400题**》根据2007年考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

本书特点：

1. 每题均全新优化设计，综合性强

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计或改编了10套模拟试题，这10套题完全不同，没有重复题；在内容设计上，每道题均涉及两个以上知识点，有些综合题甚至涉及到3个考点或更多，这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这10套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. 注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细

我们在设计这10套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据2007年考研数学大纲为2007年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练题集，本书中的试题难度略高于2006年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2007年考研数学复习全书》（数学二），弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2007年考研数学复习全书》（数学二）中所介绍的解题方法、技巧和思路。

特别提醒考生注意：①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者不辞辛苦，认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。在编写本书的过程中，编撰者都从头到尾坚持自己亲自完成本书的编写任务，决不假手他人，更不会"借"他人的东西。在这个意义上，"经典"两字实际上是本书编撰者对自己的严格要求。

②为了提高同学数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及3个以上的考点、综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要急，更不要泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》（数学二）所介绍的解题方法，然后再动手做题。我们希望考生一定要动手做题，不要一看了事。

鉴于以上两点，我们希望考生认真对待本书中每道题，对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在2007年考研数学考试中，您肯定会感到有些题"似曾相识"、甚至"一见如故"。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

愿这本《经典400题》能对广大考生有所帮助，为实现考研目标助一臂之力！

说明：为了使本书更具有针对性，减轻考生的经济负担，我们将原《数学全真模拟经典400题》（数学一、数学二合订本）改为数学一、数学二单行本，书名继续沿用《数学全真模拟经典400题》。

编　者

2006年8月

目　录

第1部分　考生必须了解的信息

第2部分　新增考点专题训练

第3部分　全真模拟经典试题

第 4 部分　全真模拟经典试题答案及详解

第1部分

考生必须了解的信息

一、2007 年考研数学考试大纲修订情况

(一) 关于试卷结构

1. 内容比例

(1) 高等数学由原来的"约 80%"调整为"约 78%".

(2) 线性代数由原来的"约 20%"调整为"约 22%".

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题由原来的"约 40%"调整为"约 45%".

注意: 今年大纲关于"填空题与选择题"有比较大的调整. 第一,将原来的"一、填空题"调整为"二、填空题",同时将原来的"二、选择题"调整为"一、选择题";第二,选择题的题量及分值有较大调整. 其所占分值由原来的"32 分"改为"40 分",同时其题量由原来的"8 道"改为"10 道",即增加了 2 道关于高等数学内容的选择题.

(2) 解答题(包括证明题)由原来的"约 60%"调整为"约 55%". 具体来说,题量由原来的"9 道题"调整为"8 道题",即减少了 1 道关于高等数学内容的解答题.

(二) 关于考试内容和考试要求

1. 高等数学

将"无穷小(大)"修订为"无穷小(大)量",将"广义积分"修订为"反常积分".

2. 线性代数

今年大纲增加了"二次型",其考试内容和考试要求分别为:

(1) 考试内容

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

(2) 考试要求

① 了解二次型的概念,会用矩阵形式表示二次型,了解合同变换和合同矩阵的概念.

② 了解二次型的秩的概念,了解二次型的标准形、规范形等概念,了解惯性定理,会用正交变换和配方法化二次型为标准形.

③ 理解正定二次型、正定矩阵的概念,并掌握其判别法.

二、2006 年考研数学试题特点剖析

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题全面考查基本概念、基本理论和基本运算，紧扣考试大纲，涉及知识面宽，体现了“厚基础、重能力”的命题指导思想．题目难易适中，且有所创新，注重考查综合运用知识的能力．

1. 注重基础知识

注重基础知识是 2006 年试题的突出特点，考生只要掌握好基本概念和基本思想，就可以正确解答这些题目．如数学二的第(7)题考查考生用导数判别函数图形的性态，再根据函数增量与微分的几何意义来判断 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 的大小关系，只要考生基本功扎实，就可以答对此题．

在对基本原理的考查上，主要考查数学思想及其灵活应用．如数学二第(12)题，考查函数条件极值的必要条件，只要运用函数无条件极值的必要条件的概念，即可推出结论．

2. 题目解法灵活多样

2006 年的数学试题考查了考生的发散思维能力和对知识综合运用的能力，如果考生能用简便方法解题，可以节省出答题时间，有效解决答题时间不够用的问题．如数学二第(17)题，可以利用对称性计算二重积分，数学二第(15)题用泰勒公式来解题，都能够收到既节省时间又提高准确度的效果．再如线性代数题(数学二第(23)题)，该题目新颖且不落俗套，但难度并不高．此外，试卷中的一些试题虽然是基本题，但知识点增多，考查考生运用交叉知识解决较复杂问题的能力．如数学二第(18)题是一个关于极限知识的综合性题目，考生容易想到用单调有界原理证明数列 $\{x_n\}$ 有极限，进而求出 $\lim\limits_{x\to 0}x_n$，在此基础上解答第(Ⅱ)问“求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$”时，先转化成 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$，再由洛必达法则求出 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$，即可由此计算出所求的极限值．高等数学中的不等式证明题经常要用到构造辅助函数，函数的单调性，一阶导数，二阶导数等多个知识点．

3. 分步设问，梯次递进

2006 年的很多数学试题在设计上先搭一个台阶，引导考生的思路，便于考生上手．例如数学二第(22)题，先设第(Ⅰ)问“证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$”，据此考生可容易解答第(Ⅱ)问，通过对增广矩阵进行初等变换化成梯形阵，即可求出 a,b 的值，进而得到方程组的通解．

又如数学二第(20)题，第(Ⅰ)问先验证 $f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$，考生自然要先用复合函数微分法求出函数 $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，代入条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 即得证，再通过求解第(Ⅰ)问中的微分方程来完成第(Ⅱ)问，得到 $f(u)$ 的表达式．如果不设第(Ⅰ)问而直接设第(Ⅱ)问，则试题的难度会大幅度提高．

4. 试题没有偏题怪题

2006 年数学试题不偏不怪，难度适中，考生只需从基本概念入手就可以解决问题，而不需要高难的技巧．比如数学二第(12)、(19)题等题，这些试题考查了基本的概念和原理，考生只有基本功过硬才能得高分，而只靠背题型、临时突击掌握一些解题的套路是不行的．

5. 试题难度下降

与 2005 年相比，2006 年数学试题的难度进行了有效的调整，难度有所下降，符合考生的实际水

平．试题降低了对高难度技巧的要求，但不降低对知识点的要求，如数学二第（17）题，这是一个二重积分题，题目的原型是：

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x+y\geqslant 0\}，f\text{连续，计算 }I=\iint_D \frac{1-x^2-y^2+xyf(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

本题主要考查二重积分的对称性及利用极坐标计算二重积分的方法．但是对于抽象函数 $f(x^2+y^2)$，因为没有给出具体的对应关系，并且要利用函数的奇偶性，对区域 D 还要用 $y=x$ 分为两部分（直接化极坐标也可以计算），因此题目有一定的难度．最后将题目改成：

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}，\text{计算 }I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这样，考查的知识点、基本原理和方法相同，技巧性与难度却降下来了．此外，在基本方法和基本运算上，一般尽量避免复杂的计算．

三、思考与建议

通过阅卷，我们发现考生存在的问题有：

（1）考生存在的主要问题是，基础知识不牢固，很多考生只是背题型，按照套路做题，对基本概念不够重视，理解不深，不能灵活应用，不能从基本概念入手解决问题．

（2）考生存在的另一个问题是综合运用知识的能力较差，其原因是数学解题能力没有达到要求，遇到新题型不能综合地应用知识解决问题．

针对上述存在的问题，建议考生在复习中首先强化基本概念、基本理论和基本运算，然后加强综合训练．考生应注意积累解题方法，一题多解的题目要选择简便解法，以便节省时间，提高效率．

第2部分

新增考点专题训练

线性代数

▶ 有关二次型的基本概念

【题1】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ________，规范形是________.

【分析】 按定义，二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&2&4\\-2&4&2\end{bmatrix}$.

由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-2&-4\\2&-4&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-2)(\lambda+4),$$

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是：$2,6,-4$.

故正交变换下二次型的标准形是 $2y_1^2+6y_2^2-4y_3^2$. 所以规范形是 $z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

或，由配方法，有

$$\begin{aligned}f&=2[x_2^2+2x_2(x_1+2x_3)+(x_1+2x_3)^2]+2x_3^2-4x_1x_3-2(x_1+2x_3)^2\\&=2(x_2+x_1+2x_3)^2-2x_1^2-12x_1x_3-6x_3^2\\&=2(x_2+x_1+2x_3)^2-2(x_1^2+6x_1x_3+9x_3^2)+12x_3^2\\&=2(x_2+x_1+2x_3)^2-2(x_1+3x_3)^2+12x_3^2.\end{aligned}$$

亦知规范形是 $z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

评注 知道正、负惯性指数就知规范形，知道标准形也就知规范形.
由本题的两种解法可看出标准形是不惟一的.

【题2】 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是秩为 n 的 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\boldsymbol{A}_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

（Ⅰ） 记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，试写出二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式；

（Ⅱ） 判断二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范形是否相同，并说明理由．

【分析】 按定义，若 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$ 就是二次型 f 的矩阵表示，而两个二次型的规范形是否一样关键是看正负惯性指数是否一致．

【解】 （Ⅰ）因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，故 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的实对称矩阵，于是 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是实对称矩阵，那么 $\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$ 因而 $\boldsymbol{A}^*$ 是实对称矩阵，可见 $A_{ij}=A_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，那么

$$f(\boldsymbol{X})=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}.$$

因此，二次型 f 的矩阵表示为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$，其二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$．

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{-1}$ 均是可逆的实对称矩阵，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$．所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同．于是 $g(\boldsymbol{X})$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 有相同的规范形．

评注 若 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&6\\1&2&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，则因 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&6\\1&2&8\end{bmatrix}$ 不是对称矩阵，故 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 不是二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵形式．因为

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&6\\1&2&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\&=x_1^2+2x_1x_2+3x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3x_1+8x_3^2+2x_2x_3\\&=x_1^2+2x_2^2+8x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3\\&=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&4\\2&4&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

可知二次型矩阵是 $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&4\\2&4&8\end{bmatrix}$，对于二次型矩阵的概念应当理解清楚．

关于 $g(\boldsymbol{X})$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 规范形是否一致，亦可通过坐标变换来实现，令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{X})&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\\&=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}.\end{aligned}$$

由此知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同，于是 $f(\boldsymbol{X})$ 与 $g(\boldsymbol{X})$ 必有相同的规范形．

【题3】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

【分析】 因为 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1$,

二次型 f 的矩阵是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$. 易见秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,故二次型的秩为2.

评注 如果认为二次型的标准形是

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2, \tag{1}$$

从而秩 $\mathrm{r}(f)=3$ 就不正确了.

因为对于
$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2,\\y_2=x_2-x_3,\\y_3=x_1+x_3,\end{cases} \tag{2}$$

有行列式 $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=0$,从而(2)不是坐标变换,那么(1)不是标准形.

【题4】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵,则

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$. 【 】

【分析】 矩阵乘法没有交换律,故(A)不正确.

两个可逆矩阵不一定相似,因为特征值可以不一样.故(B)不正确.

两个可逆矩阵所对应的二次型的正、负惯性指数可以不同,因而不一定合同.例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix} \text{与} \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix},$$

既不相似也不合同.故(C)不正确.

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,即 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换可得到 $\boldsymbol{B}$,即有初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots$,使

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B},$$

亦即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

另一方面,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,从而知(D)正确.故应选(D).

【题5】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似. (B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似. (D) 不合同且不相似. 【 】

【分析】 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^4-4\lambda^3=0$,知矩阵的 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是4,0,0,0.又因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 必能相似对角化,所以 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似.

作为实对称矩阵，当 $A \sim B$ 时，知 A 与 B 有相同的特征值，从而二次型 $x^{T}Ax$ 与 $x^{T}Bx$ 有相同的正负惯性指数．因此 A 与 B 合同．

所以本题应当选（A）．

注意，实对称矩阵合同时，它们不一定相似，但相似时一定合同．例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} 与 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

它们的特征值不同，则 A 与 B 不相似，但它们的正惯性指数均为 2，负惯性指数均为 0．故 A 与 B 合同．

【题 6】 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

（Ⅰ） 已知 A 的一个特征值为 3，试求 y．

（Ⅱ） 求可逆矩阵 P，使 $(AP)^{T}(AP)$ 为对角矩阵．

【解】 （Ⅰ）因为 $\lambda = 3$ 是 A 的特征值，故

$$|3E - A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-y & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-y & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8(2-y) = 0,$$

所以 $y = 2$．

（Ⅱ）由于 $A^{T} = A$，要 $(AP)^{T}(AP) = P^{T}A^{2}P = \Lambda$，而

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

是对称矩阵，故可构造二次型 $x^{T}A^{2}x$，将其化为标准形 $y^{T}\Lambda y$．即有 A^{2} 与 Λ 合同．亦即 $P^{T}A^{2}P = \Lambda$．

由于 $$x^{T}A^{2}x = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3^2 + \frac{8}{5}x_3x_4 + \frac{16}{25}x_4^2\right) + 5x_4^2 - \frac{16}{5}x_4^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_1 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_4^2,$$

那么，令 $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4, y_4 = x_4$，即经坐标变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

有 $$x^{T}A^{2}x = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{9}{5}y_4^2.$$

所以，取 $$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

有 $$(AP)^{T}(AP) = P^{T}A^{2}P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5 & \\ & & & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

评注 本题的（Ⅰ）是考查特征值的基本概念，而（Ⅱ）是把实对称矩阵合同于对角矩阵的问题转化成二次型求标准形的问题，用二次型的理论与方法来处理矩阵中的问题.

只要题目没有限定，将二次型 $x^{T}Ax$ 化成标准形既可以用配方法也可以用正交变换法，如若后续问题涉及到特征值就应选用正交变换法，因为配方法所得标准形的系数不是特征值. 本题用配方法只需一步是简捷的，请读者用正交变换法完成本题.

【题7】 设 A 是3阶实对称矩阵，将矩阵 A 的第1,2两行互换后再将第1、2两列互换得到的矩阵是 B，试判断 A 与 B 是否等价、相似、合同？

【解】 矩阵 A 经初等变换得到矩阵 B，故 A 与 B 必等价.

用初等矩阵描述，有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B,$$

因为 $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以，A 与 B 既相似也合同.

【题8】 对于 n 元二次型 $x^{T}Ax$，下述结论中正确的是

（A） 化 $x^{T}Ax$ 为标准形的坐标变换是惟一的.

（B） 化 $x^{T}Ax$ 为规范形的坐标变换是惟一的.

（C） $x^{T}Ax$ 的标准形是惟一的.

（D） $x^{T}Ax$ 的规范形是惟一的. 【 】

【分析】 化二次型为标准形既可用正交变换法也可用配方法，所用坐标变换不同，标准形也可以不同，故（A）、（C）均不正确.

化二次型为规范形一般用配方法，或者先用正交变换法化为标准形后再用配方法化为规范形，方法不同所用坐标变换也就不同，故（B）不正确.

规范形实际上由二次型的正、负惯性指数所确定，而正、负惯性指数在坐标变换下是不变的（惯性定理），故仅（D）正确. 因此应选（D）.

【题9】 已知A,B均为n阶实对称矩阵,则下列4个命题

① A与B相似的充分必要条件是$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

② 二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$与二次型$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TBX$有相同规范形的充分必要条件是$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

③ 若A与B相似,则A与B必合同

④ 若A与B合同,则A与B必相似

中正确的是

(A) ①,②. (B) ②,③. (C) ①,③. (D) ①,④. 【 】

【分析】 命题①是成立的,证明如下:

必要性.若A与B相似,则有可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=B$.故

$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|\\&=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-B|.\end{aligned}$$

充分性.若$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,则$A$与$B$有相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.因$A$,$B$均为实对称矩阵,所以能相似对角化,即存在正交矩阵$U_1$,$U_2$,使

$$U_1^{-1}AU_1=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},\quad U_2^{-1}BU_2=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}.$$

从而$U_1^{-1}AU_1=U_2^{-1}BU_2$,可推出 $(U_1U_2^{-1})^{-1}A(U_1U_2^{-1})=B$,所以$A$与$B$相似.

命题②不成立.(可排除(A)与(B))下例表明该命题必要性不成立,取

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

则二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$与二次型$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$有相同的规范形

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2,$$

但
$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\neq|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

命题③成立.证明如下:

若A与B相似,则A与B有相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.因$A$,$B$均为实对称矩阵,所以均能相似对角化,即存在正交矩阵U_1,U_2,使

$$U_1^TAU_1=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},\quad U_2^TBU_2=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}.$$

从而 $U_1^TAU_1=U_2^TBU_2$,可推出$(U_1U_2^T)^TA(U_1U_2^T)=B$.所以$A$与$B$必合同.

命题④不成立.(可排除(D))下例表明该命题不成立,取

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&5&0\\0&0&6\end{bmatrix},$$

因A与B的秩均为3,正惯性指数亦均为3,所以A与B合同,但$|A|=6\neq|B|=120$,所以A与

$\boldsymbol{B}$ 不相似.

综上所述,以上命题正确的是 ①、③. 所以选(C).

【题 10】 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{bmatrix}$,则 B,C,D 中与 A 合同的矩阵是________.

【分析】 A,B,C,D 均为实对称矩阵,A 的顺序主子式依次为:

$$\Delta_1=1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1>0,\quad \Delta_3=|A|=2>0,$$

所以 A 为正定矩阵. 这样与 A 合同的矩阵当且仅当为与 A 同阶的正定矩阵.

B 的 2 阶顺序主子式 $\Delta_2=-3<0$,所以 B 不是正定矩阵. C 的 3 阶顺序主子式 $\Delta_3=|C|=-1<0$,所以 C 不是正定矩阵. 因而 A 与 B 不合同,A 与 C 不合同.

D 的顺序主子式依次为:$\Delta_1=1>0,\Delta_2=1>0,\Delta_3=|D|=1>0$,所以 D 为正定矩阵. 因而 A 与 D 合同.

▶ 化二次型为标准形

【解题思路】 用正交变换化二次型为标准形的解题步骤为:

第一步,把二次型表示为矩阵形式 $x^{T}Ax$;

第二步,求 A 的特征值及相应的特征向量(当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,最好检验你所求 X_1,X_2 是否正交);

第三步,若特征值有重根,则对重根所求的特征向量要注意,若不正交,则需 Schmidt 正交化;

第四步,把特征向量单位化为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$;

第五步,构造正交矩阵 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$;

第六步,令 $x=Cy$,得 $x^{T}Ax=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

用配方法化二次型为标准形的解题步骤为:

(1) 如二次型中至少有一个平方项,不妨设 $a_{11}\neq0$,则对所有含 x_1 的项配方(经配方后所余各项中不再含 x_1). 如此继续配方,直至每一项都包含在各完全平方项中,引入新变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. 由 $y=C^{-1}x$,得 $x^{T}Ax=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$.

(2) 如二次型中不含平方项,只有混合项,不妨设 $a_{12}\neq0$,则可令

$$x_1=y_1+y_2,\quad x_2=y_1-y_2,\quad x_3=y_3,\quad \cdots,\quad x_n=y_n,$$

经此坐标变换,二次型中出现 $a_{12}y_1^2-a_{12}y_2^2$ 后,再按(1)实行配方法.

【题 11】 已知 $\alpha=(1,-2,2)^{T}$ 是二次型 $x^{T}Ax=ax_1^2+4x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 矩阵 A 的特征向量,求正交变换化二次型为标准形,并写出所用正交变换.

【解】 二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&b\end{bmatrix}$. 设 $\alpha=(1,-2,2)^{T}$ 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量,则

$$\begin{bmatrix}a&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}.$$