华章数学译丛

HZ BOOKS

25

PEARSON
Prentice Hall

Differential Geometry and Its Applications

(Second Edition)

微分几何及其应用

（原书第2版）

（美）John Oprea
克利夫兰州立大学 著

陈智奇 李君 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

25

Differential Geometry and Its Applications

(Second Edition)

微分几何及其应用

（原书第2版）

（美）John Oprea 著
克利夫兰州立大学

陈智奇 李君 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是优秀的微分几何教材，在研究微分几何理论的基础上，给出了微分几何在力学、工程等学科上的大量应用. 另外，本书引入了计算机代数系统——Maple，利用它不仅简化了计算，而且还绘制了大量图形，从而可以更加直观地理解微分几何的理论. 此外，本书还包含大量习题，并给出了相应的提示和解答.

本书内容广泛，实例丰富，讲解深入浅出，可作为高等院校数学及相关专业的微分几何教材，同时也可作为专业人员的参考书.

本书版权登记号：图字：01-2005-0524

图书在版编目(CIP)数据

微分几何及其应用(原书第2版)/(美)奥普里(Oprea, J.)著；陈智奇等译. —北京：机械工业出版社，2006.9

(华章数学译丛)

书名原文：Differential Geometry and Its Applications, Second Edition

ISBN 7-111-19269-9

Ⅰ.微… Ⅱ.①奥… ②陈… Ⅲ.微分几何 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第059532号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)

责任编辑：迟振春　王敏娟

北京中兴印刷有限公司印刷・新华书店北京发行所发行

2006年9月第1版第1次印刷

186mm×240mm・22.75印张

定价：49.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

微分几何学的产生和发展是与数学分析密切相连的，在这方面做出贡献的有瑞士数学家欧拉，法国数学家蒙日，德国数学家、天文学家和物理学家高斯，德国数学家克莱因等等. 经过近 300 年的发展，微分几何逐渐成为数学中独具特色、应用广泛的独立学科.

微分几何以曲线和曲面作为研究对象，在力学和一些工程技术问题方面有着广泛的应用. 本书是一本优秀的微分几何教材，在研究微分几何理论的基础上，给出了微分几何在力学、工程等学科上的大量应用；反过来，这些应用也加深了读者对微分几何的理解. 另外，本书引入了计算机代数系统——Maple，利用它不仅简化了计算，而且还绘制了大量图形，从而可以更加直观地理解微分几何的理论. 此外，本书还包含了大量习题，给出了相应的提示和解答，并提供了一系列的例子、定义以及注释.

微分几何课程是数学与应用数学专业的专业基础课，是由初等几何通往现代几何过程中的必修课程. 本书内容广泛，条理清晰，浅显易懂，图文并茂，可作为高等院校数学、物理、工程学、化学、生物和哲学等专业学生的微分几何教材，同时也可作为专业人员的参考书.

微分几何在各方面的应用是本书的一大特色，但同时也给翻译带来了一些麻烦. 因为我们本身水平有限，所以翻译当中难免有不甚妥当之处. 非常欢迎读者批评指正.

译 者

于南开大学

第 1 版前言

我们应该怎样教育今天的大学生，我们应该教他们什么知识，才能使他们今后在从事数学相关领域的职业时做好准备？我们怎样帮助他们实现从微积分和线性代数这样的基础数学到纯粹数学和应用数学中更抽象方法的飞跃？有一门学科能够使学习数学的学生步入到更高的一个发展层次，这门学科是立竿见影的、直观的、可计算的、有用的和跨学科的，最重要之处在于它很有趣. 当然，我们这里所涉及的是一门有着悠久和奇妙历史的学科——微分几何，它同时又是一门在许多领域不断发现有新应用的学科，从机械设计到四维流形的分类，到自然基本力理论的创造，再到 DNA 的研究.

微分几何是一门向更抽象的数学及其应用过渡的转型学科. 这门学科让学生看到数学的本质——数学并非大学标准课程表中罗列的分门别类的课程，而是一个涵盖了几何、微积分、线性代数、微分方程、复变函数、变分法和各种科学概念的综合性的学科整体. 微分几何不只是对数学专业的学生有用，而且包含理工科专业学生所需要的技巧和方法. 并且，学科本身并不是完全量化的. 换句话说，我们可以得到一系列的结果，其中有些仅仅依赖于计算，而有些则需要相当抽象地证明. 这样，学生就逐步从计算向思考过渡.

利用像 Maple 和 Mathematica 这样的计算机代数系统，我们有机会观察把这些思想融合在一起的各种概念和结构. 事实上，通常的做法是，结果的图形化表示应该与其中包含的数学理解齐头并进. 例如，在第 5 章，我使用 Maple 来表示曲面上的测地线，这就要求理解微分方程组的数值解并显示其解. 而且，对于这个例子来说，表示并不是一个单纯的计算机技巧的体现，而是准确地阐述不同的现象，例如我们可以用克莱罗关系来描述测地线上的有界性问题. 用计算机代数系统理解概念和解决问题还有很多好处. 例如，绘制测地线的程序修改以后可以用来显示在曲面上运动的质点的运动方程. 第 7 章就是这样做的，同时描述了与变分法和最优控制有关的程序. 在第 1、2、3、5、7 章的后面几节，我们解释了如何应用 Maple 来刻画微分几何的结构. 这些章节可以作为一个非正式的 Maple 指南，而不仅仅是程序的排列. 对于读者来说，这样做既有优点又有缺点. 优点在于书中有使用中某些陷阱的小小提示以及避免这些陷阱的方法，缺点在于其中难免带有我个人的喜好色彩，而且我并非一位 Maple 专家. 本书中介绍的 Maple 的特性，任何人可以使用. 在这里，我之所以用 Maple 而不是用 Mathematica 来编程，是因为我个人认为对于学生来说，学习 Maple 更容易. 如果你倾向于使用 Mathematica，你可以毫不费劲地将书中的 Maple 程序转换为 Mathematica 程序，或者你可以在[Gra93]中找到大量用 Mathematica 编写的几何程序和例子.

尽管这里用到了计算机代数系统，但是从 19 世纪的观点来看，本书依然是传统的. 所不同的是，我在这本书的写作过程中有意地加进了一些我认为是理科专业和数学专业的学生应该知道的资料. 例如，虽然克莱罗关系或雅可比定理等力学现象的描述以及傅科摆这样的力学现象的几何描述等知识可以在一些高级教科书（例如[Arn78]和[Mar92]）中找到，但是出现在本

科生的教科书中，我相信这还是第一次．即使在单独处理数学问题的时候，我也会主动地加上一些应用(不管是不是属于数学方面)．事实上，这对于区分物理(例如肥皂膜)和数学(例如极小曲面)是很有帮助的．

这本书最初是为半学期的微分几何课程设计的．事实上，我为数学、物理、工程学、化学、生物和哲学等专业的学生开设过这门课程．当时，我讲授第 1～7 章．当然，并不是讲授这七章的所有内容，而是着重讲授其中的部分章节，然后要求学生完成包含其他部分的作业．例如，学生做过关于渐伸线、设计齿轮、利用曲率和挠率构造曲线、Enneper 曲面和此曲面面积的极小值、极小曲面上的测地线，以及相对论中的欧拉-拉格朗日方程等方面的研究．很多时候，学生掌握的知识已经超出这本书涵盖的内容，我也因此扩展了自己的知识．在此，向他们表示感谢．这本书不仅可以作为半学期或一学期微分几何课程的教科书，而且也可以作为一学年的教科书．作为一学年的教科书，就可以讲授所有的章节；作为半学期或一学期的教科书，我推荐讲授上面提到的章节，当然也可以根据需要进行选择．

关于这本书的题材布局，有两点需要说明．第一，习题穿插在正文当中．因此，习题就成为正文的重要组成部分，同时也就不容易被发现．读者在学习这本书的时候，至少要了解这些习题．第二，我对正文的定理、引理、例子、定义和评论的顺序的处理同 LaTeX 是一样的．

我要特别感谢以下几位学生．Rob Clark 最先引起我对极小曲面的兴趣，他同 Jack Chen 一起向我展示了如何用计算机(例如 Ken Brakke 的 Evolver 程序)来区分曲面"极小的"和"调和的"性质．Laszlo Ilyes 提供了许多用于最优控制的 Maple 程序．而 Carrie Kyser 把我最初写的可笑的"测地线程序"修改成奇妙的和雅致的程序，结果同我想要做的完全一样．Sue Halamek 对习题解答的初稿作了出色的工作，如果还遗留下任何错误，自然是我在定稿时的疏忽所致．感谢上面提到的学生，感谢所有期待着这本书出版的学生！

感谢我的朋友 Allen Broughton，是他首先用我的手稿讲授这门课程，并使之完善．他还最先探索使用 Maple 来刻画微分几何，并且负责编写计算曲率等第一批程序．如果没有 Joyce Pluth 在 TEX 方面的技能，那么上面所提及的手稿还是原来的样子．她把这些手稿输入电脑并且不厌其烦地给我讲解 TEX 中的一些复杂问题，直到我可以自己使用 TEX．感谢 Elaine Hoff 和 Dena Jones，他们热心地帮助我复印、校对和剪贴．感谢克利夫兰几何/拓扑研讨班的所有成员，他们参与了有关本书各部分的大量讲座．

最后，感谢妻子 Jan 和女儿 Kathy，没有她们的帮助、支持和理解，就不可能出版这本书．谢天谢地，我的电脑终于放假了！

John Oprea
oprea@math. csuohio. edu

第 2 版前言

第 1 版出版以后，我收到很多人提出的评论、建议和修正. 很抱歉，我不能把所有这些都补充到第 2 版. 其中一个原因就是这本书是面向本科生的，我认为有一些主题超出了本科生所能理解的范围. 我从发给我的评论当中学到了很多知识，这也算是写这本书所得到的奖赏吧！因此，我要感谢以下各位，他们除了应尽的职责之外，还提出通常属于更广范围内的评论：David Arnold，David Bao，Neil Bomberger，Gary Crum，Dan Drucker，Lisbeth Fajstrup，Karsten Grosse-Brauckmann，Sigmundur Gudmundsson，Greg Lupton，Takashi Kimura，Jaak Peetre，Ted Shifrin，Peter Stiller.

第 2 版纠正了第 1 版中排版上和数学上的错误，也加入了一些新的内容. 近几年，因为椭圆函数在微分几何和变分法中的应用越来越多，所以我在这一版中加入了一些这方面的简要介绍. 这本书中关于椭圆函数最主要的应用是波状体和 Mylar 气球的显式参数的求导. 这样的显式参数化法也可以确定微分几何的不变量，例如，高斯曲率和测地线分析. 当然，这里要用到 Maple. 椭圆函数的这部分应用是我和 Ivailo Mladenov 合作工作的精华部分，在此我要对他在这方面提供的真知灼见和对本书的辛勤奉献表示感谢.

在第 2 版中，Maple 的作用不仅仅是为了画图，而是为了用计算机来展示一些奇妙的现象. 在将本书从第 1 版 AMS-TeX 转换为第 2 版 LaTeX2e 的过程中，充分证明 Maple 更容易嵌入 Postscript 文件，所以在这一版中增加了很多图片. 这些图片都是我用 Maple 8 生成的. 只要阅读了每章最后关于 Maple 的章节，你就能明白这些图片是怎样生成的. 因为 Maple 在升级的过程中改变了一些命令，所以第 1 版中的程序需要大量修订以后才能在 Maple 8 中运行. 我个人认为 Maple 再次升级不会出现这样的情况. 如果这本书中的程序在新的版本中运行时产生错误，你可以升级 Maple. 需要注意的是，Maple 不再支持“linalg”包，而是支持“LinearAlgebra”包. 本书中所有的 Maple 程序，我都进行了相应的修改. 我想不论 Maple 怎么升级，这些命令在一段时间内是不会改变的. 而且不论怎么变，这本书以研究微分方程的解作为研究微分几何的核心内容是不会改变的，正因为这一点，Maple 通过它的“dsolve”命令以及可以给出微分方程的显式解和数值解而在微分几何的研究当中起着越来越重要的作用.

最初，这本书是为半学期或一学期的课程设计的，讲授曲线和曲面的几何学. 然而，今天的课程已经超出这个范围，所以我愿对尚未制定教学大纲的老师提供一些建议. 如果作为一学期来用，建议讲授第 1、2、3 章以及第 5 章的前半部分. 这部分包括基本的曲线和曲面几何学，同时介绍各种曲率以及利用以上思想研究测地线. 如果是我教授这门课程，我会尽可能地用 Maple 把几何概念直观化，也会把类似于 5.7 节在工业上的应用这样的资料作为这个学期学生的研究课题. 如果作为两个学期来用，第一个学期同上，第二个学期可以讲授第 5 章的后半部分以及第 6、7 章，但是不讲授第 4 章的极小曲面和第 8 章的高维几何学部分. 学完这部分，

在变分法的意义下，学生们将会见到高斯-博内、完整性以及一类几何重现(和一点力学知识).作为一门课程，肯定存在不同于上面提及的讲法，当然，这需要读者自己去挖掘.

John Oprea
oprea@math. csuohio. edu
j. oprea@csuohio. edu
www. csuohio. edu/math/oprea

注：Maple 9 于 2003 年夏天诞生，本书中所有的程序都用 Maple 9 做过测试．所有命令和程序除少数外，都可以运行．3.8 节中的下列代码是用函数 g 和 h 定义一个旋转曲面．

```
> h:=t->h(t);g:=t->g(t);
```

$$h := h$$

$$g := g$$

```
> surfrev:=[h(u)*cos(v),h(u)*sin(v),g(u)];
```

$$surfrev := [h(u)\cos(v), h(u)\sin(v), g(u)]$$

这个程序在 Maple 8 中可以运行，在 Maple 9 中运行时系统会提示在公式“surfrev”中套用的递归次数太多．这时，不定义 g 和 h，直接定义“surfrev”即可．4.9.2 节、4.9.3 节和 4.9.4 节中的程序也遇到同样的定义问题，解决的办法也相似．

致 读 者

在学习一门数学课程的时候，每一个学生都想知道这门课程的实质是什么．通常来说，一门课程由一系列包含着结果和证明的主题组成，教师很清楚这些主题的顺序和陈述的合理性，而学生则不然．事实上，所有的书都一样．编者们由于偏爱他们所从事的学科而对“题材”抓住不放，并希望把它们展示给学生．在此，让我们花一些时间去描述这本书中的微分几何的实质．

微分几何涉及用微积分去了解空间形状及其性质．通常我们有两种主要的途径．首先用参数方程来定义几何体，然后求导，再用代数的办法得到能够准确表示几何实体的新的表达式．如果有了用参数化代数表示的几何体，那么我们就可以从微积分导出能说明几何学某些性质的几何量．最基本的例子就是这本书中常提到的各种各样的曲率．一旦知道这些特殊的量如何出现在微积分中，我们就可以用特定的途径来限制这些量，进而提出问题，即什么几何形状具有满足这些限制的量．例如，知道了曲率的含义，我们就可以提出什么平面曲线具有恒定曲率函数这样的问题．在某种意义下，这是用微分法计算几何量的反运算，可以认为积分法就是这么产生的．更准确地说，这些几何量满足的条件就是一些微分方程，而这些微分方程的解集就是我们要找的几何体．

所以说，微分几何与微分方程紧密相连．对于学习基础的微分几何，并不需要掌握解微分方程的所有奇妙的方法．能够处理可分离的微分方程并且知道一些技巧(这本书所用到的)就行了．甚至有些时候，微分方程的显式解并不存在，但是数值解通常能产生一个解几何体．由于近十年计算机代数系统的发展，一般人也可以做到这一点．

在第 1 章，我们运用上面所提及的方法研究所有几何体的基础——曲线．我们用微积分方法得到确定三维空间上的一条曲线的微分方程组——Frenet 方程，运用计算机代数系统 Maple 得到这组方程的解，进而绘制空间上的曲线．使用任何计算机程序都需要输入参数，这里需要输入的是 Frenet 方程的参数——曲线的曲率和挠率．正如这个过程所反映的，曲率和挠率确定了一条曲线．当然，对曲率和挠率加上限定条件，我们就能看到会产生什么样的解析曲线．

在第 2 章，我们运用第 1 章所学的曲线的知识研究三维空间曲面的几何学．形状算子是一个重要的定义，它与用来理解几何体的各种曲率都密切相关．类似于三维空间里通常的方向导数，形状算子可以理解为在某一个切方向上求微分．它实质上是一个矩阵，这样我们可以用线性变换下矩阵的不变量来定义曲率．例如，主曲率就是形状算子的特征值，平均曲率是特征值的平均值(即矩阵的迹的二分之一)，而高斯曲率则是特征值的乘积(即矩阵的行列式)．当然，有两个方面的问题需要解决．第一，形状算子及其曲率能够反映我们对几何曲面直观的理解；第二，其曲率确实可计算．这是下一章讨论的问题．

在第 3 章，证明了曲率是可计算的，只需通过对参数的求导．不仅如此，我们在曲率上附加一些特定的条件，还能够得到解析解．例如，要求紧曲面上的高斯曲率是常数，或者旋转曲

面上的平均曲率恒为零，我们可以得到满足这些条件的解析曲面．对可计算性这种要求的一个重要副产物，是高斯得到的著名结果：高斯曲率可以由度量直接计算；也就是说，这些函数向我们表明曲面如何扭曲通常意义下的欧几里得距离．这个结果之所以重要是因为它给出了一种曲率定义，可以把曲率从三维空间推广到更抽象的曲面上，这是向更高级的微分几何迈出的第一步．

第 4 章讲述极小曲面，也就是曲面上每点处的平均曲率恒为零的曲面．我们的主题就是阐明(局部的)极小曲面满足一个称为极小曲面方程的(偏)微分方程．而且，在曲面的定义函数中加上适当的限制，可能找到极小曲面方程的解析解．从几何的观点(而不是解析的观点)来看，我们强调的是基本的计算和结果，以及把肥皂膜解释为极小曲面，肥皂泡解释为平均曲率是常函数的曲面．这些方面获得的最重要结果是亚历山大定理，其中证明能够嵌入到三维空间的极小的紧曲面是球面．在这一章中，还讨论了调和函数——导致另一种研究极小曲面的高级方法，这种方法具有更浓的解析意味．特别是，我们引入复变函数作为极小曲面的自然参数．我们不期望读者了解复变函数(只要知道什么是复数)，所以复习了这方面的相关知识．这种方法大大丰富了极小曲面的知识，我们还举了一个例子，说明极小曲面不是使曲面面积达到最小的曲面．

在第 5 章，我们着手去研究不同的几何体．使得点与点之间达到最短距离的道路的类型是一个几何体的基本性质．例如，平面上两点间最短距离是两点间的直线段，而在球面上就不一样了．从克利夫兰到巴黎，除非穿越隧道，否则我们必须通过大圆路径才能达到最短距离．知道最短曲线是球面上的大圆使我们对球面的曲率和对称性有了一个直观的认识．这一章研究的就是曲面上最短长度的曲线，也就是测地线．事实上，我们对此作少许修正，研究的是被称为测地线方程的微分方程，其解就是曲面上的测地线．有时我们可以得到测地线的解析解，更多的时候只能得到数值解，然后绘制测地线，以此来揭示曲面的基本几何特性．测地线方程可以推广到更抽象的情形，所以我们从考察更一般的几何结果开始．

第 6 章是本书最高深的部分．在这一章，我们研究曲率怎样影响最基本的几何性质，如三角形的内角和这样的基本性质．这样得到数学上一个非常漂亮的结果——高斯-博内定理．我们给出了关于这个定理的各种应用，这些应用告诉我们怎样从抽象的定理中得到具体的几何信息．在这一章，我们还介绍了一个对物理有重要影响的概念——完整性，从经典力学到量子力学，这个概念都有着深远的影响．特别是，我们对傅科摆运动过程提出这个概念，再次显示曲率对我们生存的世界的影响．

第 7 章讲述变分法，它简直可以称为几何和自然界关系的哲学基础．物理系统总是处于由最小位能决定的形态．悬挂的绳子由于这个原因以悬链线的形式存在．推广这种思想，得到欧拉-拉格朗日方程，这依然是一个微分方程，它的解是极小的泛函．特别是，哈密顿原理告诉我们，如果物理系统的欧拉-拉格朗日方程与所谓的作用积分相关，那么就出现物理系统的运动．测地线就是一个例子，我们再次看到几何来源于微分方程(微分方程本身是一个物理原理的反映)．

在第 8 章，我们以流形和高维曲面的观点回顾前面学习的知识．需要更为抽象的这一章，

因为超过三维我们无法看见，而对于学习物理或者微分几何的学生来说，这又是进一步研究的基础. 自然界的物理系统很少仅仅依赖于两个参数存在，所以了解含有大量参数的几何学对于分析物理系统来说是非常重要的. 所以在这一章中，我们研究极小子流形、高维测地线方程，以及黎曼曲率、截面曲率、里奇曲率和标量曲率. 这些主题是许多书籍的题材，故本书只说明它们与前面七章中介绍的曲面论的联系.

以上就是这本书的主要内容. 学习这本书的最好的方法就是：寻找正确的微分方程，力求得到方程的解析解或者数值解，最后揭示基本的几何性质. 让我们开始吧！

目　　录

第 1 章　曲线的几何性质

1.1　引言

欧几里得几何空间是由直线和平面构成的．要超越这一平坦的空间到弯曲的世界里，就需要了解更一般类型的曲线和曲面．了解曲线的基本特性也是了解曲面几何性质的基础．

三维空间$\mathbb{R}^3$ 上的曲线是连续映射 α：$I\to\mathbb{R}^3$，其中 I 是实轴$\mathbb{R}$ 上的某种类型的区间(例如 $(0,1)$，(a,b)，$[a,b]$，$(-\infty,a]$，$[0,1]$等)．因为α 的值域在$\mathbb{R}^3$ 中，所以α 的输出有三个坐标．于是，对于 $t\in I$，我们用

$$\alpha(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))$$

作为α 的参数化法(parametrization)，其中 α^i：$I\to\mathbb{R}$ 都是函数．一个较好的方法，就是把曲线看成是空间中粒子随时间 t 变化的运动轨迹 $\alpha(t)$．如果每个坐标函数 α^i 是$\mathbb{R}$ 上可微的实值函数，则称α 是*可微的*或*光滑的*．事实上，为以后定义曲率和挠率，需要每个 α^i 至少是三次可微的．在实际中，这个限制条件并不过分．

映射α 在 t_0 处的*速度向量*定义为

$$\alpha'(t_0)=\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0},\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0},\frac{\mathrm{d}\alpha^3}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0}\right),$$

其中 $\mathrm{d}\alpha^i/\mathrm{d}t$ 是通常意义下的导数，$|_{t=t_0}$ 表示导数在 $t=t_0$ 处的值．为了方便起见，也将这个值记为$\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}(t_0)$．为了说明 α'的几何意义，首先介绍下面例子．

例 1.1.1(曲线的第一个例子：$\mathbb{R}^3$ 中的直线)　我们知道两点决定一条直线．在平面$\mathbb{R}^2$ 上，有一种表示直线的代数方法，那就是通常的斜截式方程．可是，在$\mathbb{R}^3$ 中没有斜率的概念，也就不能用类似的方法给出直线的方程．但是连结 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 两点的直线可以用以下的方法来描述．为了得到所求直线，增加向量 $\boldsymbol{p}$．利用方向向量 $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$，也就是从 $\boldsymbol{p}$ 点到 $\boldsymbol{q}$ 点的方向，参数 t 表示沿着 $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ 移动的距离．经过以上步骤，就得到$\mathbb{R}^3$ 中的*参数形式的直线*(如图 1-1 所示)：

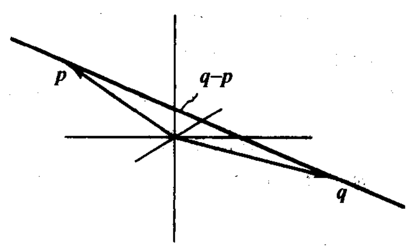

图 1-1　参数形式的直线

$$\alpha(t)=\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}).$$

例如，取 $\boldsymbol{p}=(1,2,3)$且 $\boldsymbol{q}=(-1,4,-7)$，此时 $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}=(-2,2,-10)$，则经过 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 两点的直线为

$$\begin{aligned}\alpha(t)&=(1,2,3)+t(-2,2,-10)\\&=(1-2t,2+2t,3-10t).\end{aligned}$$

练习 1.1.2　求经过$(-1,0,5)$和$(3,-1,-2)$的直线的参数方程．

练习 1.1.3　求$\mathbb{R}^4$ 中经过$(-1,6,5,0)$和$(0,1,-3,9)$的直线的参数方程．

可以看到给定直线 $\alpha(t)=\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$，$\alpha'(t)=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$. 因为方向向量 $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ 也是该时刻的速度向量，所以常记为

$$\alpha(t)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}.$$

1~2 以上描述了直线的速度向量，很自然的问题就是一般曲线 $\alpha(t)$ 的速度向量是什么样子. 其定义为

$$\begin{aligned}\alpha'(t_0)&=\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0},\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0},\frac{\mathrm{d}\alpha^3}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0}\right)\\&=\left(\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha^1(t)-\alpha^1(t_0)}{t-t_0},\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha^2(t)-\alpha^2(t_0)}{t-t_0},\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha^3(t)-\alpha^3(t_0)}{t-t_0}\right)\\&=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))-(\alpha^1(t_0),\alpha^2(t_0),\alpha^3(t_0))}{t-t_0}\right)\\&=\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}.\end{aligned}$$

上式与通常导数的“斜率”定义很相似. 注意极限号内邻近的两个向量总是指向 t 增加的方向. 对 $t<t_0$，因为 $t-t_0$ 是负值，所以上面的结论是正确的. 又 $t\to t_0$，所以向量越来越接近，直到成为曲线在 $\alpha(t_0)$ 处的切向量(参见图 1-2). 也就是说，α 在 t_0 处的速度向量 $\alpha'(t_0)$ 是 α 在 $\alpha(t_0)$ 处的切向量. 注意，我们得到的是确定长度的向量，而非直线. 回忆$\mathbb{R}^3$ 中向量$\boldsymbol{v}=(v^1,\ v^2,\ v^3)$的长度可由勾股定理决定

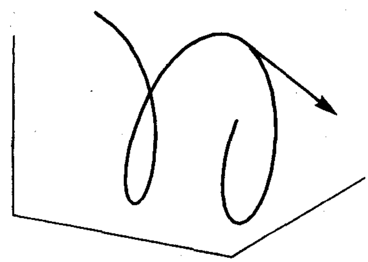

图 1-2 曲线的切向量

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2}.$$

练习 1.1.4 两次运用勾股定理证明$|\boldsymbol{v}|$是(0，0，0)到$(v^1,\ v^2,\ v^3)$的距离.

如果对所有 $t\in I$，$\alpha'(t)\neq 0$，则称 $\alpha(t)$ 是**正则的**. 一般地，如果曲线非正则，就将其分成正则的几段，每段独立考虑. 正则的假定保证了可以沿着曲线作相同方向上的移动. 这对于接

3 下来讨论弧长是很重要的.

例 1.1.5(尖点线 $\alpha(t)=(t^2,\ t^3)$) 注意 $x=t^2$，$y=t^3$，所以 $y=\pm x^{3/2}$，$\alpha'(t)=(2t,\ 3t^2)$ 且 $\alpha'(0)=(0,\ 0)$. 因此 α 是非正则的，但在 x 轴上方和下方部分分别是正则的.

在我们的讨论中，$|\alpha'(t)|=\sqrt{(\mathrm{d}\alpha^1/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}\alpha^2/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}\alpha^3/\mathrm{d}t)^2}$仅仅是 α 的**速度**. 再次把 α 看作粒子轨迹，t 看作时间，可以看到速度向量的长度就是在给定时间粒子的速度. 对直线 $\alpha(t)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$，速度是方向向量的长度$|\boldsymbol{v}|$. 注意，所取的直线都是有固定速度$\boldsymbol{v}$的直线. 稍后我们将看到，每条正则曲线都可以重新参数化使其具有固定的速度，所以这不是本质的限制. 然而，原先给出的参数方程可能掩盖了曲线为直线的事实，直到将其重新参数化，变为含有固定速度的参数方程时才能揭示它的本质. 因为我们想用命题 1.1.7 刻画直线，所以习惯上要把直线重新参数化使其有固定速度.

如果 $\alpha(t)=(\alpha^1(t),\ \alpha^2(t),\ \alpha^3(t))$是$\mathbb{R}^3$ 中的曲线，它的加速度向量表示为

$$\alpha''(t)=\left(\frac{\mathrm{d}^2\alpha^1(t)}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2\alpha^2(t)}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2\alpha^3(t)}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

练习 1.1.6 牛顿提出了一个问题：一条曲线绕一个轴转动产生一个曲面，如果曲面在“稀薄的”流体(如空气)中运动产生的阻力最小，那么这条曲线是什么曲线？牛顿的答案是如下曲线(见第 7 章)：

$$(x(t),y(t)) = \left(\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{t}+2t+t^3\right],\frac{\lambda}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)+t^2+\frac{3}{4}t^4\right]-\frac{7}{8}\lambda\right),$$

其中 λ 是正常数，且 $x\geqslant 2\lambda$. 画出该曲线，计算速度和加速度向量，并求此曲线和 x 轴在交点 $(2\lambda,0)$处的交角.

我们现在来讨论第一个(最简单的非平凡)微积分实例，对曲线的几何性质加上限制. 事实上，这是曲线微分几何的实质. 在后面将会有更多的例子.

命题 1.1.7 *曲线 α 是(有常速度的)直线当且仅当 $\alpha''=0$.*

证明 若 $\alpha(t)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$ 是直线，则 $\alpha'(t)=\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}$ 是常向量)，所以 $\alpha''(t)=0$.

如果对所有的 t，$\alpha''(t)=0$，则对于每个坐标函数 $\alpha^i(t)$ 有 $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha^i(t)}{\mathrm{d}t^2}=0$. 二阶导数为 0，说明 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha^i(t)}{\mathrm{d}t}=v^i$ 是一个常数. 作关于 t 的积分，得到 $\alpha^i(t)=p^i+v^it$，其中 p^i 是积分常数. 则

$$\alpha(t) = (p^1+tv^1,p^2+tv^2,p^3+tv^3) = \boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v},$$ 4

其中 $\boldsymbol{p}=(p^1,\ p^2,\ p^3)$，$\boldsymbol{v}=(v^1,\ v^2,\ v^3)$. 因此，曲线 α 可以表示为参数化的直线. ■

这个简单的结论告诉我们如何使用微积分方法验证几何性质. 为了看出利用这些基本思想能得到什么，考虑下面问题. 求$\mathbb{R}^3$ 中两点 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的最短距离. 在很小的时候我们就知道答案是直线，现在我们证明其正确性. 微积分告诉我们距离是速度的简单积分. 因此积分

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,\mathrm{d}t$$

计算的是正则曲线 α：$[a,\ b]\to\mathbb{R}^3$ 从 $\alpha(a)$到 $\alpha(b)$的弧长(即移动距离). 先考虑弧长的一小段(无穷小的一部分)(如图 1-3 所示)，由勾股定理知，直角边为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 的直角三角形的斜边长 $l=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$. 假设 x，y 是以 t 为参数的函数，则 $\alpha(t)=(x(t),\ y(t))$且 $\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2\mathrm{d}t^2$，$\mathrm{d}y^2=(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2\mathrm{d}t^2$. 所以

$$l=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

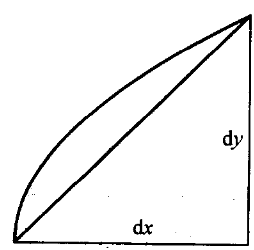

图 1-3 曲线的无穷小段

这个关系式也就是说距离等于速度乘以时间. 通过积分将所有小曲线段相加，得

$$\begin{aligned}L(\alpha)&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_a^b|\alpha'(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$ 5

这种 3 维的直观描述仅仅用到之前 3 维空间中关于勾股定理的练习. 现在，向量$\boldsymbol{v}$ 的长度$|\boldsymbol{v}|$可写成$\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$，其中的“·”运算是向量的点积. 一般地，若$\boldsymbol{v}=(v^1,\ v^2,\ v^3)$，$\boldsymbol{w}=(w^1,\ w^2,\ w^3)$，则$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v^1w^1+v^2w^2+v^3w^3$.

命题 1.1.8 *点积$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos\theta$，其中 θ 是向量$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的夹角.*

证明 如图 1-4 所示，由通常的向量性质可得 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$. 因此

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}&=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\\&=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\\&=|\boldsymbol{v}|^2+|\boldsymbol{w}|^2-2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}.\end{aligned}$$

三角形余弦定律表明 $|\boldsymbol{u}|^2=|\boldsymbol{v}|^2+|\boldsymbol{w}|^2-2|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos\theta$. 两式右边相等，合并相同项，得到

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos\theta.$$

■

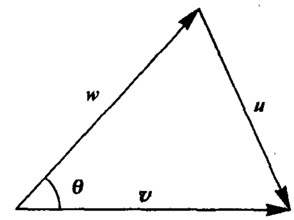

图 1-4

推论 1.1.9(施瓦茨不等式) 点积服从下列不等式：

$$|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\leqslant|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|.$$

证明 注意到 $|\cos\theta|\leqslant 1$，故结论成立. ■

对导数而言，点积就如普通的乘积，也就是说保持莱布尼茨(Leibniz)(或乘法)法则. 特别地有以下命题.

命题 1.1.10 如果 $\alpha(t)$ 与 $\beta(t)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两条曲线，则

6 $$\frac{\mathrm{d}(\alpha\cdot\beta)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cdot\beta+\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}.$$

证明 对分量函数使用莱布尼茨法则，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\alpha\cdot\beta)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3)\\&=\sum_i\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\beta^i+\alpha^i\frac{\mathrm{d}\beta^i}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\sum_i\left(\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\beta^i+\sum_i\alpha^i\frac{\mathrm{d}\beta^i}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cdot\beta+\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

■

在不引起混淆的时候省略 t，乘积法则可简写为 $(\alpha\cdot\beta)'=\alpha'\cdot\beta+\alpha\cdot\beta'$. 现在就可以回答曲线上两点间最短(光滑)路径问题.

定理 1.1.11 在 $\mathbb{R}^3$ 中，两点间有最短弧长的曲线是直线.

证明 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中两点 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$. 连结两点的直线的参数方程是 $l(t)=\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$，其中 $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ 表示由 $\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}$ 的方向向量. 所以 $l'(t)=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ 且 $|l'(t)|=|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}|$ 为常量. 因此

$$L(l)=\int_0^1|l'(t)|\,\mathrm{d}t=|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}|\int_0^1\mathrm{d}t=|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}|,$$

且 $\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}$ 线段(或方向向量)的长度就是 $\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}$ 的距离(正如我们所期望的). 现在考虑连结 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 的另一条曲线(如图 1-5 所示).

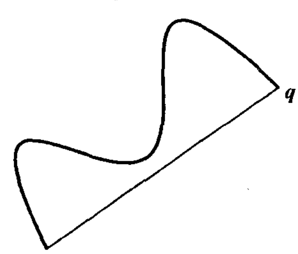

图 1-5 直线和比较曲线

只要证明 $L(\alpha)>L(l)$，那么由 α 的任意性，就可以说明直线是取得最短距离的曲线. 但是如何证明 α 比 l 长呢? 一个直观的解释是，α 从一个错误的方向出发. 也就是说，$\alpha'(a)$ 不是指向 $\boldsymbol{q}$ 点.
7 该如何估计这个偏差呢? $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ 的单位向量 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})/|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}|$ 与 α