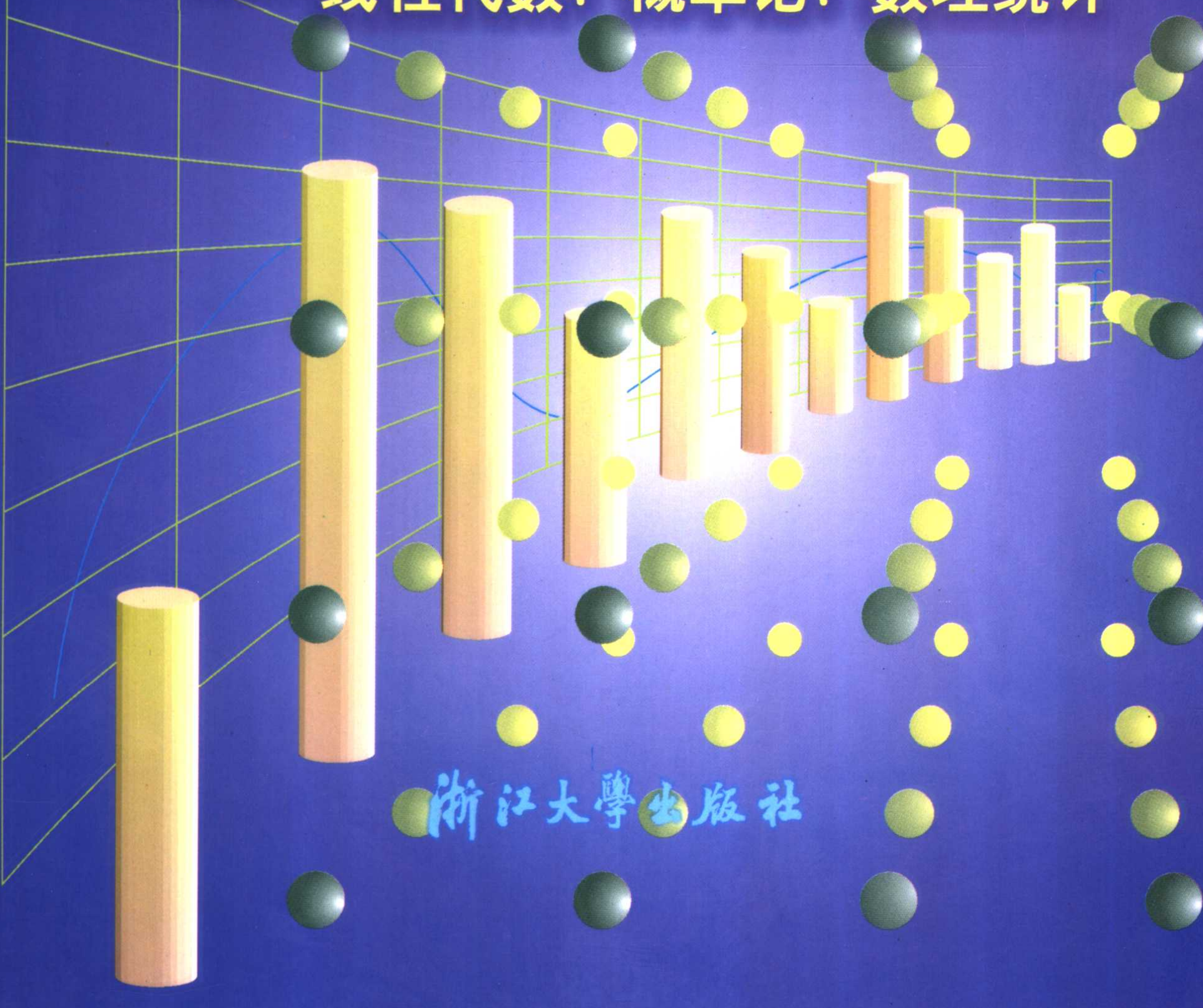
新世纪高等院校精品教材

张有方　黄柏琴　张继昌　编著

工程数学（第二版）

——线性代数、概率论、数理统计



浙江大學出版社

新世纪高等院校精品教材

工 程 数 学

（第二版）

——线性代数、概率论、数理统计

张有方 黄柏琴 张继昌 编著

浙江大学出版社

内 容 提 要

本书根据高等学校《工程数学》教学大纲，在多年教学经验基础上编写而成。

全书分3篇10章。内容包括行列式与矩阵、线性方程组、方阵的对角化与二次型、概率的基本概念及计算、随机变量、随机变量的数字特征、几个极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析。全书取材得当，结构合理，每章配有复习思考题和习题，书末附有习题答案，便于自学和教学。

本书适合作为高等工科院校各专业专科生、夜大生、函授生等学习《工程数学》课程的教材，亦可作为各高等工科院校本科生和工程技术人员学习《工程数学》的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学：线性代数、概率论、数理统计 / 张有方，黄柏琴，张继昌编著. —2版. —杭州：浙江大学出版社，2003.6

ISBN 7-308-01262-X

Ⅰ. 工... Ⅱ. ①张...②黄...③张... Ⅲ. 工程数学—高等学校—教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第031364号

责任编辑 徐素君

出版发行 浙江大学出版社

（杭州天目山路148号 邮政编码310028）

（E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn）

（网址：http://www.zjupress.com）

排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心

印　　刷 德清县第二印刷厂

开　　本 787mm×1092mm 1/16

印　　张 20.5

字　　数 511千

版 印 次 2003年6月第2版 2006年3月第14次印刷

印　　数 52001—57000

书　　号 ISBN 7-308-01262-X/TB·023

定　　价 25.00元

再版前言

自从本书于1993年10月出版至今，已经第10次印刷，深受读者欢迎。为适应当前高等工科院校对《工程数学》开拓创新、与时俱进的教学要求，今对本书作适当的修订补充，以使它更有利于教学。

本书的编写有以下特色：

(1)为适应当前高等工科院校对《工程数学》的教学要求，在编写时，力求按照少而精和实用性的原则，适当精选《线性代数》、《概率论》和《数理统计》中最基本的内容，以期读者能化较少的时间，系统地、清晰地理解并掌握其中的基本概念、基本理论和基本方法。

(2)根据多年教学实践经验，对所精选的内容，在编排上力求紧凑合理，循序渐进；在叙述上力求深入浅出，简明扼要，前后呼应，条理清楚，便于自学。

(3)书中精选的典型例题多，解题演算详尽规范，只要细心研读，定能融会贯通，举一反三。

(4)能否顺利解题是检验读者有否理解所学内容的标准之一。书中各章均配有一定数量的合适的各种类型的复习思考题和习题，通过解题有助于读者深入理解所学的内容。书末附有习题答案，有利于教学。

经过修订补充后，本书仍分3篇10章。第1篇线性代数，内容有行列式与矩阵、线性方程组、方阵的对角化与二次型。本篇中第1章和第2章是必学的内容，对于少学时的专业，第3章与带*号的内容可供选学。第2篇概率论，内容有概率的基本概念及计算、随机变量、随机变量的数字特征、几个极限定理等，对于少学时的专业，本篇中§5.5和§5.6的内容可供选学。第3篇数理统计，内容有数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析。

本书可作为高等工科院校工科各专业及经贸、商务、管理、医药、农林各专业本科生学习《工程数学》的教材，也是成人教育学院、远程教育学院及职业技术教育学院本科生、夜大生、函授生学习《工程数学》的理想教材，还可作为工程技术人员、考研人员学习《工程数学》的合适的参考书。

本书按各篇顺序依次由张有方、黄柏琴、张继昌编写，书中如有不妥之处，恳请指教。

编　者

2003年5月于浙江大学

目　　录

第1篇　线性代数

第2篇　概率论

第6章 随机变量的数字特征、几个极限定理

第3篇 数理统计

第7章 数理统计的基本概念

第8章 参数估计

第 1 章　行列式与矩阵

研究线性方程组的求解问题是线性代数的主要内容之一，而行列式和矩阵不仅在研究线性方程组的求解理论中扮演着极其重要的和不可缺少的角色，还在工程技术各个领域中有着极其广泛的应用。正确理解行列式与矩阵的基本概念，熟练掌握计算 n 阶行列式的基本方法和矩阵中常用的基本的运算法则，将对今后的学习带来很多方便。

本章将根据三阶行列式的展开式的规律，通过 n 级排列的奇偶性来定义 n 阶行列式的展开式，并介绍 n 阶行列式的一些基本性质和 n 阶行列式的按行（列）展开定理，从而使我们能把一个高阶行列式转化为低阶行列式来求值。本章还将介绍矩阵中最基本的概念和一些常用的基本的运算法则。这些基本的概念和基本的运算法则都是极其有用的。

§1.1　n 阶行列式及其基本性质

1.11　n 级排列及其奇偶性

定义 1　由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列。

例 1　2 3 1 是一个 3 级排列，3 4 1 2 是一个 4 级排列，2 5 3 1 4 是一个 5 级排列。

我们知道，由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个，而在这 $n!$ 个不同的 n 级排列中，$12\cdots n$ 是唯一的一个按从小到大次序组成的 n 级排列，称它为 n 级标准排列。

例 2　由三个数 1,2,3 组成的所有不同的 3 级排列共有 6 个，即

1 2 3	2 3 1	3 1 2
1 3 2	2 1 3	3 2 1

其中 1 2 3 是一个 3 级标准排列。

定义 2　在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在它后面的数，则称这两个数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数。逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。

例 3　在 3 级排列 2 3 1 中，2 与 3 不构成逆序，但是 2 与 1 构成一个逆序，这是因为此时 $2>1$，且 2 在 1 的前面。同理，3 与 1 也构成一个逆序，因此 3 级排列 2 3 1 的逆序数为 2，是一个偶排列。

一般地，设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个 n 级排列，我们若将 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$，则按定义 2 知

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)=(j_1\text{后面比 }j_1\text{ 小的数的个数})+(j_2\text{ 后面比 }j_2\text{ 小的数的个数})+\cdots+(j_{n-1}\text{后面比 }j_{n-1}\text{小的数的个数})$$

例 4 (1)因 $\tau(3\ 4\ 1\ 2)=2+2+0=4$，故 4 级排列 3 4 1 2 是偶排列。

(2)因 $\tau(2\ 5\ 3\ 1\ 4)=1+3+1+0=5$，故 5 级排列 2 5 3 1 4 是奇排列。

(3)因 $\tau(1\ 2\ \cdots\ n)=0$，故 n 级标准排列 $1\ 2\cdots n$ 是偶排列。

1.12 n 阶行列式的展开式

考察以下等式(1.1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1}$$

可见：

(1)等式的左边表示一个三阶行列式，横的称为行(row)，纵的称为列(column)，其中 a_{ij} $(i,j=1,2,3)$是数，称它为此行列式的第 i 行第 j 列的元素。

(2)等式的右边表示此三阶行列式的展开式，亦表示此行列式的值。它是 3! 项的代数和，其中每一项都是取自三阶行列式中属于不同的行与不同的列的三个元素的乘积，可写成如下形式

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1.2}$$

这里 $j_1 j_2 j_3$ 是 1,2,3 的一个排列。

(3)容易验证，每个乘积项(1.2)前面所取的正负号与 $\tau(j_1 j_2 j_3)$有关，当 $\tau(j_1 j_2 j_3)$是偶数时，乘积项(1.2)的前面取“+”号，当 $\tau(j_1 j_2 j_3)$是奇数时，乘积项(1.2)的前面取“−”号。例如，在等式(1.1)中有乘积项 $a_{12}a_{21}a_{33}$，因 $\tau(213)=1$ 是奇数，故此乘积项的前面取“−”号。

若采用 $\sum$ 的记号，则可将(1.1)式写成如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 j_3}(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $j_1 j_2 j_3$ 是 1,2,3 的一个排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有的 3 级排列求和。

定义 3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

等于所有取自(1.3)中属于不同的行与不同的列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.4}$$

的代数和。这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是偶数时，乘积项(1.4)的前面取“+”号；当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是奇数时，乘积项(1.4)的前面取“−”号。

若采用 $\sum$ 的记号，则可将这一定义写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和。等式(1.5)的右边表示此 n 阶行列式的展开式，亦表示此 n 阶行列式的值。

规定一阶行列式 $|a|$ 的值等于 a。

为了叙述方便，今采用记号 $|A|,|B|,\cdots$ 来表示某一个 n 阶行列式。

1.13 n 阶行列式的基本性质

计算 n 阶行列式的值是一个重要的问题，由定义 3 知，n 阶行列式的值是 $n!$ 个乘积项的代数和，计算它需要做 $n!\times(n-1)$ 次乘法运算。当 n 较大时，$n!$ 是一个相当大的数，因此，直接按定义来计算高阶行列式的值是很困难的。在这里，我们要介绍 n 阶行列式的基本性质，只要能灵活地应用这些性质，就可以大大地简化 n 阶行列式的计算。事实上，这些基本性质都是三阶行列式的基本性质的推广。

性质 1 行列式经转置后其值不变。

若设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad |A|^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $|A|=|A|^{\mathrm{T}}$。

我们称 $|A|^{\mathrm{T}}$ 为 $|A|$ 的转置行列式，按此规定可知 $|A|$ 也是 $|A|^{\mathrm{T}}$ 的转置行列式，即有 $(|A|^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=|A|$。

性质 2 行列式中任意两行(列)互换后，行列式的值仅改变符号。

若设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行}, \\ \\ \\ \end{array} \qquad |A_1|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

则$|A_1|=-|A|$。

性质 3 若行列式中有两行(列)元素完全相同,则行列式的值等于零。

性质 4 以数 k 乘行列式的某一行(列)中所有元素,就等于用 k 去乘此行列式。或者说,如果行列式的某一行(列)中所有元素有公因子 k,则可将此公因子 k 提到行列式记号的外面。

若设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad |A_1|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则$|A_1|=k|A|$。

性质 5 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则行列式的值等于零。

性质 6 若行列式中有两行(列)元素成比例,则行列式的值等于零。

性质 7 行列式具有分行(列)相加性,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 8 若在行列式的某一行(列)元素上加上另一行(列)对应元素的 k 倍,则行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在计算行列式时，为了便于检查运算的正确性，最好能对每一步运算注明计算的依据，为此我们约定采用如下的记号：

用 $R_i \pm kR_j$ 表示在行列式的第 i 行元素上加上(减去)第 j 行对应元素的 k 倍。

用 $C_i \pm kC_j$ 表示在行列式的第 i 列元素上加上(减去)第 j 列对应元素的 k 倍。

例 5 计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \\ b & a & c & d \\ b & a & d & c \end{vmatrix}$$

解 由观察可知

$$|A| \overset{\substack{R_1-R_2 \\ R_3-R_4}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & c-d & d-c \\ a & b & d & c \\ 0 & 0 & c-d & d-c \\ b & a & d & c \end{vmatrix} \overset{\text{性质 3}}{=\!=\!=} 0$$

例 6 试证

$$\begin{vmatrix} au+cv & as+ct \\ bu+dv & bs+dt \end{vmatrix} = (ad-bc)(ut-vs)$$

证明

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} au+cv & as+ct \\ bu+dv & bs+dt \end{vmatrix} &\overset{\text{性质 7}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} au & as+ct \\ bu & bs+dt \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cv & as+ct \\ dv & bs+dt \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{性质 7}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} au & as \\ bu & bs \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} au & ct \\ bu & dt \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cv & as \\ dv & bs \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cv & ct \\ dv & dt \end{vmatrix} \\ &\overset{\substack{\text{性质 4} \\ \text{性质 6}}}{=\!=\!=} ut\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + vs\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} \\ &= ut(ad-bc)+vs(bc-ad)=(ad-bc)(ut-vs) \end{aligned}$$

例 7 设 n 阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

它们的元素之间满足条件

$$a_{ji}=-a_{ij} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

称它为反对称行列式。今证明当 n 为奇数时,它的值等于零。

证明

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因子}(-1)]{\text{对每一行提取}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n|A|$$

所以,当 n 为奇数时得 $|A|=-|A|$,移项后得 $|A|=0$。

例如,五阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 7 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

是一个奇数阶的反对称行列式,由上述证明可立即知道它的值等于零。

§1.2　n 阶行列式的按行(列)展开定理

我们知道,在计算 n 阶行列式的值时,阶数愈低,计算它的值愈容易。然而在应用行列式的基本性质后,我们还不能把高阶行列式转化为低阶行列式来处理。在这一节里,我们再介绍 n 阶行列式的按行(列)展开定理,从而可以把高阶行列式转化为低阶行列式来求值。

1.21 造零降阶法

定义 4 在 n 阶行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

中，任意一个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都称为 $|A|$ 的一阶子式，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素划去后所得的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。我们把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}。

由定义 4 知，元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 或者相等，或者相差一个符号。

例 8 设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

(1) 若取 $|A|$ 的一阶子式为 a_{23}，则它的余子式为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

而 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

(2) 若取 $|A|$ 的一阶子式为 a_{42}，则它的余子式为

$$M_{42}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

而 a_{42} 的代数余子式为

$$A_{42}=(-1)^{4+2}M_{42}=M_{42}$$

定理 1 如果在 n 阶行列式 $|A|$ 的第 i 行中，除元素 a_{ij} 外，其余元素都等于零，则 $|A|$ 等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积，即 $|A|=a_{ij}A_{ij}$。

***证明** 证明分两步：

(1) 首先证明当 $|A|$ 的第一行元素除 a_{11} 外，其余元素都等于零时，有 $|A|=a_{11}A_{11}$。

已知

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$