

高等学校教材

# 数理统计学讲义

第2版

北京大学

陈家鼎 孙山泽 李东风 刘力平 编著



高等教育出版社

高等学校教材

# 数理统计学讲义

第2版

北京大学

陈家鼎 孙山泽 编  
李东风 刘乃平 纂



高等教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数理统计学讲义/陈家鼎等编著. —2版. —北京:  
高等教育出版社, 2006. 5

ISBN 7-04-019173-3

I. 数... II. 陈... III. 数理统计-高等学校-教材  
IV. O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 023673 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
印 刷	煤炭工业出版社印刷厂	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
		版 次	1993 年 6 月第 1 版
开 本	850×1168 1/32		2006 年 5 月第 2 版
印 张	14.625	印 次	2006 年 5 月第 1 次印刷
字 数	370 000	定 价	20.20 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19173-00

## 内容提要

本版对初版的许多章节进行了改写与扩充,增添了许多重要的内容和实际应用例子,在叙述方法和内容编排上注意重点与非重点、基本内容与进一步内容的界限,层次分明,便于教学。全书共8章,包括绪论、估计、假设检验、回归分析与线性模型、试验设计与方差分析、序贯分析初步、统计决策与贝叶斯统计大意、抽样调查概述等,内容较丰富、重点突出、文字确切易懂。本书可作为高等学校数学专业、统计学专业及有关专业数理统计课程的教材或参考书。

# 第 2 版前言

根据我们在北京大学使用本教材(初版)的教学实践经验,并吸取了国内外近 10 年来出版的多部数理统计优秀教材(见参考书目)的一些好的讲法,本版对初版的许多章节进行了改写与扩充,以便在内容上和编排上更好地适应高等学校相关专业“数理统计”课程的教学需要及数理统计的应用需要。

本版的特点可概述如下:

(一)增添了许多重要内容。例如

(1) 对寻找置信区间和置信限的方法进行了系统论述;

(2) 对“假设检验”中的  $p$  值方法进行了全面论述;

(3) 介绍了有关正态总体的 Behrens - Fisher 问题的解决方法;

(4) 介绍了比率的检验方法,特别是 Fisher 精确检验法;

(5) 对逻辑斯蒂回归作了初步介绍;

(6) 对考虑交互作用的正交设计作了初步介绍;等等。

(二)增加了许多实际应用例子。主要是增加了日常生活、社会调查、商务管理、医学试验等方面的例子。例如在讲比率的两样本检验时,介绍了某公安局两个刑侦组破案能力的比较;在讲多元回归时介绍了生理节律模型;在讲正交设计时,介绍了拖拉机噪声试验;等等。

(三)在叙述方法和内容编排上注意重点与非重点、基本内容与进一步内容的界限,做到层次分明,便于教学。前四章是本书的主体部分。某些内容(包括新添加的一些内容)小字排印或标题上打上 \* 号,以示这些内容不是最基本的,不要求学生掌握。“回归分析”的讲法有较大改变,先对一元线性回归作系统论述,然后再

讲线性模型和多元回归。考虑到有些读者不熟悉线性空间的投影理论,本版以附注的形式详细介绍了不用“投影理论”的处理方法。例如,用矩阵的基本运算直接证明了最小二乘估计的存在定理及高斯-马尔可夫定理。

本版仍坚持初版前言中叙述的原则:大学教材的内容应比教学大纲规定的多一些,更比课堂实际讲授的多一些。这样做有利于学生课外阅读,使有余力的学生选学更多的东西。

编者力图与时俱进,写出反映时代精神的合适教材。但限于水平,书中的缺点、谬误一定不少,欢迎读者和专家批评指出。

陈家鼎 孙山泽 李东风 刘力平

2003年12月于北京大学数学学院

# 初 版 前 言

由于数理统计学在很多科学研究、工程技术和经济管理的领域里有广泛应用,许多高等院校都开设数理统计课。本书是根据笔者在北京大学概率统计专业的教学实践经验,在先前编写的同名讲义(北京大学油印本)的基础上进行较大的改写与扩充而成的。在编写过程中,我们注意了下列各点:

1) 力图对数理统计学的基础部分进行比较准确而全面的系统论述,注意介绍统计思想和统计方法,特别重视数理统计学与社会实践的联系。

2) 本书是入门读物,只要求读者学过微积分、线性代数和初等概率论。为了叙述数理统计学的现代发展,有少量内容涉及实变函数论,个别地方涉及测度论。这些涉及较深数学的内容不是本书的基本部分,不要求读者掌握。

3) 我们认为,大学教材的内容应比教学大纲规定的多一些,更应比课堂实际讲授的多一些。这样做有利于学生课外阅读,使有余力的学生选学更多的东西。本书前四章是主体部分,要求学生掌握;后四章是介绍数理统计学的一些重要分支,教学中可根据教学时数选学部分内容,只要求学生有初步了解。我们把前四章中数学推理过于抽象或冗长的部分用楷体字排印,不要求学生掌握。

本书初稿完成后,承蒙中山大学邓永录教授、邓集贤教授、杨维权教授、华南师范大学汤尚勇教授、华东师范大学吕乃刚副教授进行了细心的审阅,他们提出了很多宝贵的意见。我们在修改和定稿时充分考虑了这些意见,在此向他们表示衷心感谢。高等教育出版社高尚华同志对本书的编写、审查与出版始终给予很大帮

助,在此一并致谢。

由于我们水平有限,本书一定有不少缺点和错误,欢迎各地专家和读者指正。

陈家鼎 孙山泽 李东风

1992年4月于北京大学概率统计系



# 本书常用的记号

$R$  全体实数组成的集合, 即  $R = (-\infty, \infty)$ 。

$R^n$   $n$  维欧氏空间。

$\|a\|$  向量  $a$  的模。当  $a = (a_1, \dots, a_n)$  或  $a = (a_1, \dots, a_n)'$  时,

$$\|a\| = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}。$$

$I_E(x)$  集合  $E$  的示性函数, 即  $x \in E$  时  $I_E(x) = 1$ ,  $x \notin E$  时  $I_E(x) = 0$ 。

$\stackrel{d}{=}$  按定义相等。 $a \stackrel{d}{=} b$  表示用  $b$  来定义  $a$ 。

$EX$  随机变量  $X$  的数学期望(均值)。

$\text{Var}X$  随机变量  $X$  的方差。

$A'$  矩阵  $A$  的转置。

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	1
§1 数理统计学的研究对象 .....	1
§2 数理统计学的基本概念 .....	4
§3 数理统计学发展简史 .....	7
<b>第二章 估计</b> .....	12
§1 参数估计的方法 .....	12
§2 估计的优良性标准 .....	27
§3 置信区间(区间估计) .....	41
§4 分布函数与密度函数的估计 .....	59
习题 .....	73
<b>第三章 假设检验</b> .....	78
§1 问题的提法 .....	78
§2 N-P 引理及似然比检验法 .....	84
§3 单参数情形的假设检验 .....	89
§4 广义似然比检验 .....	108
*§5 临界值和 $p$ 值 .....	131
§6 比率的假设检验 .....	136
§7 拟合优度检验 .....	147
§8 几种常用的非参数检验 .....	163
习题 .....	170
<b>第四章 回归分析与线性模型</b> .....	178
§1 引言 .....	178
§2 一元线性回归 .....	183
§3 线性模型的参数估计 .....	200

§ 4	线性模型的假设检验	219
§ 5	回归分析	227
*§ 6	回归自变量的选择	254
§ 7	逻辑斯谛(logistic)回归模型	260
	习题	265
<b>第五章</b>	<b>试验设计与方差分析</b>	272
§ 1	全面试验的方差分析	272
§ 2	多因素试验设计问题的提法与数学模型	283
§ 3	正交表和正交设计	287
*§ 4	平衡不完全区组(BIB)设计	314
	习题	320
<b>第六章</b>	<b>序贯分析初步</b>	325
§ 1	序贯方法的重要性与两个要素	325
§ 2	序贯概率比检验(SPRT)	329
§ 3	序贯估计与随机逼近	350
	习题	359
<b>第七章</b>	<b>统计决策与贝叶斯统计大意</b>	361
§ 1	统计决策问题概述	361
§ 2	什么是贝叶斯统计	364
§ 3	先验分布的确定	374
*§ 4	应用实例——电视机寿命验证试验的贝叶斯方法	383
	习题	392
<b>第八章</b>	<b>抽样调查概述</b>	395
§ 1	问题的提法	395
§ 2	单纯随机抽样	397
§ 3	区间估计与样本量的确定	403
§ 4	有放回 pps 不等概抽样	407
§ 5	分层抽样	411
§ 6	二阶抽样	415

§7 基于超总体模型的方法 .....	423
习题 .....	426
<b>附表</b> .....	430
附表1 标准正态分布数值表 .....	430
附表2 $t$ 分布临界值表 .....	431
附表3 $\chi^2$ 分布临界值表 .....	432
附表4 $F$ 分布临界值表( $\alpha=0.05$ ) .....	433
附表5 $F$ 分布临界值表( $\alpha=0.025$ ) .....	435
附表6 $F$ 分布临界值表( $\alpha=0.01$ ) .....	437
附表7 柯尔莫戈罗夫检验的临界值表 .....	439
附表8 符号检验临界值表 .....	440
附表9 两样本秩和检验的临界值表 .....	441
附表10 常用正交表 .....	442
附表11 随机数表 .....	449
<b>参考书目</b> .....	451

# 第一章 绪 论

## § 1 数理统计学的研究对象

数理统计学是数学的一个重要分支. 它研究怎样有效地收集、整理和分析带有随机性的数据, 以对所考察的问题作出推断或预测, 直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议. 若在这句文字中去掉“带有随机性的”这几个字, 那就是统计学的研究范围. 统计学也就是数据科学. 由于实践中人们收集到的数据大都受到随机性的影响, 因而数理统计学是统计学的主要组成部分. 在许多西方国家(如美国), 这两个名词的含义基本相同, 许多大学里统计系就是研究数理统计学的, 使用“数理统计学”一词时只是强调统计学中用到很多现代数学. 在我国由于历史的原因, 这两个名词在实际使用时有较大差别. 笔者相信, 在若干年后, 这两个名词所指的范围将相差不大.

数理统计学在工农业生产、工程技术、自然科学、经济学、社会学等领域都有很广泛的应用, 大量实际问题属于数理统计学的研究范围. 举几个例子:

(1) 如何估计产品的寿命? 这是工业品质量管理中极重要的问题. 寿命试验是破坏性试验, 只能抽取少量产品做试验. 为了评价某批电子设备的使用寿命, 随机抽取了 18 台做试验, 测得寿命数据如下(单位: h): 17, 29, 50, 68, 100, 130, 140, 270, 280, 340, 410, 450, 520, 620, 190, 210, 800, 1100.

问: 整批电子设备中, 寿命超过 200 h 的占多大比例?

(从第二章知, 这个比例大约是  $e^{-\frac{200}{318}} = 0.533$ .)

有些寿命问题更为复杂,如导弹的贮存寿命如何确定?设某部门生产同一型号的一批导弹,制造后进行贮存,以备将来之用.导弹贮存太久功能就失效,变成废品.怎样合理地确定贮存期?这是很重要的实际问题.若随机抽取  $n$  件进行使用试验.设第  $i$  件已贮存  $t_i$  年 ( $i=1,2,\dots,n$ ),试验结果无非是:该导弹的功能有效或无效.在前者情况下,第  $i$  个导弹的贮存寿命大于  $t_i$ ,在后者情况下第  $i$  个导弹的贮存寿命小于  $t_i$ ,在两种情况下,精确的贮存寿命是不知道的.有了上述类型的数据,如何确定该型号导弹的贮存期?

(2) 某针织厂进行技术革新.在针织品的漂白工艺过程中,要考虑温度对针织品断裂强力(主要质量指标)的影响.为了比较  $70^\circ\text{C}$  与  $80^\circ\text{C}$  的影响有无差别,在这两个温度下分别作了 8 次试验,测得数据如下:

$70^\circ\text{C}$  时的强力: 20.5, 18.8, 19.8, 20.9, 21.5, 19.5, 21.0, 21.2;

$80^\circ\text{C}$  时的强力: 17.7, 20.3, 20.0, 18.8, 19.0, 20.1, 20.2, 19.1.

究竟两种温度下的强力有没有差别?可以算出这个试验中  $70^\circ\text{C}$  下的平均强力是 20.4,  $80^\circ\text{C}$  下的平均强力是 19.4, 这 1 个单位的差别主要是由于温度不同造成的还是由于随机误差造成的(注意,在同一温度下的数据波动也不小)?鉴别法是什么?

从第三章知道,这 1 个单位的差别主要是由于温度不同造成的,  $70^\circ\text{C}$  时的强力确实大些.

(3) 某公安局有两个刑侦组,在过去一年内第一组接手 25 件人命案,结果侦破了 23 件;第二组接手了 35 件人命案,结果侦破了 30 件,问:两个组的侦破能力有无差别?

从第三章知道,没有理由认为两个组的侦破能力有差别.

(4) 在使用海洋重力仪探测海底石油时,仪器上显示出的信号  $x(t)$  乃是重力加速度信号  $s(t)$  与海浪干扰信号  $n(t)$  的叠加:

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

干扰信号  $n(t)$  的强度一般是有用信号  $s(t)$  的十万倍。问：如何从强干扰背景中把微弱信号  $s(t)$  提取出来？也就是如何设计一个滤波器使得输入是  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) 时输出是  $s(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ )？

这个问题已于 20 世纪 70 年代被北京大学和北京地质仪器厂的同志合作解决了。

(5) 在低钴定膨胀合金材料研究中，如何确定 Ni、Co、Cu、Fe 的合适比例以保证合金材料的膨胀系数与陶瓷材料的膨胀系数很接近？如何做到尽量节省 Co 的用量？

这个问题可用数理统计中的回归分析法处理，已于 20 世纪 70 年代被北京大学和冶金部等单位的同志合作解决了，参看第四章。

(6) 为了探讨吸烟与患慢性支气管炎是否有关联，调查了 339 人。情况如下表：

人 数	患慢性支气管炎	未患慢性支气管炎	合 计
吸 烟	43	162	205
不吸烟	13	121	134
合 计	56	283	339

问：从这批数据能否断定患慢性支气管炎与吸烟有关？

利用列联表分析法知答案是肯定的。参看第三章。

从上面几个例子看出，数理统计能够处理的问题是多种多样的。哪儿有受随机性影响的数据，哪儿就有数理统计的问题。为了研究随机现象（偶然现象）中的规律性，就需要收集数据，并在此基础上对数据进行分析（由表及里、由此及彼），以得出科学的结论，这正是数理统计学的任务。当然，和整个数学一样，数理统计学只是各个学科各个业务领域的研究工具，解决实际问题时不能离开所论问题的专门知识。

数理统计学含有丰富的统计方法与系统的数学理论。它与整

个数学大厦的其他部分有密切关系. 数理统计学中用到很多近代数学知识, 主要是微积分、函数论、线性代数, 也用到泛函分析、拓扑学、组合数学、抽象代数和微分几何的知识, 但与数理统计学关系最密切的是概率论. 在很大程度上可以说: 概率论是数理统计学的基础, 数理统计学是概率论的一种应用. 但它们是两个并列的数学分支学科, 没有从属关系.

数理统计学又是一门实践性很强的应用科学, 它同大量的数据打交道. 处理数据是一件十分重要而又相当繁琐的工作, 电子计算机是数理统计学的重要工具. 每位优秀的数理统计工作者应该不仅具有良好的数学基础, 而且能够熟练地使用电子计算机.

## § 2 数理统计学的基本概念

数理统计学的最基本概念是: 总体、样本、统计量、估计、假设检验、统计决策等.

我们常把被研究的对象的全体(包括有形的和潜在的)称作总体. 常用随机变量(随机向量、随机过程) $X$ 来表示一个总体(或总体的特性值), 例如用 $X$ 表示一批电子设备的寿命, 意思是: 从中任意抽取一件电子设备, 其寿命是不能预先确定的, 可看成随机变量 $X$ 的值. 本讲义是数理统计学的入门教材, 主要讨论随机变量的情形. 至于总体是随机向量或随机过程的情形, 以后有“多元统计分析”和“时间序列分析”等课程专门进行论述.

以下以随机变量为例介绍若干基本概念(对于随机向量、随机过程的情形可做相仿的讨论). 当总体用随机变量 $X$ 描述时,  $X$ 的分布函数 $F(x)$ 也称为总体的分布函数. 要了解总体就是要了解其分布函数. 在数理统计学中, 分布函数 $F(x)$ 是未知的, 研究工作就是要对总体进行调查(或观测)并对调查来的数据进行科学处理, 以便知道 $F(x)$ 是什么样的.

怎样进行调查? 逻辑上有两种方式: 普查和抽查. 普查就是



对总体的每个个体都进行调查,这种方式有很大的局限性,当总体包含的个体数相当大时,由于调查工作量太大而难以采用;当总体包含的个体有无限多或对个体的调查具有破坏性时,根本不能采用.另外一种方式就是抽查,即从总体中抽取若干个有代表性的个体  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (这里  $X_i$  是第  $i$  次抽取时得到的个体的观测值),  $(X_1, \dots, X_n)$  叫做总体的样本,  $n$  叫做样本量或样本大小. 怎样抽查呢? 数理统计学中采取“随机抽样法”. 即样本中包含哪些个体不是事先确定的,总体中的每一个体均有机会进入样本. 在数理统计学中使用得最多的是“简单随机抽样法”. 这个名词有两种不同的含义<sup>①</sup>,其中最常用的一种含义是:它是这样的一种抽取方法,使得  $X_1, \dots, X_n$  作为  $n$  个随机变量是相互独立的,而且与总体有相同的概率分布. 这种样本叫做“简单随机样本”.

怎样才能得到“简单随机样本”呢? 有两种基本方法. ① “有放回地逐次随机抽取法”. 总体中的每个个体都有同样的机会被抽入样本,且每次抽出的个体,在记下其值后,还要放回到总体中去,以保证在下次抽取时每个个体仍有与第一次抽取时相等的机会被抽入样本. 随机性表现在:样本中包含哪些个体,是出自机会,而不是在抽样前预定的. ② 对总体  $X$  进行多次独立的重复观测,这时观测到的值可以看成是总体的所有可能值(无形地存在着)的一部分. 例如用仪器对某一物体的长度进行精密测量,我们把测量结果看成随机变量(总体可想像为一切可能值的集合,例如  $(0, \infty)$  或更大的集合),把  $n$  次重复测量的结果记为  $X_1, \dots, X_n$ , 则得到简单随机样本.

我们强调指出,在实施抽样之后得到  $n$  个实数  $x_1, \dots, x_n$ . 它

---

① 在总体只含有限个个体(如有  $N$  个个体),“简单随机抽样法”往往指:从总体中随机地抽取  $n$  个. 这里“随机地”含义是:从  $N$  个个体中任意抽取  $n$  个,共有  $C_N^n$  个可能的结果,这些结果有相等的概率,都是  $(C_N^n)^{-1}$ . 这是无放回的抽取法,得到的样本  $(X_1, \dots, X_n)$  不是下文定义的“简单随机样本”,我们称之为“单纯随机样本”,以示区别. 对这种样本,在第八章中进行讨论.