创新思维

数学同步辅导

创新思维教研组 组编

必修 2

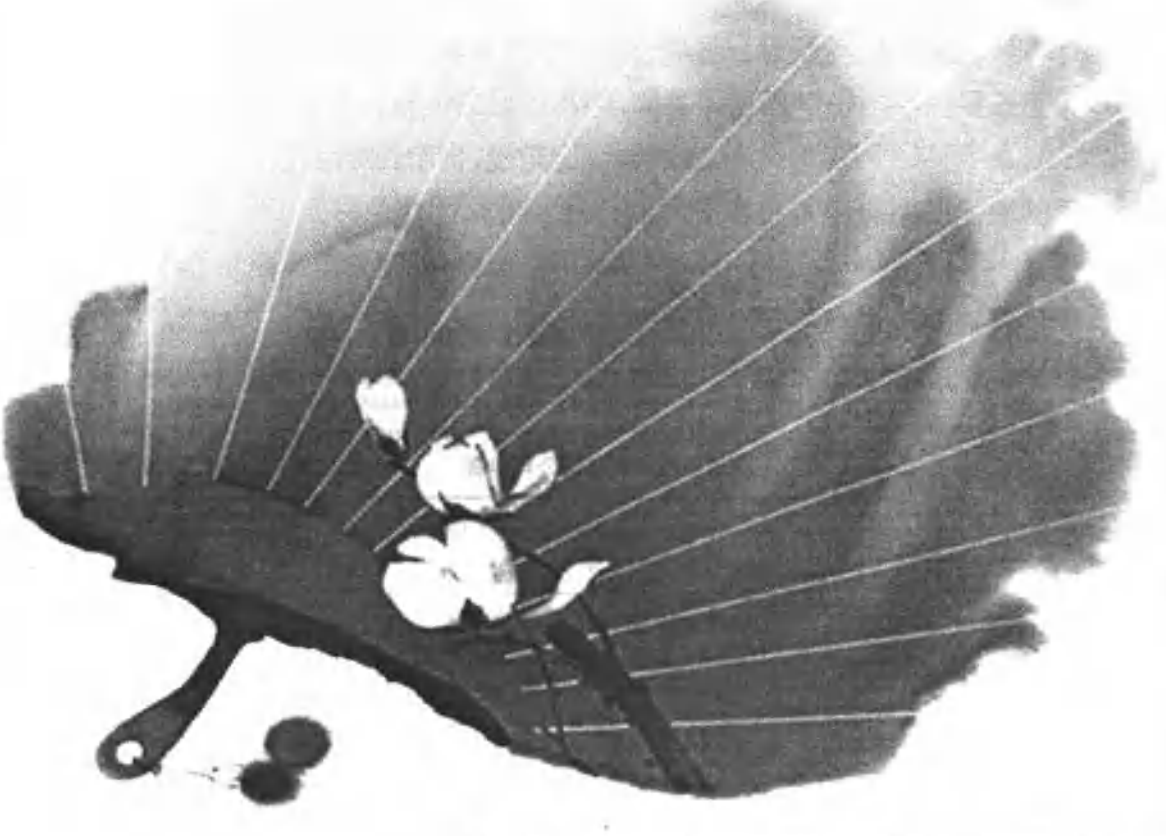
大连理工大学出版社

创新思维

数学同步辅导

必修2

创新思维教研组 组编



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

创新思维·数学同步辅导　2:必修 / 创新思维教研组组编．—大连:
大连理工大学出版社，2006.9
ISBN 7-5611-3298-0

Ⅰ．创…　Ⅱ．创…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 089105 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:205mm×283mm　印张:8　字数:260 千字　插页:32
2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:郭继涛　责任校对:李　强
封面设计:季　强

定　价:9.90 元

前 言

今年辽宁省的高中一年级学生进入新一轮课程改革。面对新的教材、新的教学模式、新的教学理念，许多同学心中都有些茫然。针对这种情况我们组织全国几十位高级教师精心打造了《创新思维·同步辅导》系列丛书，目的就是帮助同学们更好地理解教材，顺利地通过概念与实际联系的瓶颈，把知识学懂、学活，同时为下一步的学习打下坚实的基础。

本丛书具有以下特点：

●透彻　作者在对新课程标准和现行考试大纲深入研究的基础上，着力对重点、难点、疑点进行突破，对各种题型和解题方法、技巧、规律、误区等进行透彻的讲解，把培养同学能力升级的步骤和途径作为突出的重点来讲解。

●新颖　紧扣课标理念，从新课标倡导的自主、合作、探究的理念入手，不断创设问题情境。书中有大量新颖的与生活实际相结合的探究性问题，以培养同学们在探究过程中理解知识，并运用知识解决问题的能力。

●实用　为使同学们能更好地理解教材中的重点、难点、疑点，本丛书精编例题，力争对每一个知识点、易错点、易忽略点、考点尽量地进行剖析。点点对应例题，题题揭示规律。

●灵活　全书在与教材对应设置了统一栏目的同时，编者根据教材的内容需要进行了适当调整，建立起教师教学和学生自学的链接，更突出了灵活性。

●科学　本丛书在体例设计上特色鲜明、科学合理，有利于学生认知规律的形成和思维能力的提高，使学生的思维更具有敏捷性、科学性和发散性。

综上，《创新思维·同步辅导》以一种全新的理念、全新的模式去诠释当今教材与教学的关系，诠释素质教育与应试教育的关系。愿《创新思维·同步辅导》丛书引领您走向成功的新境界！

编　者

2006.8

目录

第一章　立体几何初步

1.1　空间几何体

1.1.1　构成空间几何体的基本元素

教材重点剖析

1 长方体的有关概念

如图 1-1-1，长方体由六个矩形(包括它的内部)围成．围成长方体的各个矩形，叫做长方体的面；相邻两个面的公共边，叫做长方体的棱；棱和棱的公共点叫做长方体的顶点．长方体有 12 条棱，8 个顶点．

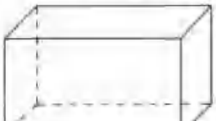


图 1-1-1

2 构成几何体的基本元素

观察长方体和各种几何体的构成可以发现，一个几何体是由点、线、面构成的，点、线、面是构成几何体的基本元素．

3 平面的概念

常见的桌面、黑板面、海面，都给我们以平面的形象．立体几何里所说的平面就是从这样一些物体抽象出来的，但是几何里的平面是无限延展的．

◉理解整合

关于平面的概念要注意以下几点：

1．与以前学习的"点"、"线"、"集合"的概念一样，平面是一个只具有描述性而不加定义的原始概念；

2．平面是无厚薄、无大小的，无数个平面重叠在一起仍然是一个平面，平面无所谓面积；

3．平面是无限延展的，所以它是没有边界的，一个平面将空间分成两部分．

4 平面的画法

立体几何中，我们通常用平行四边形来表示平面．当平面水平放置时，通常把平行四边形的锐角画成 45°，且横边长是邻边长的 2 倍．如果一个平面被另一个平面遮挡住，为了增强它的立体感，我们常将被挡住部分用虚线画出来(或不画)(如图 1-1-2)．

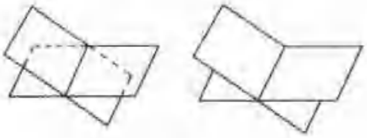


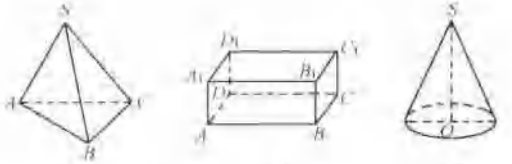
图 1-1-2

◉理解整合

关于平面的画法注意以下几点：

1．所画的平行四边形表示的是整个平面，需要时，可以把它延展开来．

2．有时根据需要，平面也可用其他平面图形表示：如用三角形、矩形、圆等平面图形来表示平面．如图 1-1-3 中几何体的底面．



(1)　(2)　(3)

图 1-1-3

3．画表示竖直平面的平行四边形时，通常把它的一组对边画成铅垂线．

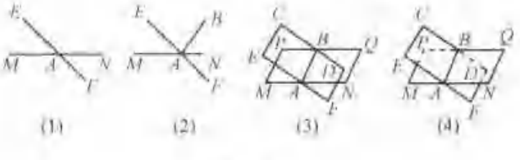
4．两个相交平面的画法．

①画两条相交直线，表示两个平面的平行四边形相交的两条边，如图 1-1-4(1)中的 EF、MN．

②画两个相交平面的交线，如图 1-1-4(2)中的 AB．

③通过端点 E、F、M、N 分别画出与 AB 平行且相等的线段 EC、FD、MP、NQ，连结 CD 和 PQ，可以得到表示平面的平行四边形 $EFDC$ 和 $MNQP$．如图 1-1-4(3)．

④把被平面遮住的那部分画成虚线，如图 1-1-4(4)．



(1)　(2)　(3)　(4)

图 1-1-4

5 平面的表示

1. 用希腊字母 α、β、γ 等表示，如平面 α、平面 β、平面 γ 等；

2. 用代表平行四边形的四个顶点，或者相对的两个顶点的大写英文字母表示；如平面 $ABCD$，平面 AC、平面 BD；

3. 用平面内不共线的三个顶点的字母表示，如平面 ABC.

6 对直线、平面、曲面的进一步理解

我们还可以从运动的观点，来理解空间基本图形之间的关系. 流星划过夜空，给我们一种“点动成线”的视觉感受. 如图 1-1-5，在几何中，可以把线看成点运动的轨迹，如果点运动的方向始终不变，那么它的轨迹就是一条直线或线段；如果点运动的方向时刻在变化，则运动的轨迹是一条曲线或曲线的一段；同样，一条线运动的轨迹可以是一个面，面运动的轨迹（经过的空间部分）可以形成一个几何体.

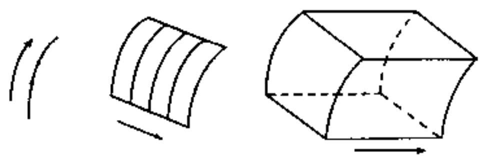


图 1-1-5

直线平行移动，可以形成平面或曲面. 直线绕定点转动，可以形成锥面，如图 1-1-6.

图 1-1-6

如图 1-1-7 中的长方体（水平放置），通常记作 $ABCD-A'B'C'D'$. 这个长方体可看成矩形 $ABCD$ 上各点沿铅垂线向上移动相同距离到矩形 $A'B'C'D'$ 所形成的几何体.

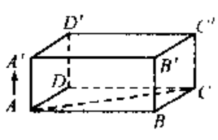


图 1-1-7

设想长方体的棱可延伸为直线，面可延伸为平面.

直线 AA' 和直线 BC，它们既不相交也不平行，它们不可能在同一平面内. 这种既不相交又不平行的两条直线叫做异面直线.

直线和平面有可能没有公共点，这时，我们说直线和平面平行. 直线 AB 平行平面 $A'C'$，记作 $AB//$ 平面 $A'C'$.

直线 AA' 和平面内的两条直线 AB、AD 都垂直. 直线 AA' 给我们与平面 AC 垂直的形象. 这时我们说直线 AA' 与平面 AC 垂直，A 为垂足. 记作直线 $AA'\perp$ 平面 AC. 直线 AA' 称做平面 AC 的垂线. 平面 AC 称做直线 AA' 的垂面. 线段 AA' 的长称做点 A' 到平面 AC 的距离.

两个平面会相交于一条直线. 这时，我们说两个平面相交. 如果两个平面相交，并且其中一个平面通过另一个平面的垂线，两个平面给我们互相垂直的形象，这时，我们说两平面互相垂直，如果两个平面没有公共点，则说这两个平面平行. 如果面 $ABCD$ 作为长方体的底面，则棱 AA'、BB'、CC'、DD' 互相平行且等长，我们知道它们都是这个底面上的高. 它们的长度称做两底面间的距离.

……………解题思路剖析……………

▶基础题型

1. 平面概念的理解

例 1 下列说法中正确的是________.

(1) 平行四边形是一个平面.

(2) 任何一个平面图形都是一个平面.

(3) 平静的太平洋面就是一个平面.

(4) 圆和平面多边形都可以表示平面.

解析：(1) 不正确. 我们用平行四边形来表示平面，但不能说平行四边形是一个平面. 平行四边形它仅是平面上四条线段构成的图形，它是不能无限延伸的.

(2) 不正确. 平面图形和平面是完全不同的两个概念，平面图形是有大小的，它是不可能无限延展的.

(3) 不正确. 太平洋再大也会有边际，也不可能是绝对平的.

(4) 正确. 在需要时，除用平行四边形表示平面外，还能用三角形、梯形、圆等来表示平面.

◉技巧点拨

平面与平面图形既有区别又有联系：平面没有厚度、绝对平展、且无边界，是一种理想的图形. 平面可以用三角形、正方形、梯形、圆等平面图形来表示. 但平面图形如三角形、正方形、梯形等，它们是有大小之分的，不能说三角形、正方形、梯形等是平面.

2. 平面的画法

例 2 下面图形画法不正确的是________.

图 1-1-8

解析：图 1-1-18② 中直线画到表示平面的平行四边形外

边去了，感觉直线不是在平面内了；①③都正确.

例 3 图 1-1-9 表示两个相交平面，其中画法正确的是(　　)

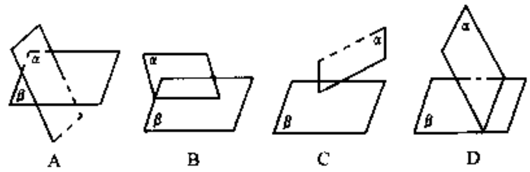


图 1-1-9

解析：对于 A，图中没有标出平面与平面的交线，并且实线、虚线使用不当，故 A 不正确. 对于 B，图中不能看出哪一部分被遮住，两个平面的交线也不合适，感觉只能一部分相交. 同理 C 图也是不正确的. D 的图形画法正确.

故选 D.

◉方法总结

以上两例画空间点、线、面的位置关系，一定要注意它们的相对位置，挡住的部分一定要用虚线或不画，以增强图形的直观性与立体感.

▶创新题型

1. 开放探究题

例 4 如图 1-1-10，要将一个正方体模型展开成平面图形，需要剪断多少条棱？你的结论可以作为一条规律来用吗？

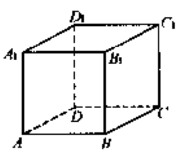


图 1-1-10

解析：需要剪断 7 条棱.

因为正方体有 6 个面，2 个面有 1 条棱相连，6 个面就有 5 条棱相连，所以剪断 7 条棱. 规律是正方体的平面展开图只能有 5 条棱相连，但是，有 5 条棱相连的 6 个正方形不一定是正方体的平面展开图.

◉方法总结

本题探究将一个正方体模型展开成平面图形需要剪断棱的条数，需进行不断地尝试，另外对空间想象能力的要求也比较高.

2. 课标创新题

例 5 如图 1-1-11 的四个平面图形中，每个小四边形皆为正方形，其中可以沿两个正方形的相邻边折叠围成一个立方体的图形为(　　)

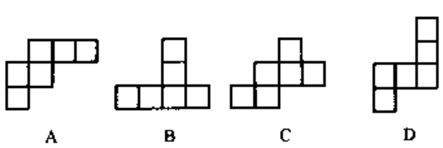


图 1-1-11

解析：固定其中一个小正方形作为底面，将其他正方形沿相邻边向上折叠，对于 A、B、D 在折叠过程中总有两个面重合在一起，不能围成一个正方体；只有 C，无论怎样折叠，总能围成一个正方体. 故选 C.

◉方法总结

本题通过观察、分析、及动手操作，考查了学生的空间想象能力和动手操作能力.

▶高考题

例 6 （2006・陕西）已知平面 α 外不共线的三点 A、B、C 到 α 的距离都相等，则正确的结论是(　　)

A. 平面 ABC 必平行于 α

B. 平面 ABC 必与 α 相交

C. 平面 ABC 必不垂直于 α

D. 存在△ABC 的一条中位线平行于 α 或在 α 内

解析：符合条件的图形情况如图 1-1-12，故选 D.

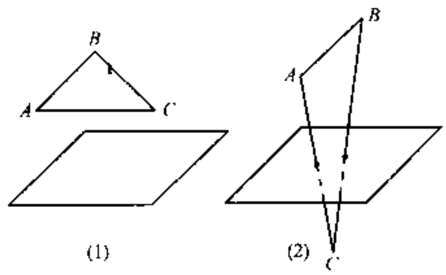


图 1-1-12

◉技巧点拨

本题一定要注意图 1-1-12(2)所示的情况.

【拓展训练】

1. 下列命题

(1)书桌面是平面；

(2)8 个平面重叠起来，要比 6 个平面重叠起来厚；

(3)有一个平面的长是 50 m，宽是 20 m；

(4)平面是绝对的平、无厚度、可以无限延展的抽象的数学概念.

其中正确命题的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 图 1-1-13 中的图形表示有何不同？

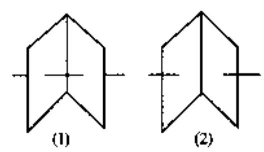


图 1-1-13

3. 如图1-1-14，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3$，$BC=2$，$BB_1=1$，由A到C_1在长方体表面上的最短距离为多少？

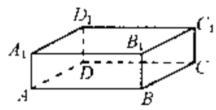


图1-1-14

4. 如图1-1-15，小明设计了某个产品的包装盒，但是少设计了其中一部分，请你把它补上，使其成为两边均有盖的正方体盒子.

(1)你能有几种弥补的办法？

(2)任意画出一种成功的设计图.

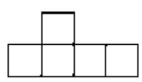
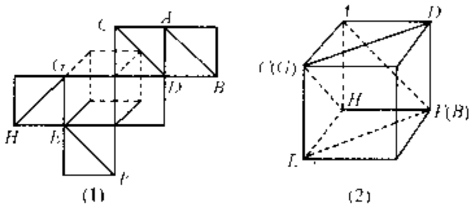


图1-1-15

解题方法放送

立体图形的折叠与展开(一)

例 如图1-1-16(1)，表示一个正方体表面的一种展开图，图中的四条线段AB、CD、EF和GH在原正方体中不在同一平面内的有________对.



(1)　　　　(2)

图1-1-16

解析：将展开图折叠可得如图1-1-16(2)所示的正方体，由图可知，正方体中不在同一平面内的线段有3对.

能级精题演练

一、实践应用

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由.

(1)平行四边形是一个平面；

(2)任何一个平面图形都是一个平面；

(3)空间图形中先画的线是实线，后画的线是虚线.

2. 判断题

(1)长方体是由六个平面围成的几何体；（　　）

(2)长方体可看作一个矩形$ABCD$上各点沿铅垂线向上移动相同距离到矩形$A'B'C'D'$所形成的几何体；（　　）

(3)长方体一个面上任一点到对面的距离相等.（　　）

3. 下列命题正确的是（　　）

A. 直线的平移只能形成平面

B. 直线绕定直线旋转形成柱面

C. 直线绕定点旋转可以形成锥面

D. 曲线的平移一定形成曲面

4. 下列关于长方体的叙述不正确的是（　　）

A. 将一个矩形沿竖直方向平移一段距离可形成一个长方体

B. 长方体中相对的面都相互平行

C. 长方体中某一底面上的高的长度就是两平行底面间的距离

D. 两底面之间的棱互相平行且等长

5. 长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的一条对角线$AC_1=8\sqrt{2}$，$\angle C_1AA_1=45°$，$\angle C_1AB=60°$，则$AD=$________.

二、拓展提高

6. 长方体的表面积为11，十二条棱长度之和为24，求这个长方体的一条对角线的长.

7. 下列四个命题：①平行于同一条直线的两平面平行；②平行于同一个平面的两平面平行；③垂直于同一条直线的两平面平行；④与同一条直线成等角的两平面平行.

其中正确的命题是（　　）

A. ①②　　　B. ②③

C. ③④　　　D. ②③④

1.1.2 棱柱、棱锥和棱台的结构特征

教材重点剖析

❶多面体

(1)多面体是由若干个平面多边形所围成的几何体.

(2)多面体的元素

①围成多面体的各个多边形叫做多面体的面；

②相邻的两个面的公共边叫做多面体的棱；

③棱和棱的公共点叫做多面体的顶点；

④连结不在同一个面上的两个顶点的线段叫做多面体的对角线.

(3)凸、凹多面体

把一个多面体的任意一个面延展为平面，如果其余的各面都在这个平面的同一侧，这样的多面体叫做凸多面体(如图 1-1-17(1)(2)(3))，否则就叫做凹多面体(如图 1-1-17(4)).

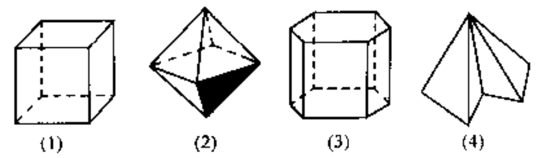


图 1-1-17

(4)多面体的分类

①按多面体的面是否在任一面的同侧关系分，可分为凸多面体和凹多面体；

②按多面体的面数划分，可分为四面体、五面体、六面体、七面体…

(5)多面体的截面

一个几何体和一个平面相交所得到的平面图形(包含它的内部)，叫做这个几何体的截面.

❷棱柱

(1)概念：一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱.

在棱柱中，两个互相平行的面叫做棱柱的底面，简称底，其余各面叫做棱柱的侧面，相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱；侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点. 棱柱中不在同一平面上的两个顶点的连线叫做棱柱的对角线. 棱柱的两个互相平行的底面之间的距离叫做棱柱的高.

(2) 棱柱的分类

底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……

(3)棱柱的记法

①用表示底面各顶点的字母表示棱柱.

如图 1-1-18，(1)可表示为棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，(2)可表示为棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$；(3)表示为棱柱 $ABCDE-A_1B_1C_1D_1E_1$，(4)表示为棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

②用棱柱的对角线表示棱柱.

如图 1-1-18(2)可表示为棱柱 AC_1 或棱柱 BD_1 等，(3)可表示为棱柱 AC_1 或棱柱 AD_1 或棱柱 AE_1 等，(4)可表示为棱柱 AC_1 或棱柱 AD_1 等.(思考：(1)能否表示为棱柱 AC_1?)

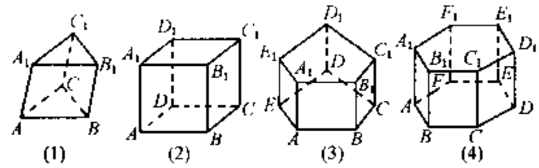


图 1-1-18

注意：

(1)理解棱柱的概念、结构特征要结合实物模型.

(2)几何体中被遮住的部分，可以不画线或画成虚线(如图 18(1)中 AC、BC、CC_1 被遮住，画成虚线)，这与平面几何中辅助线的画法有重大区别，要特别注意.(实物图中不画线，一般的结构图画为虚线)

(3)由棱柱的概念可以得到棱柱有以下性质：

①两个底面互相平行且全等；

②其余各面都是平行四边形；

③棱柱的两个底面与平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形(具体的证明方法以后会学到)；

④过棱柱不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形.

◉推广引申

棱柱概念的推广

1. 斜棱柱：侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱，如图 1-1-18 中的(1)即是一个斜三棱柱.

2. 直棱柱：侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱，如图 1-1-18中的(2)、(3)、(4)分别为直四棱柱、直五棱柱、直六棱柱. 易知直棱柱的侧面是矩形.

3. 正棱柱：底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱，如图 1-1-18中的(2)、(3)、(4)分别是一个正四棱柱、正五棱柱、正六棱柱. 易知正棱柱的侧面是全等的矩形.

4. 平行六面体：底面是平行四边形的四棱柱叫做平行六面体. 易知平行六面体的六个面都是平行四边形.

5. 直平行六面体：侧棱和底面垂直的平行六面体叫做直平行六面体.

6. 斜平行六面体：侧棱和底面不垂直的平行六面体叫做斜平行六面体.

7. 长方体：底面是矩形的直平行六面体叫做长方体. 长方体一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和.

8. 正方体：棱长都相等的长方体叫做正方体.

9. 有关四棱柱、平行六面体、直平行六面体、长方体、正四棱柱、正方体有如下关系

$$\text{四棱柱}\xrightarrow[\text{平行四边形}]{\text{底面是}}\text{平行六面体}\xrightarrow[\text{底面}]{\text{侧棱垂直}}\text{直平行六面体}\xrightarrow[\text{矩形}]{\text{底面是}}\text{长方体}\xrightarrow[\text{正方形}]{\text{底面是}}\text{正四棱柱}\xrightarrow[\text{底面边长相等}]{\text{侧面与}}\text{正方体}$$

❸棱锥

(1)概念:一般地,有一个面是多边形,其余各面都是有一公共顶点的三角形,由这些面所围成的几何体叫做棱锥.

棱锥中的多边形叫做棱锥的底面. 如图 1-1-19(1)的面 ABC(思考:用面 PAB 作底面可以吗? 面 PAC、PBC 呢?),(2)的面 $ABCD$ 就是棱锥的底面.

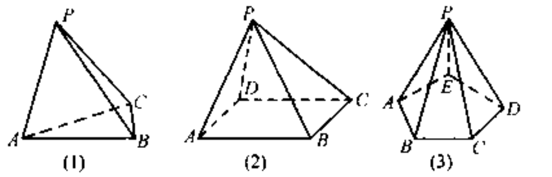


图 1-1-19

棱锥中除底面以外的各个面都叫做棱锥的侧面. 如图 1-1-19 中的面 PAB、面 PCB 等都是棱锥的侧面.

相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱. 如图中 PA、PB 等都是棱锥的侧棱.

棱锥中各个侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点. 如图 1-1-19中 P 是各个侧面的公共顶点,P 是棱锥的顶点.

棱锥的顶点到底面的距离叫做棱锥的高.

棱锥中过不相邻的两条侧棱的截面叫做棱锥的对角面;如图 1-1-19(1)没有对角面,(2)的对角面为 PAC,PBD;(3)的对角面有 PAC,PAD,PBE,PCE 等.

(2)棱锥的分类

底面为三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥……

(3)棱锥的记法

①用顶点和底面各顶点的字母表示.

如图 1-1-19 (1) 中可记为三棱锥 $P\text{-}ABC$;(2)可记为四棱锥 $P\text{-}ABCD$;(3)可记为五棱锥 $P\text{-}ABCDE$ 等.

②用对角面表示.

如图 1-1-19 (2)可记为四棱锥 $P-AC$;(3)可记为五棱锥 $P\text{-}AC$ 等.(思考:图中(1)可用此记法吗?)

注意:

(1)三棱锥也叫四面体,各棱都相等的三棱锥叫正四面体.

(2)过棱锥不相邻的两条侧棱的截面是三角形.

(3)与底面平行的截面和底面是相似多边形.(具体的证明方法以后会学到)

◉推广引申

棱锥概念的推广

1. 正棱锥:如果一个棱锥的底面是正多边形,并且顶点在底面上的射影是底面中心,这样的棱锥叫做正棱锥. 易知正棱锥的侧面都是全等的等腰三角形.

2. 正棱锥的斜高:正棱锥侧面等腰三角形底边上的高叫做正棱锥的斜高. 易知正棱锥的斜高都相等.

❹棱台

(1)概念:用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,截得的底面和截面之间的部分,这样的几何体叫做棱台.

原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的下底面和上底面. 图 1-1-20 中的面 $ABCD$,面 $A'B'C'D'$ 等.

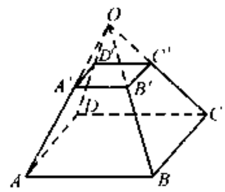


图 1-1-20

原棱锥的侧面被平面截去后剩余的部分叫做棱台的侧面.

原棱锥的侧棱被平面截后剩余的部分叫做棱台的侧棱. 如图 1-1-20 中侧棱 AA'、BB'、CC'、DD'.

棱台的侧面与底面的公共顶点叫做棱台的顶点. 如图 1-1-20 中 A、B、C、D、A'、B'、C'、D'.

(3)棱台的分类

由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台……

(4)棱台的记法

①用各顶点表示:如四棱台 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$.

②用对角面表示:如四棱台 AC'.

注意:

过棱台不相邻的两条侧棱的截面是梯形.

……………解题思路剖析……………

▶基础题型

1. 简单几何体的概念

例 1 判断图 1-1-21 中所示的物体是不是棱台? 为什么?

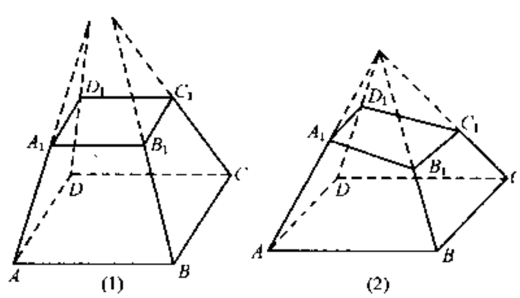


图 1-1-21

解析:图 1-1-21 中都不是棱台. (1)中 AA_1、DD_1 交于

一点，而 BB_1、CC_1 交于另一点，故此图不是由四棱锥截得的，故不是棱台；(2)中上下两个面不平行，故不是棱台.

2. 简单几何体的几何特征

例 2 下列四个命题中，真命题是(　　)

A. 棱柱的面中，至少有两个面互相平行.

B. 棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面.

C. 在平行六面体中，任意两个相对的面均互相平行，但平行六面体的任意两个相对的面不一定可当作它的底面.

D. 棱柱的侧面是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形.

解析：根据简单几何体的几何特征进行判断. A 中，至少棱柱的两个底面互相平行，故 A 正确；B 中正六棱柱的两个相对的侧面互相平行，但不是棱柱的底面；C 中平行六面体任意两个相对的面一定可当作它的底面；D 中棱柱的侧面是平行四边形，但它的底面可能是平行四边形.

◉方法总结

本例考查各种棱柱的有关几何性质，注意要考虑到各种情况. 解决简单几何体的问题，需要对简单几何体有关的几何特征熟练掌握. 如侧棱与底面的关系，底面、侧面的形状，截面面积、形状，旋转体的母线情况等.

3. 简单几何体的有关计算问题

例 3 已知正四面体的棱长为 a，连结两个面的重心 E、F，则线段 EF 的长为________.

解析：可根据正四面体的结构特征结合相关量进行计算. 因为正四面体的各个棱长都相等，如图 1-1-22，取 BC、DC 的中点分别为 M、N，连结 AM、AN、MN，

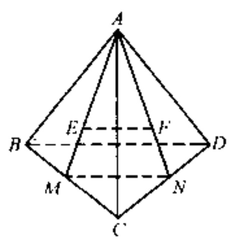


图 1-1-22

$\because E$、F 分别是面 ABC、ACD 的重心，

$\therefore \frac{AE}{AM}=\frac{AF}{AN}=\frac{2}{3}$，

$\therefore EF=\frac{2}{3}MN=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BD$

$=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}a.$

◉技巧点拨

本例根据正四面体的几何特征，将几何体中的有关量转化到一个平面中，然后利用平面几何的有关知识求解. 简单几何体的有关计算问题，就是根据简单几何体的几何特征，将有关量转化到一个平面中，利用平面几何的有关知识求解.

▶创新题型

1. 开放探究题

例 4 如图 1-1-23，在透明塑料做成的长方体容器中灌进一些水，固定容器的一边将其倾倒，随着容器的倾斜度不同，水的各个表面的图形的形状和大小也不同. 试尽可能多地找出这些图形的形状和大小之间所存在的各种规律.

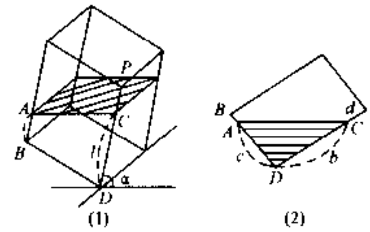


图 1-1-23

解析：下面是可能找到的有关水的各个表面的图形的形状和大小之间所存在的规律：

(1)水面是矩形.

(2)四个侧面中，一组对面是直角梯形，另一组对面是矩形.

(3)水面面积的大小是变化的，如图 1-1-23 所示，倾斜度越大(即 α 越小)，水面的面积越大.

(4)形状为直角梯形(如 $ABDC$)的两个侧面的面积是不变的；这两个直角梯形全等.

(5)侧面积不变.

(6)在侧面中，两组对面的面积之和相等.

(7)形状为矩形的两个侧面的面积之和为定值.

◉方法总结

本题探究水的各个表面的图形的形状和大小之间所存在的规律，其答案不惟一，需根据题意探究多种可能的情况.

2. 课标创新题

例 5 能用 12 根火柴组成 5 个正方形吗？能组成 6 个正方形吗？

解析：若将 12 根火柴组成 5 个正方形，放在同一平面内可以做到，但组成 6 个正方形放在同一平面内是不可能的，故可以结合一些几何体，找原型.

能用 12 根火柴组成 5 个正方形的情况如图1-1-24(1)，其中是四个小正方形和外面一个大正方形；联想正方体有 12 条棱，6 个面都是正方形，故用 12 根火柴组成 6 个正方形的情况如图 1-1-24(2).

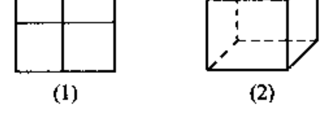


图 1-1-24

◉方法总结

本题创造性地考查了正方体的几何特征：12 条棱都相等，6 个面都是全等的正方形.

▶高考题

例 6 （2000·全国）一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，这个长方体对角线的长是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. $\sqrt{6}$

解析：不妨设长方体共一顶点的三边长分别为 $a=1$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}$，则对角线的边长 $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{6}$.

【拓展训练】

1. 图 1-1-25 中的(1)和(2)是不是棱柱和棱锥？为什么？

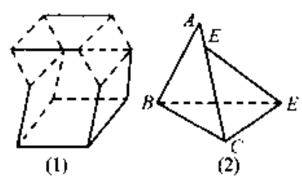


图 1-1-25

2. 下列几个命题，其中正确的有（　　）

(1)用一个平面去截棱锥，棱锥底面和截面之间的部分是棱台，

(2)两个底面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台.

(3)有两个面互相平行，其余四个面都是等腰梯形的六面体是棱台.

(4) 有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱.

(5) 各侧面都是正方形的棱柱一定是正棱柱.

(6) 对角面都是全等的矩形的直四棱柱一定是长方体

A. 0 个　　B. 1 个

C. 3 个　　D. 5 个

3. 下列说法错误的是（　　）

A. 若棱柱的底面边长相等，则它的各个侧面的面积相等.

B. 九棱柱有九条侧棱，九个侧面，侧面为长方形.

C. 长方体、正方体都是棱柱.

D. 三棱柱的侧面为三角形.

4. 已知正三棱锥的底面边长为 a，求过此正三棱锥的各侧棱的中点的截面（中截面）面积.

5. 斜四棱柱侧面最多可有几个面是矩形（　　）

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

6. 你能用 6 根火柴组成 4 个一样大的三角形吗？

7. (2005·全国Ⅰ)在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E，交 CC' 于 F，则

①四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形；

②四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形；

③四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形；

以上结论正确的为________.（写出所有正确结论的编号）

……解题方法放送……

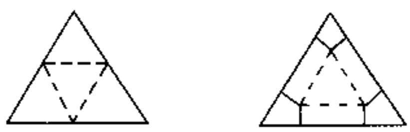
例 (2002·全国)给出两块相同的正三角形纸片(如图 1-1-26(1),(2)),要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型,另一块剪拼成一个正三棱柱模型,使它们的表面积都与原三角形的面积相等,请设计一种剪拼方法,分别用虚线标示在图 1-1-26(1)、(2)上,并作简要说明.

(1) (2)

图 1-1-26

解析:如图 1-1-27(1),沿正三角形三边中点连线折起,可拼得一个正三棱锥.

如图 1-1-27(2),正三角形三个角上剪出三个相同的四边形,其较长的一组邻边边长为三角形边长的$\frac{1}{4}$,有一组对角为直角,余下部分按虚线折起,可成为一个缺上底的正三棱柱,而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个正三棱柱的上底.



(1) (2)

图 1-1-27

……能级精题演练……

一、实践应用

1. 用"⊃"连结下列各集合:{长方体},{四棱柱},{直平行六面体},{平行六面体},{正四棱柱},{正方体}.

2. 若正棱锥的底面边长与侧棱长相等,则该棱锥一定不是( )

A. 三棱锥 B. 四棱锥

C. 五棱锥 D. 六棱锥

3. 已知一个长方体的长、宽、高分别为 2、3、4,求此长方体的对角线长.

二、拓展提高

4. 用一个平面去截一个几何体,如果截面是一个三角形,那么这个几何体可能是________.

三、探究创新

5. 如果棱台的两底面积分别是 S、S',过各侧棱中点的截面(中截面)的面积是 S_0,那么( )

A. $2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$

B. $S_0=\sqrt{S'S}$

C. $2S_0=S+S'$

D. $S_0^2=2S'S$

1.1.3 圆柱、圆锥、圆台和球

……教材重点剖析……

❶圆柱

(1)概念:以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转形成的曲面所围成的几何体叫做圆柱.

旋转轴叫做圆柱的轴,如图 1-1-28 中的 OO';

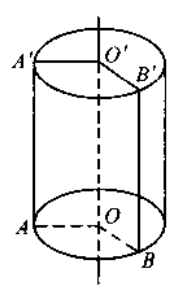


图 1-1-28

垂直于轴的边旋转而成的圆面叫圆柱的底面.如图 1-1-28中的$\odot O$和$\odot O'$;

平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面;

无论旋转到什么位置,不垂直于轴的边都叫做圆柱的母线,如图 1-1-28 中的 AA'、BB'.

(2)圆柱的记法

用表示圆柱的轴的字母表示，如圆柱 OO'.

注意：

(1)圆柱和棱柱统称为柱体.

(2)过圆柱的轴的截面叫做圆柱的轴截面，它是一个矩形.

2 圆锥

(1)概念：以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的曲面所围成的几何体叫做圆锥.

旋转轴叫做圆锥的轴. 如图 1-1-29 中的 SO.

垂直于轴的边旋转所成的圆面叫做圆锥的底面. 如图 1-1-29 中的 $\odot O$.

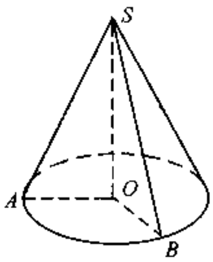


图 1-1-29

三角形的斜边绕轴旋转所成的曲面叫做圆锥的侧面.

无论旋转到什么位置，斜边所在的边都叫做圆锥的母线. 如图 1-1-29 中的 SA, SB 都是母线.

(2)圆锥的记法

用表示圆锥的轴的字母表示. 如图 1-1-29 中的圆锥可记为圆锥 SO.

注意：

(1)圆锥和棱锥统称为锥体.

(2)过圆锥的轴的截面叫做圆锥的轴截面，它是一个等腰三角形.

2 圆台

(1)概念：用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面和截面之间的部分，这样的几何体叫做圆台.

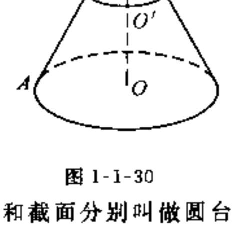


图 1-1-30

原圆锥的底面和截面分别叫做圆台的下底面和上底面. 图 1-1-30 中的面 $\odot O$, $\odot O'$ 等.

原圆锥的侧面被平面截去后剩余的曲面叫做圆台的侧面.

原圆锥的母线被平面截后剩余的部分叫做圆台的母线. 如图 1-1-30 中 AA'.

圆台可以看做直角梯形绕直角边旋转而成的，因此旋转的轴叫做圆台的轴. 如图 1-1-30 中的 OO'.

(2)圆台的记法

用表示轴的字母表示，如圆台 OO'.

4 球

(1)概念：以半圆的直径所在的直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体叫做球体，简称球.

半圆的圆心叫做球的球心，如图 1-1-31 中的 O；

半圆的半径叫做球的半径，如图 1-1-31 中的 OA、OE 等；

半圆的直径叫做球的直径，如图 1-1-31 中 BC, EF 等.

过球的球心的截面叫做球的大圆，不过球的球心的截面叫做球的小圆.

(2)球的记法

用表示球心的字母表示. 如球 O.

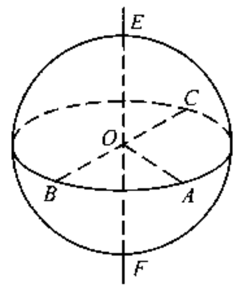


图 1-1-31

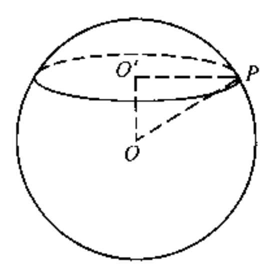


图 1-1-32

(3)球的截面性质

①如图 1-1-32，过球面上的一点 P 作球的一个截面为一圆面 O'，连结 $O'P$，则 $O'P$ 即为球的截面圆的半径，设其为 r；连结 OP，则 OP 即为球的半径，设其为 R；连结 OO'，则 OO' 垂直于截面，OO' 即为球心到截面的距离，设其为 d. 则 $R^2=r^2+d^2$，得 $d=\sqrt{R^2-r^2}$.

利用这一公式可以求球心到某一截面的距离.

②球的大圆、小圆

球面被经过球心的平面截得的圆叫做球的大圆，被不经过球心的平面截得的圆叫做球的小圆；

③球面距离

在球面上，两点间的最短距离就是经过两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，这个劣弧长就叫做两点间的球面距离.

注意：

球、圆柱、圆锥、圆台都是由平面图形绕其对称轴旋转一周形成的曲面围成的几何体，所以我们可以将其称为旋转体.

5 组合体

我们观察周围的物体，除了柱、锥、台、球等基本几何体外，还有大量的几何体是由柱、锥、台、球等组合而成的，这些几何体称为组合体.

组合体有多种组合形式，有多面体与多面体的组合（如图 1-1-33(1)）、多面体与旋转体的组合（如图 1-1-33(2)(5)）、旋转体与旋转体的组合（如图 1-1-33(3)）等.

简单组合体的构成有两种基本形式：

一种是由简单几何体拼接而成的，如图 1-1-33(1)是由上面一个四棱锥，下面一个正方体拼接而成的，图 1-1-33(3)是由一个球与一个圆柱拼接而成的；

一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成，如图 1-1-33(2)是由一个圆锥中间挖去一个棱柱得到的，图 1-1-33(4)是一个正方体截去一个小三棱锥得到的，图 1-1-33(5)是一个正方体中间挖去一个圆柱得到的.

根据简单组合体的构成形式，可将简单组合体拆分成几个简单几何体.

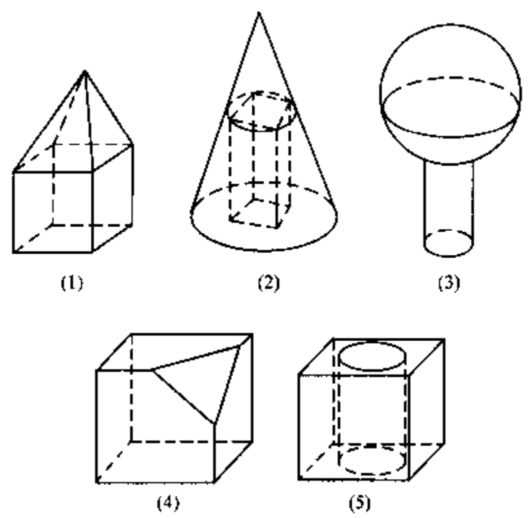


图 1-1-33

……………解题思路剖析……………

基础题型

1. 简单几何体的截面问题

例 1 下列命题中错误的是(　　)

A. 圆柱的轴截面是过母线的截面中面积最大的一个；

B. 圆锥的轴截面是所有过顶点的截面中面积最大的一个；

C. 圆台的所有平行于底面的截面都是圆；

D. 圆锥所有的轴截面是全等的等腰三角形.

解析：根据圆柱、圆锥、圆台的几何特征判断. 当圆锥过顶点的轴截面顶角大于 $90°$ 时，面积不是最大. 应选 B.

◉技巧点拨

解决此类问题要注意对各类几何体的轴截面、平行于底面的截面等情况非常熟悉. 如圆柱中平行于轴的截面是一些矩形，并且离轴越远此矩形的面积越小. 请思考圆锥、圆台的截面情况. 本题特别要注意圆锥的过顶点的轴截面其面积不一定是最大的.

2. 简单几何体的有关计算问题

例 2 把一个圆锥截成圆台，已知圆台的上、下底面半径的比是 $1:4$，母线长是 10 cm，求圆锥的母线长.

解析：设圆锥的母线长为 y cm，圆台上、下底面半径分别是 x cm、$4x$ cm. 作圆锥的轴截面如图 1-1-34.

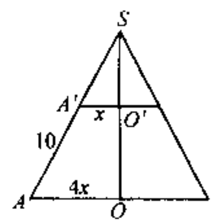


图 1-1-34

在 Rt$\triangle SOA$ 中，$O'A' \parallel OA$，

$\therefore SA' : SA = O'A' : OA$.

即 $(y-10) : y = x : 4x$，

解得 $y = 13\frac{1}{3}$.

所以圆锥的母线长为 $13\frac{1}{3}$ cm.

◉技巧点拨

处理旋转体的有关问题一般要作出其轴截面，在轴截面中去寻找各元素的关系.

3. 球的截面性质

例 3 球面上有三点 A、B、C，且 $AB=18$，$BC=24$，$AC=30$，又球心到平面 ABC 的距离为半径的一半，那么这球的半径为(　　)

A. $10\sqrt{3}$　　　B. 10

C. 20　　　D. 30

解析：在截面三角形 ABC 中

$\because AB=18, BC=24, AC=30$，

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$

即 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 AC 为过 A、B、C 三点的截面所在圆面的直径.

设球心为 O，截面圆心为 O_1，则 O_1 在 AC 的中点处，

连结 OO_1，则 $OO_1 \perp$ 面 ABC，如图 1-1-35 所示，

设球半径为 R，则 $OO_1=\frac{1}{2}R$，在 Rt$\triangle OO_1C$ 中，

$CO_1=\frac{1}{2}AC=15$，

$\therefore \frac{1}{4}R^2+15^2=R^2$，

$\therefore R^2=\frac{4}{3}\times 15^2$，则 $R=10\sqrt{3}$

所以应选 A.

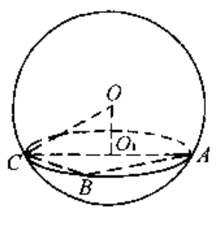


图 1-1-35

◉**技巧点拨**

(1)本题利用球的截面性质，将球半径 R、截面圆的半径 r、球心到截面的距离 d 联系在一起，然后利用公式 $R^2=r^2+d^2$ 使问题获解. (2)球的有关题目往往与球的截面有关，球的截面往往又与棱锥有关，所以掌握棱锥的性质是解决此类问题的关键. 求球面距离就是找球半径、截面圆的半径、球心到截面的垂线构成的直角三角形，根据公式 $R^2=r^2+d^2$ 用解方程的方法求之.

4. 简单组合体的组成

例 4 如图 1 1 36，下列组合体是由哪几种简单几何体组成的？

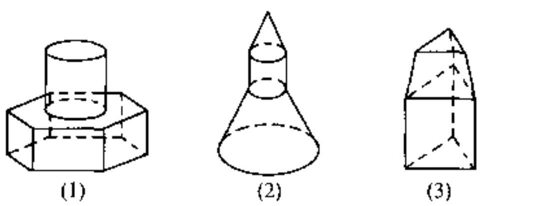


图 1-1-36

解析：将组合体分解成几个简单几何体. 图(1)是由一个圆柱和一个六棱柱组成的；图(2)是由一个圆锥、一个圆柱和一个圆台组成的；图(3)是由一个三棱台和一个三棱柱组成的.

◉**方法总结**

本例是利用简单几何体的定义，根据简单几何体的结构特征去将组合体分解. 熟练掌握几种简单几何体的特征是做好此类问题的关键.

5. 平面图形旋转成立体图形

例 5 如图 1-1-37，将阴影部分图形绕图示直线旋转一周，请说出所得几何体的结构特征.

解析：此图形是由一个等腰三角形和其内切圆组合而成的. 三角形旋转一周后会形成一个圆锥，圆旋转一周后形成一个球. 所以将阴影部分图形绕图示直线旋转一周，形成的几何体是一个圆锥除去中间一个内切球.

图 1-1-37

◉**方法总结**

本题将一个平面图形旋转形成一个立体图形，可将这个平面图形分解，看其分别旋转形成的几何体的特征.

平面图形旋转一定形成一个旋转体，此旋转体的组成可以看原平面图形的组成. 掌握几种常见的简单旋转体的生成过程，如直角三角形绕其直角边旋转会生成一个圆锥；矩形绕其一边旋转会生成一个圆柱；直角梯形绕其直角腰旋转会生成一个圆台；半圆绕直径旋转会生成球等.

▶综合题型

例 6 如图 1-1-38 中左图代表未折叠的正方体的展开图，将其折叠起来，变成正方体后，图形是(　　)

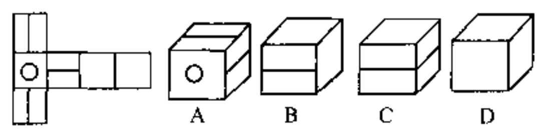


图 1-1-38

解析：由图可知，折叠后三条线段在相邻的三个侧面内，并且互相平行，排除 A、C，同时只有两个侧面内无线段或圆，排除 D，故选 B.

◉**方法总结**

本题通过折叠前后展开图和立体图形关系的判断，创造性地考查了学生的空间想象能力和逻辑思维能力. 解决此类问题要多动手实践，多观察模型.

▶创新题型

例 7 在面积为 $2500\pi\text{cm}^2$ 的球内有两个平行截面，其面积分别为 $49\pi\text{cm}^2$ 和 $400\pi\text{cm}^2$，求这两个截面之间的距离.

解析：①当球心在两截面同侧时(如图 1 1 39(1)所示)，过 M 作垂直于两个平行截面的直径 MN 与两个截面分别相交于 C_1、C，AB、A_1B_1 是两个平行截面的直径，则 C_1、C 是两截面的圆心，则由已知得：

$4\pi\cdot OM^2=2500\pi$，$\pi\cdot A_1C_1^2=49\pi$，$\pi\cdot AC^2=400\pi$，

$\therefore$ 球的半径 $OM=25$ cm，截面半径 $A_1C_1=7$ cm，AC 20 cm.

$\because OC_1=\sqrt{OA_1^2-A_1C_1^2}=24$ cm，

$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}$　15 cm