

研究生教学用书

拟微分算子

(第二版)

Pseudodifferential Operators

(Second Edition)

陈恕行 著

高等教育出版社

内容提要

拟微分算子理论自 20 世纪中叶形成以来,经过几十年的发展已成为现代分析理论的重要组成部分,并特别在偏微分方程理论及相关问题的研究中成为必不可少的工具。本书详细介绍了拟微分算子的基本理论及其在偏微分方程中的应用,为基础数学与应用数学专业的研究生、教师以及有关的研究人员提供了有益的文献。本书既是这一领域的一本入门书,又介绍了该理论在偏微分方程中几个最重要方面的应用,可为读者进一步学习与研究做准备。本书取材适当、文字流畅、内容的安排与叙述符合中国学者的特点、论证严谨、适于读者们阅读与自学。

图书在版编目(CIP)数据

拟微分算子/陈恕行著. —2 版. —北京:高等教育出版社, 2006. 4
ISBN 7-04-018675-6

I. 拟... II. 陈... III. 拟微分算子-研究生-教材 IV. O175.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021889 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 蒋青 封面设计 李卫青 责任绘图 尹文军
版式设计 王艳红 责任校对 杨雪莲 责任印制 宋克学

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京人卫印刷厂

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×960 1/16
印 张 14
字 数 260 000

版 次 1995 年 5 月第 1 版
2006 年 4 月第 2 版
印 次 2006 年 4 月第 1 次印刷
定 价 29.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18675-00

序

拟微分算子是 20 世纪 60 年代发展起来的数学分支。随着数学理论的发展, 它已经与广义函数、Sobolev 空间理论一样, 成为一种常用的数学工具, 在偏微分方程理论的各个方面以及在调和函数、多复变函数、微分几何等领域的许多问题的研究中被广泛地应用着。对于一个数学工作者, 特别是对于一个从事偏微分方程理论研究的学者, 具备并熟练掌握这方面的基本知识与技能是十分需要的。在本书中我们将较详细地介绍拟微分算子的基本理论与应用。阅读或使用本书的读者仅需具备基本的偏微分方程知识以及关于广义函数、Sobolev 空间、微分流形的一些基本概念。本书可以作为数学系研究生的教材, 也可作为有关数学教师与研究工作者的一本参考书。

本书分成基础篇与应用篇两部分。在基础篇的五章中介绍拟微分算子的基本理论。首先介绍拟微分算子的基本性质与其象征的运算规则, 建立拟微分算子代数。此外, 还结合拟微分算子的拟局部性质介绍了波前集的概念与微局部分析的基本思想, 并对拟微分算子的有界性作了一定的介绍。我们相信这对从事偏微分方程或调和函数研究的人们是十分有用的。在应用篇的四章中介绍拟微分算子在偏微分方程理论研究中的应用, 包括椭圆型方程边值问题和双曲型方程初值问题与初边值问题的理论, 涉及解的存在性、唯一性、正则性与奇性分析等基本问题。在本书中未能介绍局部可解性问题的系统研究成果, 因为这一专题太大, 似在本书篇幅中无法容纳, 有兴趣的读者可参考有关的文献与专著。

以上内容中第一章与第五章是第 2 版新加的, 其中简要地介绍拟微分算子理论的历史与发展, 让读者能从更宽广的背景下了解本书中详细介绍的基本内容。此外, 我们在第 2 版中对部分内容的安排与叙述作了变动, 增加了一些解释与插图, 以便于读者理解。

如将本书作为一门研究生课程的教材, 则可以根据学时安排与研究生的具体情况讲授全书或其中一部分内容。特别是应用篇的部分, 四章的内容相互独立, 略去一段不会对其他部分的学习产生影响。如果教学时数较紧, 则也可以选取本书前三章, 第四章的 §1 以及第五章的 §1, 构成一个较少内容的组合, 在二十余学时中讲授完毕。

作者在本书写作过程中得到了许多老师与同事们的关心和帮助, 在此表示

衷心的感谢。由于作者水平所限，书中难免有不妥之处，恳切地希望读者们给予批评指正。

陈恕行

二〇〇五年于复旦大学

目 录

目 录

第一章 拟微分算子的由来	3
§ 1. 从几个例子说起	3
§ 2. 历史的回顾	5
第二章 拟微分算子的概念与基本运算	8
§ 1. 拟微分算子的概念	8
§ 2. 象征与渐近展开	13
§ 3. 振荡积分	18
§ 4. 拟微分算子代数	24
§ 5. 局部区域上的拟微分算子	33
§ 6. 微分流形上的拟微分算子	38
第三章 拟微分算子的微局部性质	45
§ 1. 分布的波前集	45
§ 2. 拟微分算子的微拟局部性	56
§ 3. 拟逆算子	60
第四章 拟微分算子的有界性	66
§ 1. L^2 有界性	66
§ 2. Gårding 不等式	68
§ 3. 函数的环形分解	74
§ 4. L^p 有界性和 C^∞ 有界性	80
第五章 拟微分算子的各种拓广	88
§ 1. 具有有限正则性象征的拟微分算子	88
§ 2. 具特定衰减性象征的拟微分算子	91
§ 3. Weyl 运算	95
§ 4. Fourier 积分算子	97

应 用 篇

第六章 拟微分算子在 Cauchy 问题中的应用	103
§ 1. 双曲型方程的 Cauchy 问题	103
§ 2. Cauchy 问题的唯一性	113
第七章 椭圆算子与亚椭圆算子	125
§ 1. 紧流形上的椭圆拟微分算子	125
§ 2. 一阶椭圆算子的边值问题	131
§ 3. 一般高阶椭圆型方程的边值问题	135
§ 4. 亚椭圆算子	145
第八章 双曲型方程的初边值问题	152
§ 1. 问题的提法, 准备事项	152
§ 2. 一致 Lopatinski 条件	154
§ 3. 对称化子及其构造	163
§ 4. 能量不等式	170
§ 5. 无初始条件的边值问题之求解	174
§ 6. 初边值问题之求解	181
第九章 奇性传播与反射	186
§ 1. 经典的奇性传播定理	186
§ 2. 主型方程的奇性传播定理	190
§ 3. 奇性反射(双曲点情形)	195
§ 4. 奇性反射(一般情形)	200
索引	208
参考文献	212

基 础 篇

第一章 拟微分算子的由来

§ 1. 从几个例子说起

偏微分方程理论的研究有悠久的历史. 到了 20 世纪 50 年代, 由于广义函数理论的建立, 人们逐步习惯于用这样一个观点来看待微分方程, 即认为它是由一个微分算子所导出的映射. 于是, 一个微分方程的求解就可以视为相应的微分算子在一定意义上的求逆. 按照算子复合的观点, 在微分算子类中可以进行加法与乘法的运算, 而除法运算(即求逆运算)一般不能进行. 寻找一个合理的除法运算的定义, 有必要的还可以适当扩大微分算子类, 就成为数学家所追求的一个目标.

我们知道, Fourier 变换能将自变量空间中的微分运算转化为对偶空间中的乘以多项式的运算, 反之亦然. 那么, 能否将自变量空间中微分算子求逆的运算转化为对偶空间中的除以某个函数的运算呢? 这个问题并不简单, 因为当被除的函数出现零点时, 这种除法在一般广义函数类中是不允许的. 尽管如此, 在对偶空间中对 Fourier 变换作代数运算有可能对应于在原自变量空间中更广义的运算是一个值得注意的事实.

让我们考察一些更具体的例子. 设我们已经知道了 Laplace 算子的 Dirichlet 问题的可解性(可以通过泛函方法得到, 如见[Ch3]), 今据此讨论 Laplace 算子的第三边值问题的求解. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中给定的有界区域, 其边界 $\partial\Omega$ 是光滑的. 若 u 满足

$$\Delta u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \quad (1.1.2)$$

如何求解 u ?

已知 Ω 中的 Dirichlet 问题是可解的. 若对 $u|_{\partial\Omega} = h \in L^2(\partial\Omega)$, 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = h \end{cases} \quad (1.1.3)$$

的解记为 u_h , 则 u_h 在边界上的法向导数为 $\frac{\partial}{\partial n} u_h$. 于是, 第三边值问题的解

在边界 $\partial\Omega$ 上满足

$$\frac{\partial u_h}{\partial n} + \sigma u_h = g. \quad (1.1.4)$$

将 $\frac{\partial}{\partial n} u_h$ 写成 $G(h)$, 则有

$$G(h) + \sigma h = g. \quad (1.1.5)$$

若方程(1.1.5)可解出 h , 则原问题(1.1.1), (1.1.2)的解就可以用 u_h 表示.

(1.1.5)是怎样的一个方程呢? 它决定于算子 G 的性质. G 是一个线性算子, 我们可以将 h 进行分解, 使得 h 的支集只集中在 $\partial\Omega$ 的某个邻域中. 再作展平, 就化成在区域 Ω 为 $\mathbb{R}_+^n$ 的情形.

对于问题

$$\Delta u = 0, \quad \text{在 } \mathbb{R}_+^n \text{ 中}, \quad (1.1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g, \quad \text{在 } x_n = 0 \text{ 上} \quad (1.1.7)$$

的求解, 可以作关于变量 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (合记为 x') 的部分 Fourier 变换. 记 u 关于 x' 的 Fourier 变换为 $\hat{u}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_n^2} - |\xi'|^2 \hat{u} &= 0, \\ \hat{u}|_{x_n=0} &= \hat{h}. \end{aligned}$$

取其有界解, 得

$$\hat{u} = e^{-|\xi'|x_n} \hat{h}, \quad (1.1.8)$$

从而

$$u(x) = (2\pi)^{-(n-1)} \int e^{i\langle x', \xi' \rangle - |\xi'|x_n} \hat{h}(\xi') d\xi', \quad (1.1.9)$$

取关于 x_n 的导数, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = (2\pi)^{-(n-1)} \int -|\xi'| e^{i\langle x', \xi' \rangle - |\xi'|x_n} \hat{h}(\xi') d\xi', \quad (1.1.10)$$

注意到 $G(h)$ 即 u 在边界 $x_n = 0$ 上的外法向导数 $-\frac{\partial u}{\partial x_n}$, 故

$$G(h) = (2\pi)^{-(n-1)} \int |\xi'| e^{i\langle x', \xi' \rangle} \hat{h}(\xi') d\xi'. \quad (1.1.11)$$

由此知, G 是以 $|\xi'|$ 为乘子的 **Fourier 乘子算子**. 它是本书中将详细加以研究的拟微分算子的特例. 显然, 当我们清楚地了解了算子 $G(h)$ 的性质后, 就可以对于方程(1.1.5)或边值问题(1.1.1), (1.1.2)的可解性给予明确的回答.

在调和和分析理论中经常用到 Hilbert 变换, 它的定义是

$$Hf(x) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy, \quad (1.1.12)$$

其中 P.V. 表示 Cauchy 主值积分. 当 $f \in C_c^\infty$ 时,

$$Hf = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

利用广义函数卷积的记号, 它可写成

$$Hf = \text{P.V.} \left(\frac{1}{x} \right) * f.$$

而由广义函数的运算知, $\text{P.V.} \left(\frac{1}{x} \right)$ 的 Fourier 变换为 $\pi \text{isgn } \xi$, 故

$$\widehat{Hf} = \pi \text{isgn } \xi \cdot \hat{f}(\xi), \quad (1.1.13)$$

它也是一种 Fourier 乘子算子.

比(1.1.12)形式更为一般的奇异积分算子

$$H_\Omega f = \text{P.V.} \int \frac{\Omega(x-y)f(y)}{x-y} dy, \quad (1.1.14)$$

它就无法用 Fourier 乘子来表示. 在多变量的情况下, 奇异积分算子 H_Ω 的形式为

$$H_\Omega f = \text{P.V.} \int \frac{\Omega(x-y)f(y)}{|x-y|^n} dy, \quad (1.1.15)$$

其中 x, y 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的变量. 特别, 当 $\Omega(x) = \frac{x_j}{|x|}$ 时, (1.1.15) 称为 Riesz 算子. Riesz 算子与一般形式的奇异积分算子在调和和分析中有广泛的应用.

在上面讨论中出现的 Fourier 乘子算子(1.1.12)或奇异积分算子(1.1.14)都是拟微分算子的特例.

§ 2. 历史的回顾

尽管在 20 世纪中叶有许多拓广微分算子的尝试, 然而最终胜出的是 L. Nirenberg, L. Hörmander 等数学家所引入的拟微分算子, 它将在本书中作较详细的介绍. 拟微分算子所以能胜出的原因在于它的形成与发展伴随着偏微分方程发展历史上一些基本问题研究的重大进展, 如多自变量线性偏微分方程 Cauchy 问题解的唯一性, 局部可解性等. 存在性与唯一性都是偏微分方程理论中最为基本的问题. 早在 20 世纪初 E. Holmgren 已证明了具有解析系数 Cauchy 问题在非解析函数类中的唯一性. 但是当方程的系数仅为 C^∞ 函数时, Cauchy 问题的解不一定是唯一的. 到 20 世纪 30 年代末, T. Carleman 对含两个自变量方程的 Cauchy 问题得到了较普遍的结果. 可是对于含多个自变量方程的方程, 仍只有零星的结果. 1958 年 Calderón 利用奇异积分算子为工具证明了主型偏微分方程 Cauchy 问题解的唯一性. 他只要求方程具有 C^∞ 系数与不出现重特征, 并不需要对方程的类型加什么限制. Calderón 证明 Cauchy 问

题唯一性的要点是先利用奇异积分算子 Λ (也就是本书中将介绍的以 $|\xi|$ 为象征的拟微分算子), 将高阶方程化成一阶方程组, 这种化高阶方程为方程组的方法不会增加特征, 因而所得到的方程组也不具有重特征. 然后对一阶方程组进行适当的分解, 又化成一阶方程的相应问题. 这里 Calderón 对于偏微分方程所作的种种变形实际上都是拟微分算子的运算. 最终也是在对拟微分算子细微估计的基础上完成了唯一性的证明.

另一个例子是关于偏微分方程局部可解性的研究. 长期以来人们认为一个偏微分方程总是有许多解的, 需要附加一些定解条件来确定所需要的解. 然而在 1957 年 H. Lewy 给出了一个具有复系数的偏微分方程 $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - 2i(x + iy) \frac{\partial u}{\partial t} = f$. 对于这样的方程, 若仅要求 f 是原点邻域中的 C^∞ 函数, 则对于很多 f , 方程根本就没有解. 这一现象的发现, 促使人们去研究这样一个问题, 究竟什么样的微分算子才使方程对任意右端都是有解的 (即使是局部的). 至 1963 年 L. Nirenberg 与 F. Trèves 首先解决了具复系数的一阶主型微分算子的局部可解问题, 但是对于高阶主型算子的局部可解性直到 1970 年才有较完整的结果, 其原因也是在此以前缺乏合适的分析工具. 1970 年 L. Nirenberg 与 F. Trèves 在证明局部可解性的必要条件与充分条件时, 先在高阶微分算子的特征点的邻域中将所考察的算子分解成一个椭圆算子与一个一阶算子的乘积, 后者在上述邻域中与原高阶算子具有相同的特征点. 然后集中力量考察一阶算子的局部可解性而导出所欲证明的结论. 上面提到的算子都是拟微分算子, 这些做法都只有在拟微分算子的系统理论建立以后才有可能.

上述两个问题的解决都是偏微分方程发展历史上的重大进展, 拟微分算子理论在局部可解性与 Cauchy 问题唯一性的研究中所表现出来的巨大威力毋庸置疑地确立了拟微分算子以及在此基础上进一步推广的 Fourier 积分算子的重要地位, 并开拓了一个崭新的研究方向 (微局部分析). 数学家们发现, 偏微分方程理论中的一些经典问题, 例如高维严格双曲型偏微分方程 Cauchy 问题与椭圆型方程一般边值问题, 虽然过去已有较完整的结果, 但利用拟微分算子为工具可以得到更简洁的证明. 而另外一些问题, 如高维双曲型方程的初边值问题, 过去一直没有好的处理办法, 现在利用拟微分算子进行精细的分析, 即可导出理想的结果. 此外, 有些问题如偏微分方程解的正则性 (包括亚椭圆性, 奇性传播等) 还可以利用拟微分算子为工具给出更精细的结果. 20 世纪 60 年代是偏微分方程理论硕果累累, 成就卓著的年代, 然而其中许多最重要的成就均与拟微分算子理论紧密相关. 这里最突出的例子就是 Atiyah-Singer 指标定理. 这个定理指出, 一个微分流形的拓扑指标与解析指标相等, 它被誉为 20 世纪下半叶的一个重大数学成就. 而这里的解析指标正是借助于拟微分算子定

义的.

拟微分算子理论在非线性问题的研究中也发挥着重要的作用. 例如, A. Majda 于 1983 年应用具有有限正则性象征的拟微分算子理论证明了可压缩流 Euler 方程组高维间断初值问题具激波解的存在性, 从而掀开了对高维激波数学理论研究的新的一页. (见 [Ma1], [Ma2]) 又如 S. Alinhac, J. Y. Chemin 先后将微局部分析应用于可压缩流与不可压缩流中奇性发展的研究, 取得了令人瞩目的成绩. (见 [Al1, Al2, Che1, Che2])

总之, 当今拟微分算子的理论、思想与方法已与其他数学分支相融合, 它在整个数学理论发展中的地位与重要性也已得到公认. 当然, 本书作为该领域的一本入门书, 只能介绍拟微分算子的基本理论与应用. 有兴趣的读者可以从本书后所列的参考文献中获得深入与广泛得多的材料进行研读.

第二章 拟微分算子的 概念与基本运算

§ 1. 拟微分算子的概念

设在空间 $\mathbb{R}^n$ 中给定一个具 C^∞ 系数的线性偏微分算子 $P \equiv P(x, D)$, 它可表示为

$$P(x, D) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (2.1.1)$$

其中 x 表示变量 $(x_1, \dots, x_n)$, α 为重指标 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \left(\frac{1}{i} \partial_{x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i} \partial_{x_n}\right)^{\alpha_n}$, 其中 i 为虚数单位. 算子 P 可作用于任意的 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数 $u(x)$. 由于 $u(x)$ 可以利用其 Fourier 变换表示为

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi,$$

其中 $\langle x, \xi \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$. 由 Fourier 变换的性质知

$$\begin{aligned} P(x, D)u &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

于是, 当我们给定一个 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 的多项式 $a(x, \xi)$ 后, 可以按

$$Au = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad (2.1.3)$$

定义一个线性偏微分算子. 这里与今后, 为书写方便起见, 记 $(2\pi)^{-n} d\xi$ 为 $d\xi$. 由于 (2.1.3) 式对更一般的函数 $a(x, \xi)$ 仍有意义, 故利用这一形式可以考察更一般的线性算子. 例如按积分 $\int e^{i\langle x, \xi \rangle} (1 + |\xi|^2)^{-1} \hat{u}(\xi) d\xi$, $\int e^{i\langle x, \xi \rangle} |\xi| \hat{u}(\xi) d\xi$ 所定义的算子, 对于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数或更一般的函数的作用有意义. 由 (2.1.3) 式所确定的线性算子就称为拟微分算子.

通过将微分算子表示形式 (2.1.2) 中的多项式替换为更一般的函数, 我们

得到了微分算子的一种推广——拟微分算子. 这并不仅仅是一种形式上的推广, 而且在应用上会带来很大的方便. 例如推广后的算子可形成一个代数, 并且在其中可以包括特定意义下的逆算子等. 举例来说, 若我们考察在空间 $\mathbb{R}^n$ 上的椭圆型方程

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u = f, \quad (2.1.4)$$

其中 $f \in C_c^\infty$. 为求这个方程的解, 将方程两边作 Fourier 变换, 得

$$(|\xi|^2 + 1)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

于是 $u(x)$ 可以表示为

$$u(x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{1}{1 + |\xi|^2} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.1.5)$$

(2.1.5) 式右边就是前面出现过的算子, 它可视为 $I - \Delta$ 的逆算子.

算子 (2.1.5) 给出了方程 (2.1.4) 的解的表达式, 容易理解, 如果在所考察的算子类中包含了偏微分算子的逆算子 (或即使是一部分偏微分算子的逆算子), 将给偏微分方程的求解带来很大的方便. 上例中讨论的是常系数椭圆型方程的情形. 对于变系数椭圆型算子, 也可以利用今后建立的拟微分算子运算法则, 建立其在较弱意义下的“逆”算子.

由 (2.1.3) 式可知, 函数 $a(x, \xi)$ 在拟微分算子的定义中起着重要的作用, 因此, 在给出拟微分算子的确切定义以前, 先对它所属的函数类作一个规定.

定义 2.1.1 对于给定的满足条件 $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ 的实数 ρ, δ 以及实数 m , 若函数 $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, 且对任意重指标 α, β , 成立

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (2.1.6)$$

其中 $C_{\alpha, \beta}$ 是常数, 则称 $a \in S_{\rho, \delta}^m$.

以下我们通常讨论 $\rho = 1, \delta = 0$ 的情形, 特别在本章中更是如此, 故我们简记 $S_{1,0}^m$ 为 S^m , 又记 $S^\infty = \bigcup_m S^m, S^{-\infty} = \bigcap_m S^m$.

定义 2.1.2 若函数 $a(x, \xi) \in S^m$, 则可以定义 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的线性连续映射 A 为:

$$Au(x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (2.1.7)$$

A 称为拟微分算子 (或更确切地称为 Ψ^m 类拟微分算子), 并记 A 为 $a(x, D)$, 称 $a(x, \xi)$ 为 A 的象征.

我们在此必须说明 A 确实是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的线性连续映射. 事实上, 由于 $|a(x, \xi)| \leq (1 + |\xi|)^m, \hat{u}(\xi)$ 为速降, 所以 (2.1.7) 式中的积分绝对一致收敛, 故 $Au(x)$ 连续, 且

$$|Au| \leq \int (1 + |\xi|)^m |\hat{u}(\xi)| d\xi \sup(|a(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{-m}). \quad (2.1.8)$$

又由于

$$\begin{aligned} D_j(Au)(x) &= \int e^{i\langle x, \xi \rangle} (\xi_j a + D_j a) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= A(D_j u) - iA_{(j)} u, \\ x_j(Au)(x) &= \int (D_\xi e^{i\langle x, \xi \rangle}) a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= A(x_j u) + iA^{(j)} u, \end{aligned}$$

其中 $A_{(j)}$, $A^{(j)}$ 是象征分别为 $\partial_{x_j} a$ 与 $\partial_{\xi_j} a$ 的拟微分算子, 故同样可说明 $D_j(Au)(x)$ 连续, 且 $|D_j(Au)|$, $|x_j(Au)|$ 被 u 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的某些半范数所控制, 依此类推, 可知对任意 α, β , $x^\alpha D^\beta(Au)(x)$ 都是连续的, 而且其最大模被 u 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的有限个半范数所控制, 因此 $Au \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 而且 A 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的线性连续映射.

定理 2.1.1 按(2.1.7)式定义的拟微分算子 $a(x, D)$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的线性连续算子. 它还可以唯一地扩张成为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的线性连续算子, 其中, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛按序列弱收敛的意义理解.

证明 今只需证明后半部分, 对于 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 我们按下式给出 $a(x, D)u$:

$$\langle a(x, D)u, v \rangle_x = \left\langle \hat{u}(\xi), \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} v(x) a(x, \xi) dx \right\rangle_\xi, \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (2.1.9)$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\xi$ 分别表示在 $\mathbb{R}_x^n$ 与 $\mathbb{R}_\xi^n$ 中的对偶积. 由于 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)$, 故 $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi^n)$, 所以为说明(2.1.9)有意义, 必须证明 $p_v(\xi) = \int e^{ix \cdot \xi} v(x) a(x, \xi) dx \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$, 且当 $v_j \rightarrow 0(\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n))$ 时有 $p_{v_j} \rightarrow 0(\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n))$.

事实上, 由于 $v(x)$ 是速降函数, 而 $a(x, \xi)$ 满足(2.1.6), 故对任意重指标 α, β , 我们有

$$\begin{aligned} & \left| \xi^\alpha \int e^{ix \cdot \xi} v(x) a(x, \xi) dx \right| \\ &= \left| \int (D_x^\alpha e^{ix \cdot \xi}) v(x) a(x, \xi) dx \right| = \left| \int e^{ix \cdot \xi} D_x^\alpha (v(x) a(x, \xi)) dx \right| \\ &\leq C_{\alpha, v} (1 + |\xi|)^m, \\ & \left| D_\xi^\beta \int e^{ix \cdot \xi} v(x) a(x, \xi) dx \right| \\ &= \left| \int e^{ix \cdot \xi} v(x) \sum_{\beta' + \beta'' = \beta} x^{\beta'} D_\xi^{\beta''} a(x, \xi) dx \right| \end{aligned}$$

$$\leq C'_{\beta,v}(1+|\xi|)^m.$$

同样地易得 $|\xi^\alpha D_\xi^\beta p_v(\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,v}(1+|\xi|)^m$, 而由于 m 为固定数, α, β 为任意重指标, 这就得到了 $p_v(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$, 又当序列 $v_j \rightarrow 0(\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n))$ 时, C_{α,β,v_j} 关于 j 是一致的. 故得 $p_{v_j} \rightarrow 0(\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n))$.

为说明 $a(x, D)$ 的连续性, 取序列 $u_k \rightarrow 0(\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n))$ 则 $\hat{u}_k \rightarrow 0(\mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi^n))$, 因此对任意 $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$, 由 $p_v(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$ 知,

$$\langle \hat{u}_k(\xi), \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} v(x) a(x, \xi) dx \rangle_\xi \rightarrow 0,$$

从而

$$\langle a(x, D) u_k, v \rangle_x \rightarrow 0,$$

所以 $a(x, D)$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)$ 的线性连续映射.

由 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性可知, 上述扩张是唯一的. 定理证毕.

定义 2.1.2 中的 (2.1.7) 式也可以写成

$$a(x, D)u = \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \int_{\mathbb{R}_y^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) u(y) dy d\xi. \quad (2.1.10)$$

这时被积函数中的因子 $a(x, \xi)$ 不依赖于变量 y , 但如果由 (2.1.9) 式写出 $a(x, D)$ 的转置 (或称为对偶), 有

$$\begin{aligned} {}^t a(x, D)v &= \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \int_{\mathbb{R}_y^n} e^{i\langle y-x, \xi \rangle} a(y, \xi) v(y) dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \int_{\mathbb{R}_x^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(y, -\xi) v(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

(2.1.11) 式右边被积函数中的因子 $a(y, -\xi)$ 依赖于变量 y , 因此它并不能简单地化成 (2.1.7) 的形式. 为适应在拟微分算子类中进行运算的需要, 我们将定义 2.1.2 作些扩充, 首先仿照定义 2.1.1 引入

定义 2.1.3 对于给定实数 m 以及满足条件 $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ 的实数 ρ, δ , 若函数 $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, 且对任意重指标 α, β 成立

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_{x,y}^\beta a(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|-\delta|\beta|}, \quad (2.1.12)$$

则称 $a \in S_{\rho,\delta}^m$ (或 $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$).

在 $\rho=1, \delta=0$ 时, 我们仍简记 $S_{\rho,\delta}^m$ 为 S^m .

定义 2.1.4 若函数 $a(x, y, \xi) \in S^m$, 则按

$$Au = \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \int_{\mathbb{R}_x^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi \quad (2.1.13)$$

所定义的算子为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的线性连续映射, 它也称为拟微分算子, 其中 $a(x, y, \xi)$ 称为算子 A 的振幅.