



高等教育应用型
本科机电类课程规划教材

自动控制原理与应用

GAODENG JIAOYU YINGYONGXING
BENKE JIDIANLEI KECHENG GUIHUA JIAOCAI

主编 肖安崑 刘玲腾

大连理工大学出版社



清华大学出版社
Tsinghua University Press

自动控制原理与应用

（第2版） 面向21世纪课程教材
面向21世纪课程教材 自动控制原理与应用（第2版）

主 编 胡中明 王 明

北京理工大学出版社



新世纪

高等教育应用型本科机电类课程规划教材

自动控制原理与应用

主 编 肖安崑 刘玲腾 副主编 顾丽谨

ZHIDONG KONGZHI YUANLI YU YINGYONG

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

© 肖安崑 刘玲腾 2006

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理与应用 / 肖安崑,刘玲腾主编. — 大连:大连理工大学出版社,2006.8

ISBN 7-5611-3288-3

I. 自… II. ①肖… ②刘… III. 自动控制理论 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 093853 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:<http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:9.25 字数:205 千字

印数:1~2 200

2006 年 8 月第 1 版

2006 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:姜楠

责任校对:郭伟

封面设计:波朗

定价:16.00 元

前 言

本书在讲清自动控制原理的基本前提下,围绕分析问题的思路和方法、改善系统性能的途径以及分析所得主要结论在实际中的应用而展开,以求帮助读者领悟和学会应用控制理论来解决工程的实际问题奠定必要的基础。

教材力求针对性和实用性,理论分析以适度够用为限。

应该指出,控制理论不仅是一门重要的学科,而且是一门卓越的方法论。它对启迪与发展人们的思维与智力有着很大的作用。在学习中,既要重视抽象思维,了解一般规律,又要充分注意结合实际;既要善于从个性中概括出共性,又要善于从共性出发深刻了解个性。学会运用控制理论的方法去抽象与解决实际问题,去开拓提出、分析与解决问题的思路。限于学时等原因,本课程只能为此打下一个初步的基础。只有学会提出问题、思考问题,并掌握正确的分析问题、解决问题的思路和方法,才会有所创新。

本书由南昌大学肖安崑教授(负责1,7,8章)、刘玲腾(负责第3,4,5,6章)、顾丽谨(负责第2章及全书的图表制作)共同讨论编写,肖安崑教授负责全书的统稿和定稿。

南昌大学余桂英副教授提出了许多有益建议并给予许多帮助,在此表示由衷的谢意。

限于编者水平有限,加上时间仓促,本书的谬误与不足之处在所难免。编者期望广大师生和读者不吝指教,提出批评建议,我们由衷欢迎与感谢。

所有的意见和建议请发往:gzjckfb@163.com

联系电话:0411-84707492 0411-84706104



编 者

2006年8月



第 1 章 自动控制系统的一般概念	1
1.1 自动控制的含义	1
1.2 自动控制系统的基本原理	1
1.3 自动控制系统的基本组成	4
1.4 自动控制系统的基本类型	5
1.5 对自动控制系统的基本要求	6
1.6 习题	8
第 2 章 拉普拉斯变换	9
2.1 拉氏变换	9
2.2 拉氏变换的性质.....	13
2.3 拉氏反变换.....	17
2.4 用拉氏变换解线性定常微分方程.....	21
2.5 习题.....	22
第三章 系统的数学模型	23
3.1 系统的微分方程.....	23
3.2 传递函数.....	25
3.3 典型环节的传递函数.....	28
3.4 系统的传递函数方框图及其简化.....	35
3.5 反馈控制系统的传递函数.....	42
3.6 习题.....	43
第 4 章 频率特性	45
4.1 频率特性的基本概念.....	45
4.2 频率特性的图示方法.....	49
4.3 最小相位系统和非最小相位系统.....	60
4.4 系统的闭环频率特性.....	62
4.5 习题.....	64
第 5 章 自动控制系统的稳定性分析	66
5.1 系统稳定性的初步概念.....	66
5.2 劳斯稳定判据.....	68
5.3 奈奎斯特稳定判据.....	71
5.4 系统的相对稳定性.....	76
5.5 典型自动控制系统稳定性分析.....	78
5.6 习题.....	84

第 6 章 自动控制系统的稳态性能分析	86
6.1 系统稳态误差的概念	86
6.2 与输入信号有关的稳态误差	88
6.3 扰动作用下的稳态误差	92
6.4 系统稳态性能分析举例	94
6.5 习题	96
第七章 瞬态响应分析	98
7.1 时间响应的概念	98
7.2 一阶系统的时间响应	99
7.3 二阶系统的时间响应	102
7.4 瞬态响应的性能指标	105
7.5 频域性能指标与时域性能指标间的关系	111
7.6 习题	115
第 8 章 自动控制系统的校正	117
8.1 系统的校正	117
8.2 串联校正	119
8.3 PID 校正	127
8.4 反馈校正	135
8.5 顺馈补偿	138
8.6 习题	140
参考文献	142

第 1 章

自动控制系统的一般概念

随着工业生产和科学技术的不断发展,自动控制技术越来越显示出它的重要性,为人们所瞩目。掌握有关自动控制的知识就显得尤为重要。本章主要介绍自动控制的含义、基本工作原理、系统的组成以及对系统的基本要求。

1.1 自动控制的含义

所谓自动控制,就是在没有人直接参与的情况下,通过控制装置(或称控制器)使被控制对象或过程自动地按照预定的规律运行。

例如程序控制机床能够按预先给定的工艺程序自动地进刀切削,加工出预期几何形状的零件。焊接机器人能自动地跟踪预期轨迹移动,焊接出高质量的产品。火炮根据雷达指挥仪传来的信息,能够自动地改变方位角和俯仰角,随时跟踪目标,瞄准弹着点。所有这些自动控制系统的例子,尽管它们的结构和功能各不相同,但可以发现它们有共同的规律,即它们都是一个(或一些)被控制的物理量随着另一个物理量(即控制量)的变化而变化(或保持恒值)。一般地说,如何使被控制量按照给定的控制量的变化规律而变化,这就是一个控制系统所要解决的最基本的问题。

自动控制技术各个领域中的广泛应用,不仅提高了劳动生产率和产品质量,改善了劳动条件,而且在人类征服自然、发展空间技术和改善人民物质生活等方面都起着越来越重要的作用。可以说,自动控制已成为推动经济发展,促进社会进步所必不可少的一门技术。

1.2 自动控制系统的基本原理

1.2.1 自动控制系统的基本原理

首先我们定义,用以完成一定任务的一些部件(或称元件)的组合为系统。系统是一个有机的整体,具有其目的性。不同的系统所要完成的任务也不同。有的要求某物理量(如温度、压力、转速等)保持恒定;有的则要求按一定规律变化。我们将这些需要控制的物理量定义为系统的被控制量或输出量,将使系统具有预期性能或预期输出的激励信号定义为系统的控制量或输入量,而将使被控制量偏离预期值的各种因素称为扰动量。设

法消除扰动因素影响从而保持被控制量按预期要求变化的过程称为控制过程。

下面让我们研究一下图 1-1 所示的电炉箱恒温自动控制系统是如何实现恒温控制的。

在这个控制系统中,被控制量为炉温 T ,炉温的预期值是由给定电位器设定的电压 U_{ST} 所确定,也就是说 U_{ST} 是该系统的输入量。当扰动(工件的增减、炉壁散热、电网电压波动等)引起炉温变化后,作为检测元件的热电偶,将炉内实际温度转换成相对应的电压信号 U_{FT} (称为反馈信号),反馈到输入端与给定电压 U_{ST} 进行比较,所得的结果即为偏差信号 $\Delta U = U_{ST} - U_{FT}$ 。经电压、功率放大器放大后,去控制执行电动机的旋转速度与方向,再经减速器带动调压器动触点移动,以改变加热电流的大小来调节炉温。

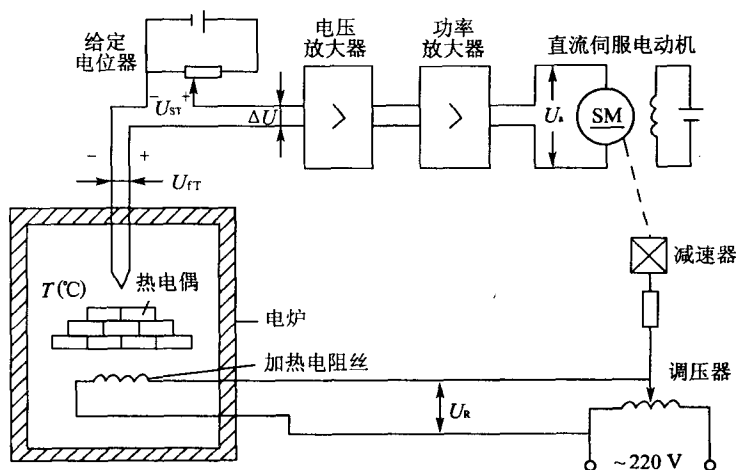


图 1-1 电炉箱恒温自动控制系统

当炉温偏低时, $U_{FT} < U_{ST}$, 则 $\Delta U > 0$, 此时偏差电压极性为正, 电动机正转, 动触点右移, 加热电流加大, 炉温上升, 直到炉温升至预期值, $U_{FT} = U_{ST}$, $\Delta U = 0$, 电动机停转。反之, 当炉温偏高时, 则 ΔU 为负, 电动机反转, 动触点左移, 加热电流减小, 炉温下降至预期值。

现将图 1-1 画成图 1-2 所示的职能方框图形式。图中方框代表各个组成部分, $\otimes$ 代表比较元件, 方框两边直线及其标注代表该组成部分在控制过程中相互作用的物理量, 箭头代表作用信号传递的方向。采用职能方框图可清晰地表明系统各组成部分及其相互作用的情况。还可知, 被控制量(炉温)就是系统的输出量, 给定电压信号就是系统的输入量。信号是沿着箭头所指方向传递, 从职能方框图中不难发现有两条信号传递的路径: 一条是从输入端向输出端方向传递, 这种传递称为顺馈; 另一条是从输出端向输入端方向传递, 称为反馈。也就是说, 反馈就是从系统输出端取出信号, 经过某种装置(通常称为反馈环节)变换后返回到输入端, 与输入信号进行比较。这种返回到输入端的信号称为反馈信号。输入信号与反馈信号比较的结果则为偏差。

通过上面的分析可知, 为了对炉温进行自动控制, 控制系统必须具有以下两项基本的职能: 一是必须对被控制量进行检测并将它反馈到系统的输入端与控制量相减(即负反馈), 得到偏差信号; 二是必须对偏差信号进行适当的变换和放大, 从而产生对被控制量的

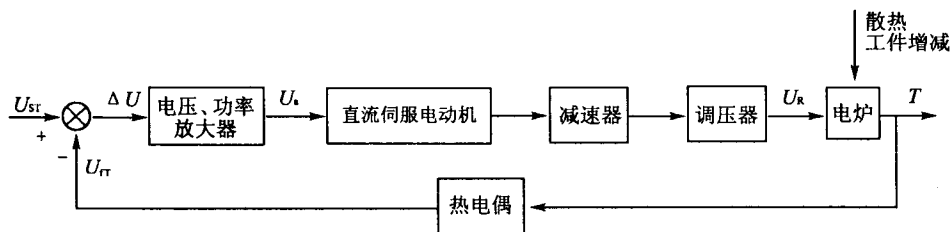


图 1-2 电炉箱恒温自动控制系统职能方框图

再控制作用,这种再控制作用应使偏差减小或消除,以使被控制量重新保持在预期值上。

这种基于反馈的“检测偏差用以纠正偏差”的控制原理称为反馈控制原理。

我们还可举出许多的例子。尽管不同的系统实现自动控制的装置各不相同,但反馈控制的原理却是相同的。反馈控制是实现自动控制的最基本的方法,并得到了广泛应用。它不仅可以实现对物理量的恒值控制,而且还可以实现被控制量复现控制量的变化规律的随动控制。

1.2.2 开环控制系统和闭环控制系统

控制系统按照是否设有反馈环节,可以分为两类:一类是开环控制系统,另一类是闭环控制系统。

1. 开环控制系统

如果系统的输出端和输入端之间不存在反馈回路,输出量对系统的控制作用没有影响时,这样的系统称为开环控制系统。图 1-3 为一开环速度控制系统。它根据控制信号的大小和方向来控制负载转速的大小和方向。原理很简单,控制信号通过放大器放大,输出一电流给电液伺服阀,电液伺服阀则供给一定流量的压力油给液压马达,带动负载以一定的转速运动。这个系统对被控制量(转速)不进行任何检测,因为没有反馈也就谈不上跟控制量进行比较以产生偏差来对系统进行再控制了。它仅是根据控制信号对转速加以控制的。因此,开环控制系统的精度主要取决于系统的校正精度,取决于在工作过程中保持校正值以及组成系统的元件特性和参数值的稳定程度。

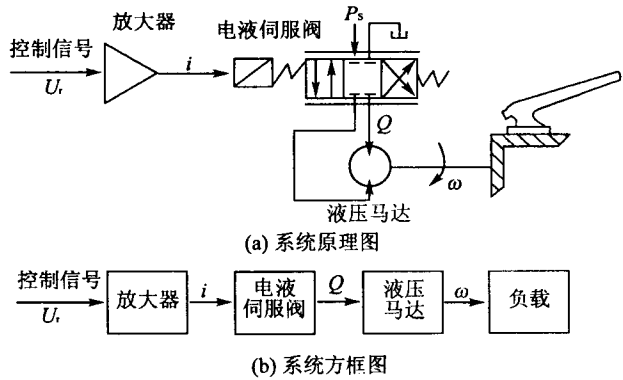


图 1-3 开环速度控制系统

一旦系统受到扰动作用,如图 1-3 所示的系统,当负载力矩增加时,由于电液伺服阀

的流量随负载压力的增加而减小以及液压系统内漏损增加等原因,就会造成液压马达转速的降低。因为没有反馈比较,系统不具备纠偏的能力,因此,使开环系统的精度降低。对扰动造成的误差无法自动补偿。但是开环系统一般结构简单,系统稳定性好。一般说来,当系统控制量的变化规律能预先确知,并且对系统中可能出现的扰动可以做到有效抑制时,采用开环控制系统有其优越性。当无法预计的扰动因素使被控制量产生的偏差超过允许限度时,开环控制系统便无法胜任了,这时就应考虑采用闭环控制系统。

2. 闭环控制系统

凡是系统的输出端和输入端之间存在反馈回路,即输出量对控制作用能有影响的系统,叫做闭环控制系统。如果对图 1-3 所示的开环速度控制系统引入反馈回路,即用测速发电机检测被控制量(转速),然后反馈到输入端则构成闭环速度控制系统,如图 1-4 所示。

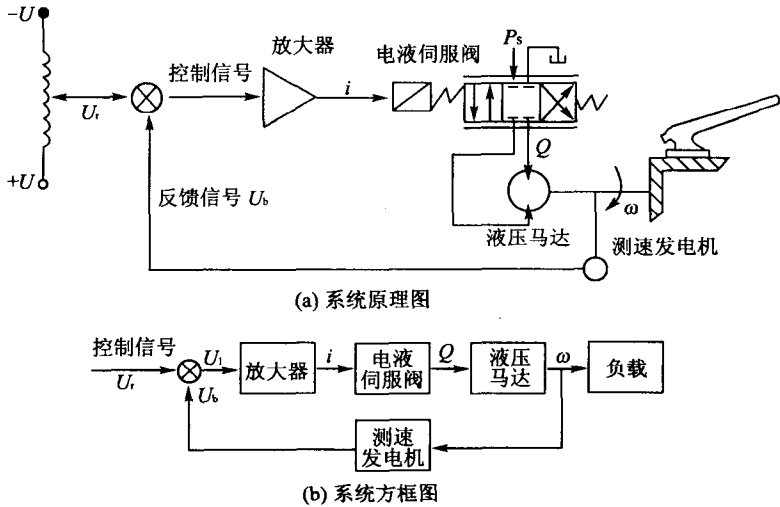


图 1-4 闭环速度控制系统

闭环控制系统突出的优点是采用了负反馈,因而被控制量对于外部或内部扰动所引起的误差能够自动纠正。这样就有可能采用精度不太高而成本比较低的元件构成控制质量较高的控制系统。当然,闭环控制系统要增加检测、反馈比较等环节,会使系统复杂、成本增加,同时会带来副作用。当系统参数选得不适当时,将会造成系统振荡,甚至使系统完全失去控制(即系统不稳定)而无法正常工作。这是采用闭环控制系统时必须加以重视并认真解决的问题。

1.3 自动控制系统的基本组成

为了组成一个自动控制系统,必须包含以下各类基本元件。

(1)任何控制系统必定有其控制对象,即系统所要操纵的对象。控制对象的输出就是系统的被控制量。

(2)系统工作时都要加上一定的激励信号,用来产生并可调节系统控制量的元件为给

定元件。

(3)为了检测被控制量,系统需要有检测元件。由于检测元件的精度直接影响控制系统的精度,所以应尽可能采用精度高的检测元件和合理的检测线路。有的系统检测元件的输出就是反馈信号,而有的系统将检测元件的输出再经分压和滤波等才形成反馈信号,此时将检测、分压和滤波等合并称为反馈环节。

(4)为了对反馈信号和控制量进行比较,以便产生偏差信号,系统必须要有比较元件。比较元件在多数控制系统中常常是和检测元件(或反馈环节)或线路结合在一起的。在比较元件处,控制量和反馈信号进行叠加或者说求和运算,而且一定要注意两者的极性关系。

(5)由于偏差信号一般都比较微弱,需要进行放大变换,使它具有足够的幅值和功率,因此系统还必须具有放大元件。

(6)系统需要根据偏差信号产生的再控制作用,去驱动控制对象使被控制量按控制要求的变化规律动作,这就要求系统还应具有执行元件。

(7)实践证明,由上述基本元件简单组合起来的控制系统往往是不能完成任务的。为了改善系统的控制性能还需要在系统中加进校正元件。校正元件可以加在偏差信号至被控信号间的前向通道中,也可以加在反馈通道中。前者称为串联校正,后者称为反馈校正。

由上述各基本元件组成的自动控制系统的职能方框图如图 1-5 所示。

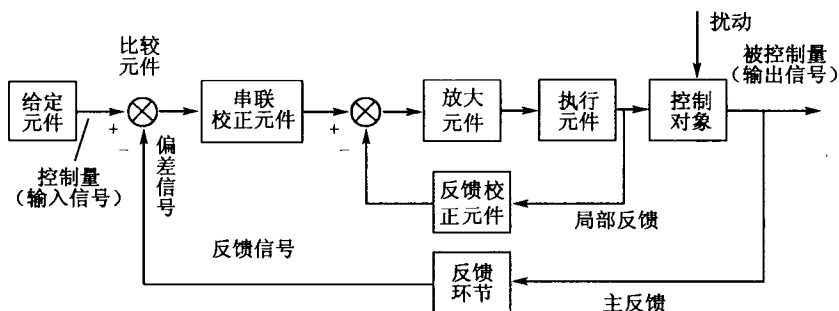


图 1-5 自动控制系统的职能方框图

一般说来,尽管自动控制系统的控制任务各不相同,以及所使用的元件结构和能源形式均有所不同,但就其信号的传递、变换的职能来说,都可抽象成图 1-5 所示的职能方框图。

1.4 自动控制系统的基本类型

自动控制系统的种类很多,应用的范围也很广,它们的结构和完成的任务也不一样。因此,自动控制系统的分类方法也很多,其中有以下几种主要分类分法:

1.4.1 按照输入量的变化规律来分

1. 恒值控制系统

恒值控制系统的特点是:系统的控制量为恒定的常量,而要求系统的被控制量也保持

在相对应的常量上。确切地说,控制量可根据要求预选某常量。

恒值控制系统是最常见的一类自动控制系统,如自动调速系统、恒温控制系统、恒张力控制系统、恒压力控制系统等。

对恒值控制系统,着重研究各种扰动对被控制量的影响以及如何克服扰动影响将实际输出量保持在预期值上。

2. 随动系统

随动系统的特点是:系统的控制量是变化着的(常常还是随机的),要求被控制量能够准确、迅速复现控制量的变化。

随动系统在工业和国防上有着极为广泛的应用。如火炮控制系统、雷达自动跟踪系统、刀架跟踪系统、各种电信号表及记录仪等。

对随动系统,常常着重于跟随的准确性和跟随的快速性。

1.4.2 按照系统传递信号与时间的关系来分

1. 连续控制系统

当系统各元件的输入信号是时间的连续函数,各元件相应的输出信号也是时间的连续函数时,这种系统称为连续控制系统。连续控制系统的性能一般是用微分方程来描述的。信号的时间函数允许有间断点,或者在某一时间范围内为连续函数。

2. 离散控制系统

离散控制系统又称采样数据系统。它的特点是系统中有的信号是断续量,即信号在特定的采样时刻才取值,而在相邻采样时刻的间隔中信号是不确定的。通常,采用数字计算机控制的系统都是离散控制系统。

1.4.3 按照系统输出量和输入量的关系来分

1. 线性控制系统

线性控制系统是由线性元件(即控制元件的静特性呈线性关系)构成的系统。系统的性能可以用线性微分方程来描述。线性控制系统的一个重要性质就是可以应用叠加原理,即几个扰动或控制量同时作用于系统时,其总的输出等于每个单独作用时的输出之和。

2. 非线性控制系统

非线性控制系统就是由具有非线性性质(例如饱和、死区、摩擦、间隙等)的元件所构成的系统。事实上,只要系统中有一个非线性性质的元件,系统就是非线性控制系统。系统的性能往往要采用非线性方程来描述。叠加原理对非线性控制系统无效。

当然,除了以上的分类方法外,还有其他一些方法,例如按系统主要组成元件的物理性质来分,又可分为电气控制系统、机械控制系统、液压控制系统、电气—液压控制系统。又如按输入、输出信号的数量来分,又可分为单输入—单输出控制系统、多输入—多输出控制系统。本书只讨论连续控制的线性控制系统。

1.5 对自动控制系统的基本要求

任何一个自动控制系统的工作必须是稳定的,这是对自动控制系统提出的最基本的

要求。除此之外,它还需要在阻尼程度、响应输入信号的速度及控制精度等方面满足一定的要求。

对自动控制系统的基本要求,通常是通过系统响应特定输入信号(或称试验信号)的过渡过程及稳态的一些特征值来表征。

在本书中,控制量用 $r(t)$ 来表示;被控制量用 $c(t)$ 来表示;偏差量用 $\epsilon(t)$ 来表示;扰动量用 $d(t)$ 来表示。

过渡过程是指系统的被控制量 $c(t)$,在受到控制量或扰动量作用下,由原来的平衡状态(或称稳态)变化到新的平衡状态的过程。

自动控制系统响应单位阶跃输入信号(如图 1-6 所示)时的过渡过程的一般形式如图 1-7 所示。

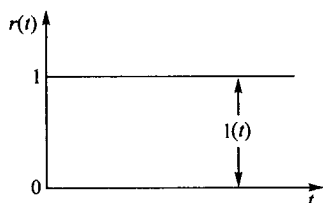


图 1-6 单位阶跃输入信号

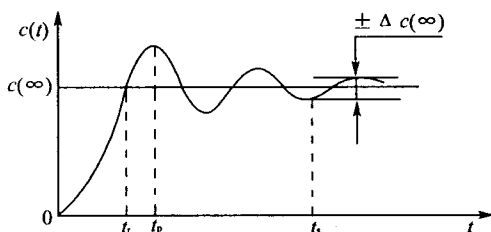


图 1-7 单位阶跃输入信号作用下系统的过渡过程

当 $t \geq t_s$ 时,若有 $|c(t) - c(\infty)| \leq \Delta c(\infty)$,则定义 t_s 为系统的过渡过程时间(或称调整时间)。其中 $\Delta c(\infty)$ 为允许误差,一般取 0.02 或 0.05。

如果在过渡过程中,出现 $c(t) > c(\infty)$ 的情况,则表示系统产生了超调现象。超调信号的严重程度用超调量 σ 来描述。超调量的定义用公式表示为

$$\sigma = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

式中, $c(t_p)$ 为 $c(t)$ 的峰值。

系统的过渡过程时间 t_s 和超调量 σ 是描述系统过渡过程的两个重要性能指标。 t_s 越小,说明系统从一个稳态过渡到另一个稳态所需要的时间越短,反之则越长。因此, t_s 是表征系统响应输入信号速度的一项性能指标。 σ 越小,则说明系统的过渡过程进行得越平稳。值得注意的是,超调严重的系统,不仅使组成系统的各个元件处于恶劣的工作条件下,而且过渡过程在长时间内不能结束,致使系统的误差不能很快减小到允许范围内。

按照过渡过程评价系统性能,除了 t_s 和 σ 两项指标外,有时还需计算 $c(t)$ 穿越 $c(\infty)$ 的次数。定义 $c(t)$ 穿越 $c(\infty)$ 水平线次数的一半为系统过渡过程的振荡次数 N 。 N 越小,说明系统的阻尼性能越好。有时还通过过渡过程第一次到达 $c(\infty)$ 的时间 t_r (称为上升时间)和第一次到达峰值的时间 t_p 来表征系统响应输入信号的快速性能。

系统被控制信号 $c(t)$ 稳态时的预期值与其实际值之差,称为稳态误差 e_{ss} ,它是表征系统控制精度的一项性能指标。 e_{ss} 越小,系统精度越高。 $e_{ss} = 0$,称为无静差系统。 $e_{ss} \neq 0$,称为有静差系统。

通常,将调整时间 t_s 、上升时间 t_r 、峰值时间 t_p 、超调量 σ 和振荡次数 N 称为动态性能指标。其中 t_s 、 t_r 和 t_p 表征系统的快速性能, σ 和 N 表征系统的阻尼性能,即平稳性。而

稳态误差 e_{ss} 是用以表征系统稳态性能的一项指标。如果某些系统要求过渡过程单调上升,并逐渐逼近被控制信号的稳态值 $c(\infty)$,也就是要求 $\sigma=0$, $N=0$ 时,则对系统的结构形式和元件参数均有严格要求。这时的过渡过程曲线如图 1-8 中的曲线①。

如果系统的过渡过程随时间的推移而发散,如图 1-8 中的曲线②或曲线③,此时系统便不可能达到平衡状态,我们把这类系统称为不稳定系统。显然不稳定系统在实际中是不能应用的,因为它不满足对自动控制系统提出的最基本的要求。

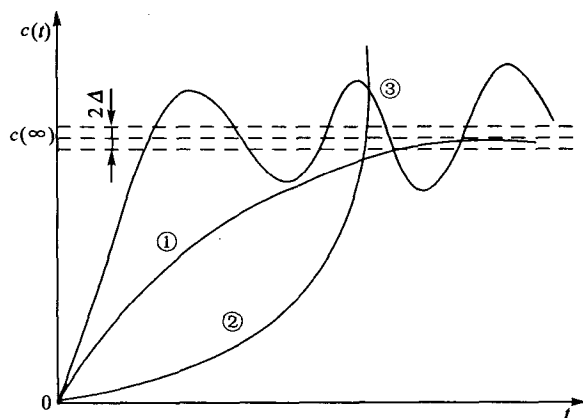


图 1-8 自动控制系统过渡过程曲线

1.6 习 题

1. 试比较开环控制系统和闭环控制系统的优缺点。
2. 日常生活中有许多闭环和开环控制系统。试举几个具体例子,并说明它们的工作原理。
3. 组成自动控制系统的主要元件有哪些? 它们各起什么作用?
4. 恒值控制系统和随动系统各自的主要特点是什么?
5. 图 1-9 所示为仓库大门自动控制系统。试说明自动控制大门开启和关闭的工作原理。如果大门不能全开或全关,则怎样进行调整? 画出系统的职能方框图。

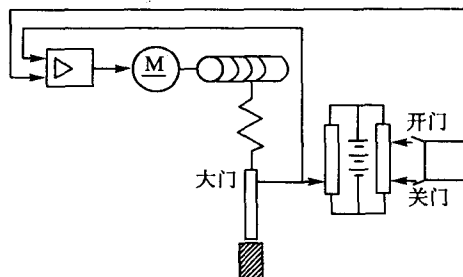


图 1-9 题 5 图

第 2 章

拉普拉斯变换

拉普拉斯变换简称拉氏变换。它是一种函数的变换,经变换后,可将实数域的微分方程变换成复数域的代数方程。并且在变换的同时,将初始条件引入,避免了经典解法中求积分常数的麻烦,可使解题过程大为简化。因此,对于那些以时间为自变量的线性定常微分方程来说,拉氏变换求解法是非常有用的。

在经典自动控制理论中,自动控制的数学模型是建立在传递函数基础之上的,而传递函数的概念又是建立在拉氏变换基础上的,因此,拉氏变换是经典控制理论的重要数学基础,是分析研究线性动态系统的有力数学工具。本章着重介绍拉氏变换的定义,一些常用时间函数的拉氏变换,拉氏变换的性质以及拉氏反变换的方法。最后,介绍用拉氏变换解微分方程的方法。在学习中应注重该数学方法的应用,为后续章节的学习奠定基础。

2.1 拉氏变换

2.1.1 拉氏变换的定义

若 $f(t)$ 为实变量时间 t 的函数,且当 $t < 0$ 时,函数 $f(t) = 0$,则函数 $f(t)$ 的拉氏变换记作 $L[f(t)]$ 或 $F(s)$,并定义为:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2-1)$$

式中, $s = \sigma + j\omega$ 为复变量, $F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数, $f(t)$ 为 $F(s)$ 的原函数。原函数是实变量 t 的函数,象函数是复变量 s 的函数。所以,拉氏变换是将原来的实变量函数 $f(t)$ 转化为复变量函数 $F(s)$ 的一种积分运算。在本书中,将用大写字母表示其对应的小写字母所代表的函数的拉氏变换。

若式(2-1)的积分收敛于一确定的函数值,则 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 存在。这里 $f(t)$ 必须满足狄里赫里条件。这些条件在工程上常常是可以满足的。

2.1.2 典型时间函数的拉氏变换

(1) 单位阶跃函数

单位阶跃函数如图 2-1 所示。

其定义为

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

由式(2-1) 可得

$$L[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-s} dt = -\frac{e^{-s}}{s} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad (2-2)$$

在自动控制系统中,单位阶跃函数相当于一个实加作用信号,如开关的闭合(或断开),加(减)负载等。

(2) 单位脉冲函数

单位脉冲函数如图 2-2 所示。

其定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$

同时, $\int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1$, 即脉冲面积为 1。且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0)$$

式中, $f(0)$ 为 $f(t)$ 在 $t = 0$ 时刻的函数值。

由式(2-1) 求 $\delta(t)$ 的拉氏变换

$$L[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-s} dt = e^{-s} \Big|_{t=0} = 1 \quad (2-3)$$

(3) 单位斜坡函数

单位斜坡函数如图 2-3 所示。

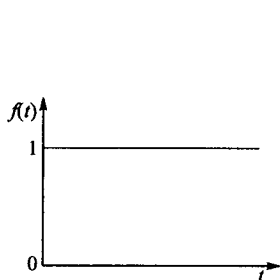


图 2-1 单位阶跃函数

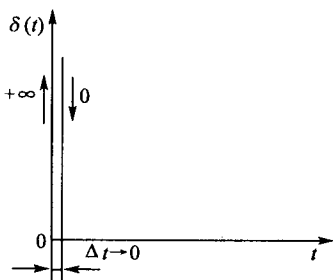


图 2-2 单位脉冲函数

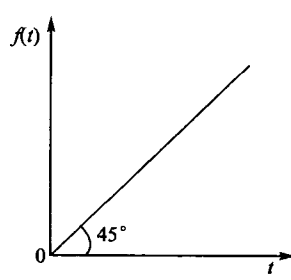


图 2-3 单位斜坡函数

其定义为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases}$$

由式(2-1) 有

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-s} dt = -t \frac{e^{-s}}{s} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{-s}}{s}\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} dt = -\frac{1}{s^2} e^{-s} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (2-4)$$