机械工人活叶学习材料

JIXIE GONGREN HUOYE XUEXI CAILIAO

简易计算

16

工厂常用几何計算法

張耀卿编著

机械工业出版社

目　次

一 引言

在机械加工中，工件几何形状的各部尺寸或各个角度間的互相换算，有的要用三角函数的关系来求解，但有的要用几何定理来求解。关于要用几何定理来求解的問題，我們将在这本[活叶]里来談它。

在加工中，工件的直綫尺寸或角度为什么要进行計算呢？因为在图紙上不是把所有直綫尺寸和角度全部都注出来，而是只标注出足够确定图形形状、大小的必不可少的尺寸和角度。根据标注出的这些尺寸和角度，就可以画出整个图形，也就是說可以加工出这个工件来。如果再多注出一个直綫尺寸或角度，就成为重复尺寸，反而是不对的。既然如此，那么为什么又要进行計算那些图紙上未注明的直綫尺寸或角度呢？一般来說，有这么几个原因：1）由于工艺上的需要，加工基准和图紙上的尺寸基准不一致，需要計算出工艺尺寸来。2）由于測量上的需要，用測量角度代替直綫尺寸的測量，或用測量直綫尺寸代替角度的測量。3）有些图紙上注明的尺寸不好測量，需要計算出相关部位的尺寸以便測量，如圓弧中心距离不好測量，需要計算圓弧和直綫交割处的位置尺寸，然后再进行測量。4）由于工序加工出来的半成品和成品形状不同，不能測量图紙上注明的成品尺寸，也需要通过計算得出工序尺寸来。此外，在技术測量上的直接或間接測量也往往需要进行一些計算。因此，几何計算就成为加工和技术測量中常常遇到的問題。有些典型的問題或簡单图形的計算，一般都有現成的公式，但这些公式怎么来的呢？至于沒有現成計算公式的几何图形又是怎样

应用几何关系、几何定理来求算呢？这些問題将在这本［活叶］中加以論述，使得大家学会应用几何定理、推导計算公式和解决各种几何图形的計算問題。

二　应用几何基础

1 計算长度所用到的几何定理

（一）勾股弦定理　勾股弦定理也叫商高定理和毕氏定理●。直角三角形中斜边叫弦，两个直角边中短边叫勾，长边叫股。这定理表明勾、股、弦三个长度間的关系，所以叫它为勾股弦定理。

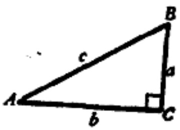

图 1　直角三角形。

这个定理在几何計算中用得最广，应該很好地掌握它。

〔定理 1〕直角三角形的斜边平方等于其他两边的平方和。

如图 1 所示，用式子来表示就是：

$$c^2=a^2+b^2。$$

由此式导出：

$$c=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2},$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}。$$

（二）相似三角形定理

〔定理 2〕两个任意三角形，若三个角对应相等，则这两个三角形为相似三角形，其三組对应边的比相等。

● 我国古书"周髀算經"中記載周公向商高学习算术的对話中談到这定理，所以有人称这定理为商高定理，而古希腊数学家毕达哥拉斯也証明过这定理，所以过去多数称它为毕氏定理。

如图 2 所示，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，则$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$●。于是$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$。

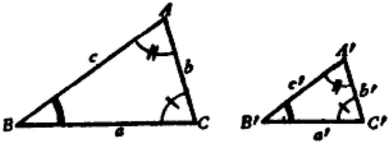

图 2　相似三角形。

推論 1：若两个任意三角形有两个角对应相等，则这两个三角形为相似三角形。

道理很簡单，因为两个三角形的內角和均为180°，有两个角对应相等，余下的一个角也必然相等。

推論 2：两直角三角形中有一个銳角对应相等，则这两直角三角形为相似三角形。

推論 3：一个三角形內，任意一边的平行綫分三角形为两个相重叠的大小三角形为相似三角形。

如图 3 所示，$B'C'\parallel BC$，则$\triangle AB'C'\backsim\triangle ABC$，于是$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$。

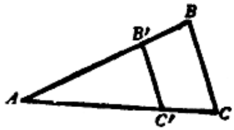

图 3　相重叠的相似三角形。

〔**定理 3**〕两个任意三角形有一个角相等，这个角的两个夹边对应成比例，这两个三角形为相似三角形。

如图 2 所示，若 $\angle A=\angle A'$，$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

$\because$　$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\therefore \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$。

〔**定理 4**〕两个任意三角形三边对应成比例，则这两三角形为相似三角形，对应角必相等。

如图 2 所示，若$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$，则 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=$

● 符号"$\backsim$"是相似符号。

$\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

2 計算长度或角度所用到的几何定理

（一）等腰三角形定理

〔**定理 5**〕三角形若两个角相等，則这两个角所对的边也相等；反之若两边相等，則这两边所对的角也相等，这种三角形叫做等腰三角形或二等边三角形。

如图 4 所示，若 $\angle A=\angle B$，則 $a=b$；反之若 $a=b$，則$\angle A=\angle B$。

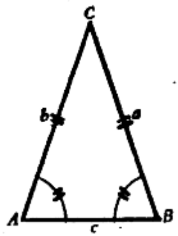

图 4　等腰三角形。

（二）等腰直角三角形定理

〔**定理 6**〕若直角三角形两直角边相等，則两銳角均等于 45°，这种三角形称为等腰直角三角形。

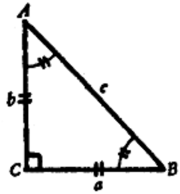

图 5　等腰直角三角形

如图 5 所示，$\triangle ABC$ 中$\angle C=90°$，而 $a=b$，則$\angle A=\angle B=45°$。

（三）30°和60°直角三角形定理

〔**定理 7**〕若直角三角形中两个銳角各等于30°和60°，則斜边长度为最短边的 2 倍。反之若斜边长度为最短边的两倍，則两銳角各为30°和60°。

如图 6 所示，若 $\angle A=60°$，$\angle B=30°$，則 $c=2b$，反之亦然。按勾股弦定理可以求得：若 $b=1$，$c=2$ 則 $a=\sqrt{3}$，即：$a:b:c=\sqrt{3}:1:2$。

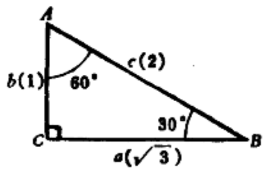

图 6　30°和 60° 直角三角形。

（四）切綫性质定理

〔**定理 8**〕切綫和过切点的半徑垂直。

如图 7 所示，B 是切点，则$AB \perp BO$。

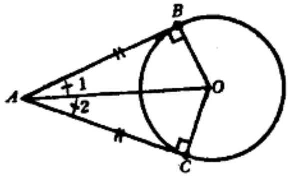

图 7　切綫和圓联成的图形。

〔**定理 9**〕过圓外一点向圓可作两根切綫，两根切綫长度相等。

如图 7 中$\overline{AB}=\overline{AC}$。

〔**定理10**〕两根切綫夹角为切綫交点和圓心的联綫所平分。

如图 7 中$\angle 1=\angle 2$。

3 計算角度所用到的几何定理

（一）三角形內角和定理

〔**定理11**〕任意三角形的內角和均等于180°。

如图 2 中：$\angle A+\angle B+\angle C=180^{\circ}$。

（二）三角形外角定理

〔**定理12**〕三角形任意一边的延长綫和另一边夹成的角度叫做外角，外角等于不相邻的两个內角之和。

如图 8 所示，外角$\angle ACD=\angle A+\angle B$。

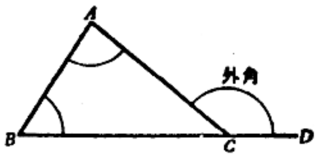

图 8　三角形外角。

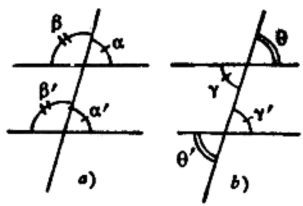

图 9　平行綫的同位角和錯角。

（三）平行綫性质定理

〔**定理13**〕两平行綫被一直綫所截，形成的同位角相等。

如图9 a，$\angle\alpha=\angle\alpha'$，$\angle\beta=\angle\beta'$。

〔**定理14**〕两平行綫被一直綫所截，形成的錯角相等。

如图9 *b*，$\angle\theta=\angle\theta'$，$\angle\gamma=\angle\gamma'$。

（四）对頂角定理

〔**定理15**〕两直綫相交，形成的对頂角相等。

如图 10 所示，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。

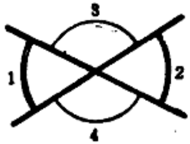

图10　对頂角。

（五）对应边相互垂直等角补角定理

〔**定理16**〕两个角两对应边相互垂直，则这两个角相等或相补（相补即其和等于180°）。

如图 11 *a* 中，$\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 的两对应边相互垂直，则 $\angle\alpha+\angle\beta=180°$，即 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 相补。

$\angle\alpha$ 和 $\angle\gamma$ 两对应边也相互垂直，则 $\angle\gamma=\angle\alpha$。

又如图11 *b* 中，$\angle\theta$ 和 $\angle\delta$ 两对应边也相互垂直，$\angle\delta=\angle\theta$。

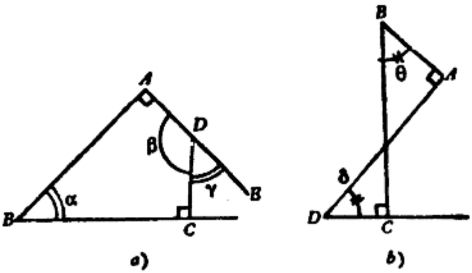

图11　对应边互相垂直的等角或补角。

（六）对应边相互平行等角补角定理

〔**定理17**〕两个角的两对对应边对应平行，则两角相等或相补。

若角的两边沿开口方向，叫做边的〖輻射方向〗，如图12的箭头所示。若两对对应边輻射方向均同向或均异向，则两角相等。如图 12 中 $\angle\alpha_1$ 和 $\angle\alpha_2$ 两对对应边对应平行，而且輻射方向两边

均相同，所以$\angle\alpha_1=\angle\alpha_2$。因$\angle\alpha_1$和$\angle\alpha_3$两对对应边也对应平行，而两边輻射方向均相反，所以$\angle\alpha_1=\angle\alpha_3$。若两对对应边的輻射方向有一对对应边同向，而另一对对应边异向，则这两角互补，如图12中$\angle\alpha_1$和$\angle\beta$，两对对应边对应平行，但其輻射方向一对同向一对异向，所以$\angle\alpha_1+\angle\beta=180°$，即$\angle\alpha_1$和$\angle\beta$互为补角。

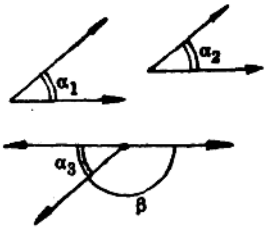

图12　对应边互相平行的等角或补角。

三　长度計算

1 应用勾股弦定理求算长度的一般方法　用几何方法求算长度中，勾股弦定理用得最多。应用勾股弦定理，首先要找出一个直角三角形来。如果在一个直角三角形中，已知一角一边求其余两边的話，可以用三角函数計算。如果只知道两边而不知道角度时，就可以用勾股弦定理求算另一边的长度。至于如何找出直角三角形、以及这个直角三角形所含有已知数和目的数，或簡化后的已知数和目的数呢？从各种不同的几何形状中找出直角三角形的方法很多，而現成的直角三角形是不多的，多数总要通过画輔助綫的办法来得到，如画垂直綫、平行綫、分角綫、对角綫和切綫等而得到直角三角形。如何找得快、找得对，要靠多练习逐渐积累出經驗来，但一般来說可以归納为以下几种类型：

（一）已知数和目的数自然組成直角三角形　如图13的截圓形，已知直徑d，平面厚度h，求平面部分寬度b，则d、b和h組成直角三角形ABC。

（二）平分已知数或目的数得到直角三角形 如图 14 所示，已知 b 和 h，求斜高 l，过 A 作 BC 的垂直（平分）綫 AD，則平分已知数 b。于是已知数 $\frac{b}{2}$，h 和目的数 l 組成直角三角形 ABD。

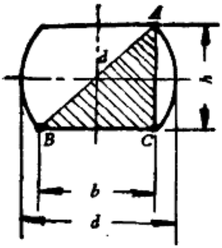

图13 截圓形。

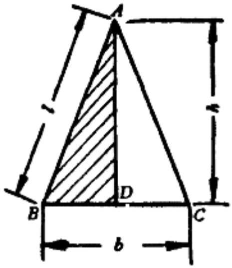

图14 等腰三角形。

（三）簡化已知数和目的数得到直角三角形 如图 15 所示，已知 R 和 S，求算 $b=?$ 簡化后的未知数 h 和已知数 $\frac{S}{2}$ 及 R 組成直角三角形 ABO，若求出 h，則目的数 $b=R-h$。又如图16 所示，已知 R 和 H，求 $L=?$ 簡化后的已知数（$R-H$）和 R 及目的数 L 組成直角三角形 ABC。

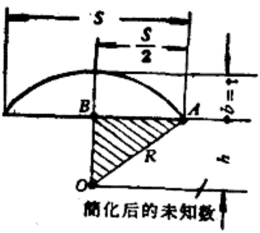

图15 弓形。

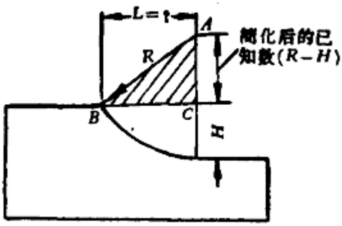

图16 工件的圓角部分。

（四）圓（圓弧）半徑和切綫組成直角三角形　如图 17 所示，已知半徑 r 和 a，求算切綫长度 l =？因切綫 AB 和半徑 r 垂直，則 l、r 和 a 組成直角三角形 ABO。

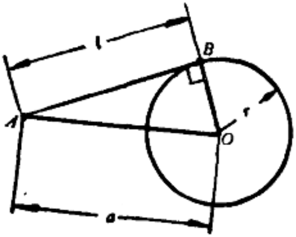

图17　圓和切綫。

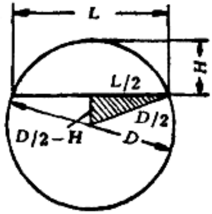

图18　弓形。

2 应用勾股弦定理求算长度的实例

（一）弓形尺寸互算法　图 18 是一个弓形，D 是直徑，L 是弓形弦长，H 是弓形矢高，在阴影直角三角形中，根据勾股弦定理可得：

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2=\left(\frac{D}{2}-H\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2，展开得●：$$

$$\frac{D^2}{4}=\frac{D^2}{4}-D\cdot H+H^2+\frac{L^2}{4}，则 D\cdot H=H^2+\frac{L^2}{4} \qquad (a)$$

于是：
$$D=H+\frac{L^2}{4H}。 \qquad (1)$$

由（a）式得：$L^2=4(D\cdot H-H^2)=4H(D-H)$

于是：
$$L=2\sqrt{H(D-H)}。 \qquad (2)$$

又由（a）式得 $H^2-D\cdot H+\frac{L^2}{4}=0$，用代数解二次方程式的公式● 求解 H 得：

● 二項式平方展开公式是：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$。

● 一元二次三項式 $ax^2+bx+c=0$ 求解未知数 x 的公式是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a\cdot c}}{2a}。$$

$$H=\frac{D\pm\sqrt{D^2-L^2}}{2}。\qquad (3)$$

当弓形小于半圆时取〔－〕号，大于半圆时取〔＋〕号。

〔例 1〕图 19 是一个破碎的皮带輪，量得当弦长是320毫米时矢高是 46.20 毫米，求算这皮带輪直徑$D=$?

解：用公式（1）：

$$D=H+\frac{L^2}{4H}=46.20+\frac{320^2}{4\times 46.23}=46.20+553.75=599.95$$

$\approx$600毫米。

〔例 2〕图 20 是一个半圓鍵，长$L=43.08$毫米，高$H=16$毫米，問它的直徑$D=$?

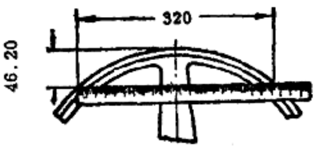

图19 破碎皮带輪。

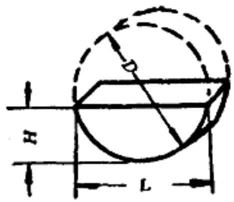

图20 半圓鍵。

解：用公式（1）：

$$D=H+\frac{L^2}{4H}=16+\frac{43.08^2}{4\times 16}=16+29=45\text{毫米}。$$

〔例 3〕图 21 的軸，直徑 20 毫米，圓头半徑 18 毫米，間圓头部分的高度$H=$?

解：这題目相当于求弓形矢高H，已知弦长$L=20$，弓形所屬的圓直徑$D=2R=2\times18=36$毫米，代入公式（3）：

$$H=\frac{D-\sqrt{D^2-L^2}}{2}=\frac{36-\sqrt{36^2-20^2}}{2}=\frac{36-\sqrt{896}}{2}=\frac{36-29.933}{2}=$$

$$\frac{6.067}{2}=3.033\text{毫米}。$$

〔例 4〕图 22 是一个半圆头铆釘，釘头直徑 40 毫米，高15毫米，求算圆头半徑 $R=?$

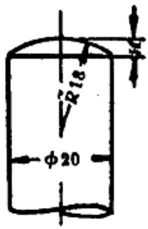

图21 軸的圓头部分。

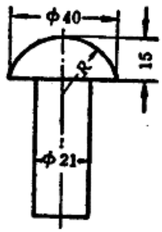

图22 半圓头鉚釘。

解：用公式（1）：$D=H+\frac{L^2}{4H}$，因 $L=40$，$H=15$，代入得：

$$D=15+\frac{40^2}{4\times15}=15+\frac{1600}{60}=15+26.66=41.66\text{毫米},$$

所以 $R=\frac{D}{2}=\frac{41.66}{2}=20.83$毫米。

（二）截圓尺寸互算法 图 23 和 24 是截圓形，D是圓的直徑，平面部分的寬度是A，两平面距离（或叫对边距离）是B。在阴影直角三角形中，根据勾股弦定理可得：

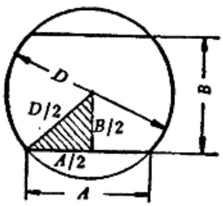

图23 截圓形。

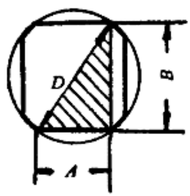

图24 方截圓形。

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2,\text{（图23）}$$

$D^2=A^2+B^2$，（图24）

第一式展开簡化后同样得到$D^2=A^2+B^2$，

于是 $$D=\sqrt{A^2+B^2}。\tag{4}$$

$$A=\sqrt{D^2-B^2}。\tag{5}$$

$$B=\sqrt{D^2-A^2}。\tag{6}$$

〔例5〕有一工件直徑$D=30$毫米，一端要銼平(如图23)，以便使用扳手，如果平面部分的寬度A要求22毫米的話，問对边距离$B=$?

解：用公式（6）：

$B=\sqrt{D^2-A^2}=\sqrt{30^2-22^2}=\sqrt{416}=20.4$毫米。

〔例6〕一螺杆端部直徑$D=25$毫米，要銑成方形作为扳手用，要求开口为20毫米，問銑好后平面部分的寬度$A=$?（图24）

解：用公式（5）：$A=\sqrt{D^2-B^2}=\sqrt{25^2-20^2}=\sqrt{225}=15$毫米。

（三）圓內接矩形尺寸互算法 图25是圓內接矩形，它的尺寸計算和截圓是一样的，可用公式（4）、（5）及（6）。

〔例7〕要刨成一个长28毫米，寬24毫米的长方形柱，問最小要用多大直徑的圓形材料?

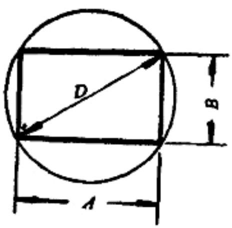

图25 圓內接矩形。

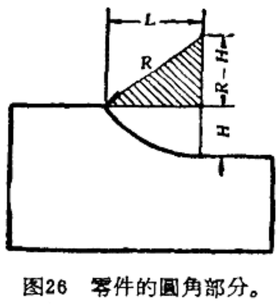

图26 零件的圓角部分。

解：用公式（4）：

$$D=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{28^2+24^2}=\sqrt{1360}=36.9\text{毫米。}$$

（四）圓角尺寸互算法 图 26 是零件的圓角部分，圓角半徑 R，高度差是 H，圓角部分长度是 L。在阴影直角三角形中，根据勾股弦定理可得：$R^2=L^2+(R-H)^2$，即 $R^2=L^2+R^2-2R\cdot H+H^2$，则

$$2R\cdot H=L^2+H^2; \tag{a}$$

所以
$$R=\frac{L^2}{2H}+\frac{H}{2}\text{。} \tag{7}$$

由（a）式得
$$L=\sqrt{2R\cdot H-H^2}\text{。} \tag{8}$$

又由（a）式得 $H^2-2R\cdot H+L^2=0$，用代数解二次方程式，解得：

$$H=\frac{2R-\sqrt{4R^2-4L^2}}{2}=R-\sqrt{R^2-L^2}\text{●，所以：}$$

$$H=R-\sqrt{R^2-L^2}\text{。} \tag{9}$$

〔**例 8**〕設工件某一部分（如图 26 所示），高度差 $H=10$ 毫米，要在长 15 毫米內用圓弧来連接，問該用多大半徑的圓弧？

解：用公式（7）：

$$R=\frac{L^2}{2H}+\frac{H}{2}=\frac{15^2}{2\times10}+\frac{10}{2}=11.25+5=16.25\text{毫米。}$$

〔**例 9**〕图 27 是一个工件的圓弧部分，两平面高度差 $H=20$ 毫米，图紙上注明連接圓弧半徑 $R=30$ 毫米，当刨削时該留多长的水平距离，刨刀就应該开始两向移动，以便得到規定的圓弧？試計算之。

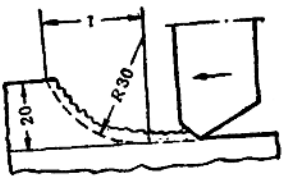

图27 刨圓角部分。

● H 的另一个根是 $(R+\sqrt{R^2-L^2})>R$，不切合本例实际情况，所以不用。

解：用公式（8）：

$L=\sqrt{2R\cdot H-H^2}=\sqrt{2\times30\times20-20^2}=\sqrt{800}=28.28$ 毫米。

（五）軸圓角尺寸互算法

图 28 的軸，在大小直徑間用圓角来連接，大直徑D，小直徑d，圓角半徑R，圓弧一段的軸向长度L。它的計算法实际上和图26是一样的，这时$H=\frac{D-d}{2}$，代入公式（7）及（8）得：

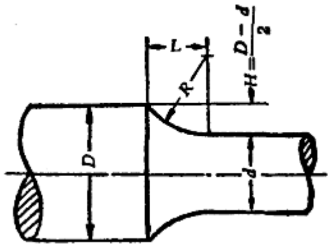

图28　軸的圓角部分。

$$R=\frac{L^2}{D-d}+\frac{D-d}{4}。\tag{10}$$

$$L=\sqrt{R(D-d)-\left(\frac{D-d}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4R(D-d)-(D-d)^2}。\tag{11}$$

〔例10〕图 28 的圓軸，大直徑$D=35$毫米，小直徑$d=25$毫米，在大小两軸間的 8 毫米长度內是以圓角連接的，求这圓角半徑$R=?$

解：用公式（10）：

$R=\frac{L^2}{D-d}+\frac{D-d}{4}=\frac{8^2}{35-25}+\frac{35-25}{4}=\frac{64}{10}+\frac{10}{4}=6.4+2.5$
$=8.9$毫米。

〔例11〕一工件的两段大小圓軸間圓角半徑$R=8$毫米，大軸直徑$D=40$毫米，小軸直徑$d=32$毫米，問这圓角部分的軸向长度$L=?$

解：用公式（11）：