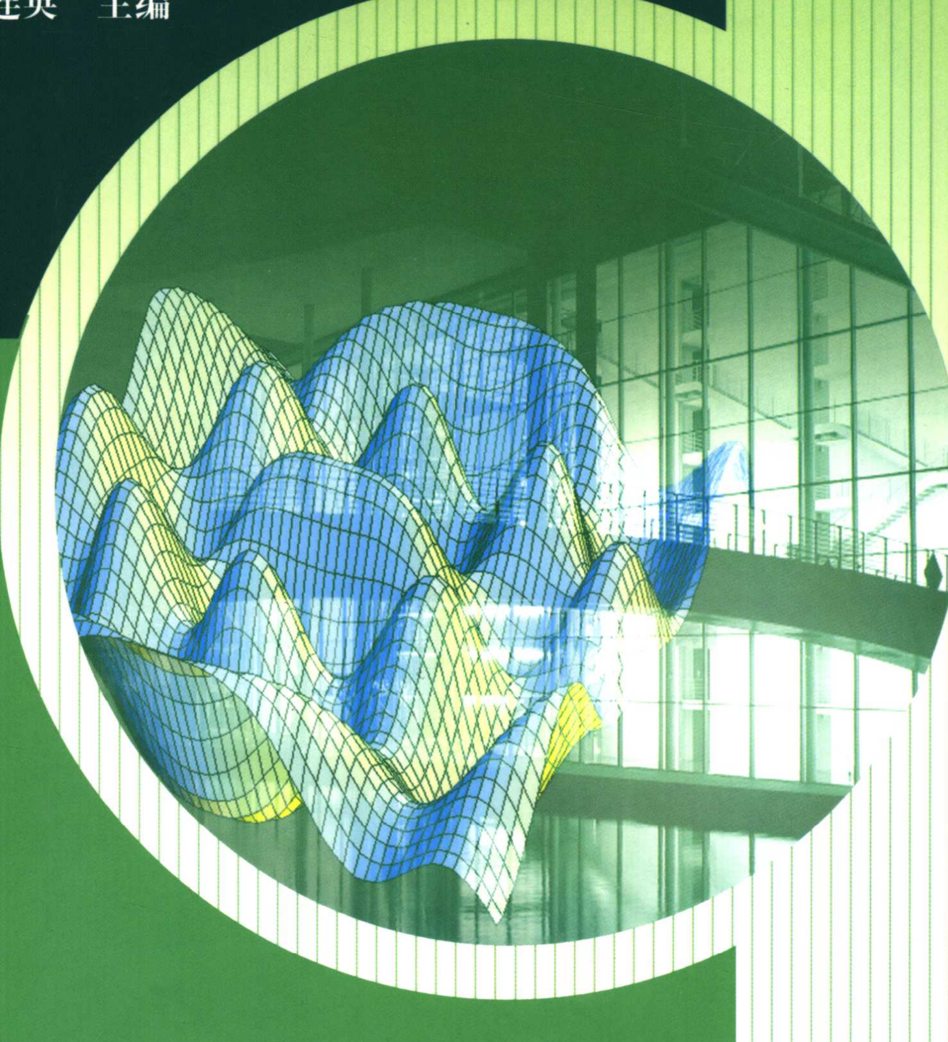
银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

工程应用数学

曹 勃 云连英 主编



高等教育出版社
Higher Education Press

银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

工程应用数学

曹　勃　云连英　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据高职院校高等数学课程的教学目标和任务，针对工科类专业的课程设置和学生的专业学习需要，以及未来的工作需要而编写的。全书主要包括矩阵代数、傅里叶级数、拉普拉斯变换、统计分析与概率计算、图与网络等内容。

本书以案例驱动的形式，突出体现专业的针对性，具有淡化数学体系和理论推导过程、与地方经济相吻合、融合数学建模思想等特点。此外还专门设计了与教材相配套的相关教学资源，为教师按系统教、学生按系统学提供了完整、周到的教学资源服务，为教学的有效性提供了多层保障。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校工科类专业的教材，也可供科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程应用数学/曹勃，云连英主编. —北京：高等教育出版社，2006.6

ISBN 7-04-019399-X

Ⅰ.工... Ⅱ.①曹...②云... Ⅲ.工程数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 043168 号

策划编辑 周先海 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹文军
版式设计 王艳红 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2006年6月第1版
印　　张	8.75	**印　　次**	2006年6月第1次印刷
字　　数	200 000	**定　　价**	11.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　19399-00

郑重声明

编写委员会成员名单

主　　任　云连英

副 主 任　汪荣伟　曹　勃

委　　员　（按姓氏笔画为序）

付艳茹　刘　密　乔树文　吴甬翔

陈祥霞　金　敬　杨建场　陶正娟

顾央青　梁其中　章文燕　黄报星

本书主编　曹　勃　云连英

编　　者　（按姓氏笔画为序）

云连英　乔树文　刘　密　曹　勃

顾央青　黄报星

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自2001年10月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要“以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路”，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能人才。这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是“银领”。从而为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变。与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。对此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了“银领工程”丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的“银领”人才的这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于固化并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。我们的这一想法和做法也得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪专门为首批“银领工程”丛书提笔作序。

我社出版的高等职业教育各专业领域技能型紧缺人才或应用型人才培养培训工程系列教材也将陆续纳入“银领工程”丛书系列。

“银领工程”丛书适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社

2006年5月

前　言

作为培养国家急需的紧缺应用型人才的高等职业技术院校，其办学目标与其他传统高校有较大的差异。由于实践教学学时比重大幅度增加，理论教学学时就必须缩减。作为工科类院校开设的“高等数学”，其学时已大幅度缩减。同时，高职院校的学生认知基础也较传统院校的学生薄弱，因此，我们根据高职院校“高等数学”教学目标和任务，以案例驱动形式，针对专业课程设置，按高职学生的数学认知特点，编写了高职《高等数学》系列教材，本教材(《工程应用数学》)是与《微积分应用基础》、《经济应用数学》组成的系列教材之一，主要是针对工科类专业学生的专业学习需要和未来的工作需要而编写的。本教材突出了以下几方面的特色：

1. 突出教学内容与高职教学需要的吻合性，突出专业针对性　教学内容和教学难度均以高职各专业的需要为基础，以学生的专业学习需要和工作需要为准绳。

2. 突出教学内容与高职学生的认知基础的吻合性　教学内容和难度均考虑到学生的数学基础较为薄弱，逻辑思维能力不够强的特点，更多地利用图形(表)、通俗的生活化语言降低教学难度，提高内容的可读性。

3. 突出培养学生的“互译”能力　整个体系都按照与工科学生专业相关的“案例”体系来编写教学内容，无论是引例还是应用案例都均以学生的专业知识或生活知识为基础，强调培养学生“将数学知识专业化和将专业知识数学化”的双向互译能力。

4. 突出与现代教育技术的吻合　从内容上在全书中融入了 MATLAB 软件的应用案例，有利于学生多维度理解、掌握数学知识点，和主教材同步设计了配套的网络课程、试题库、电子教案和学生自测学习系统，满足教学过程中的各种需要。

5. 淡化数学体系和理论推导过程　突出解决实际问题能力的培养，突出高职数学教学任务(计算能力的培养)与普通本、专科院校的数学教学目标的不同，本教材的定理和结论基本都是直接给出，或只做简单的说明(或几何解释)，强调法则和公式的应用，包括数学应用和案例应用。

6. 与高职整体培养体系相吻合　由于高职数学在整体的高职教学体系中是一种文化基础课，更是一种基础“工具”课，因此教材的编写体系、课时安排等都强调与不同专业的培养需要相适应，切实将数学变成专业课的理论工具。

7. 与地方经济相吻合　由于高职类学生的就业具有定向性和为地方服务的特点，因此在本教材中，充分注意到地方的轻工、五金、工商业发达的特色，在“案例”驱动过程中，选用的“案例”都与这些行业相关，提高了学生的定向解决问题的能力，体现了地方特色。

8. 融合数学建模思想　在每章节中，结合相关内容，引入了数学建模案例，供学有余力的学生学习，增加了书本的层次性，同时提高了学生的应用能力。

9. 教学资源的多样性　与教材相配套的教学资源系统的设计为教师按系统教、学生按系统学提供了完整、周到的教学资源服务，为教学的有效性提供了多层保障。

本教材由浙江省宁波职业技术学院、台州职业技术学院、浙江警官职业学院、东方职业技术学院等四所高职院校的老师共同编写而成，最后由曹勃老师和云连英老师统稿。由于时间和水平有限，书中难免有不妥之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2005年12月1日

目　　录

第 1 章 矩阵代数

矩阵是数学中的一个重要的概念,它被广泛地应用到现代管理科学、自然科学、工程技术等各个领域.矩阵是线性代数的主要研究对象之一.本章主要介绍矩阵的概念及运算、矩阵的初等变换及矩阵的逆、求解线性方程组,以及用 MATLAB 进行矩阵运算、求解线性方程组.

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵定义

引例 1【成绩统计】 某高职院校甲、乙两学生,第一学期的数学、英语、大学计算机文化基础课成绩如表 1.1 所示.

表 1.1

	数　学	英　语	大学计算机文化基础
学生甲	74	96	91
学生乙	82	89	75

为了简便,可以把它写成二行三列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} 74 & 96 & 91 \\ 82 & 89 & 75 \end{bmatrix}.$$

引例 2【线性方程组】 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2-x_3=0, \end{cases}$

将其未知量的系数与常数项按照原来顺序写成一个矩形数表

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

这种数表在数学上称为**矩阵**.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成一个 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 m 行 n 列矩阵,简称 $\boldsymbol{m\times n}$ **矩阵**. 其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列**元素**. 矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示. 为强调矩阵的行数 m 和列数 n,也可用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 来表示.

若把矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 中的各元素变号,则得到矩阵 $[-a_{ij}]_{m\times n}$,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,记作 $-\boldsymbol{A}$,即 $-\boldsymbol{A}=[-a_{ij}]_{m\times n}$.

案例【电路分析】 我们在中学物理课学过电路计算,下面看看矩阵在电路分析中的应用. 任何复杂的电路总是由一些基本元件或基本电路组合而成的. 只含基本元件的简单电路称之为单元网络,它们的参数矩阵是很容易写出的.

(1) 串联电阻 R 的单元网络:如图 1.1,由欧姆定律有

$$\begin{cases} U_1=U_2+RI_2, \\ I_1=I_2, \end{cases}$$

即得单元网络的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

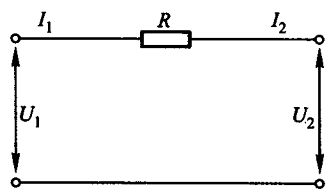


图 1.1

(2) 并联电阻 R 的单元网络:如图 1.2,由欧姆定律有

$$\begin{cases} U_1=U_2, \\ I_1=\dfrac{1}{R}U_2+I_2, \end{cases}$$

即得单元网络的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}.$$

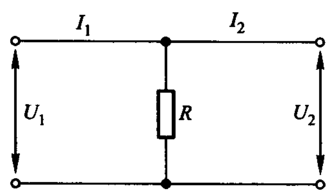


图 1.2

1.1.2 特殊的矩阵

(1) **行矩阵** 只有一行的矩阵(即 $m=1$),这时 $\boldsymbol{A}=[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$.

(2) **列矩阵** 只有一列的矩阵(即 $n=1$),这时 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

(3) **方阵** 当 $m=n$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ **阶矩阵**或 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**,即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

在 n 阶方阵中,从左上角到右下角的 n 个元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为 n 阶方阵的**主对角线元素**.

(4) **单位矩阵** 主对角线上元素是 1,其余元素全部是零的方阵,记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$. 这时

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(5) **零矩阵** 所有元素全为零的矩阵,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

例如

$$\boldsymbol{O}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{O}_{3\times 5}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 矩阵的基本运算

无论在数学上还是在实际应用中,矩阵都是一个很重要的概念,如果仅把矩阵作为一个数表,就不能充分发挥其作用. 因此,对矩阵定义一些运算就显得十分必要.

在介绍矩阵运算前,先给出两个矩阵相等的概念.

如果两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相等,记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\quad 或\quad [a_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}]_{m\times n}.$$

1.2.1 矩阵的加法

引例 1【产品产量】 某公司有甲、乙两车间生产 A,B,C 三种产品,九、十两月份的产量如表 1.2、表 1.3 所示.

表 1.2 九月份产量(台)

数量 \ 产品 / 车间	A	B	C
甲	11	64	56
乙	15	88	32

表 1.3　十月份产量(台)

数量 产品 / 车间	A	B	C
甲	25	59	44
乙	17	74	52

如果将九、十两月份的产量合起来进行分析，则有

甲车间：A 产品的产量为　$11+25=36$，　乙车间：A 产品的产量为　$15+17=32$，

B 产品的产量为　$64+59=123$，　B 产品的产量为　$88+74=162$，

C 产品的产量为　$56+44=100$，　C 产品的产量为　$32+52=84$，

列成表格即是

表 1.4　九、十两月的总产量(台)

数量 产品 / 车间	A	B	C
甲	36	123	100
乙	32	162	84

写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} 11 & 64 & 56 \\ 15 & 88 & 32 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 25 & 59 & 44 \\ 17 & 74 & 52 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 36 & 123 & 100 \\ 32 & 162 & 84 \end{bmatrix}.$$

定义 1　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$是两个 $m\times n$ 矩阵，则称

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 称

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=[a_{ij}-b_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的差，记作 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

注意　只有行数、列数分别相同的两个矩阵，才能作加法和减法运算.

容易验证，矩阵的加法满足以下运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵)：

(1) 加法交换律：　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 加法结合律：　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) 零矩阵满足：　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

(4) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

例 1 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 9 & -5 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_2\\ x_1 & 2 & x_3\\ x_2 & x_3 & 3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0 & y_1 & y_2\\ -y_1 & 0 & y_3\\ -y_2 & -y_3 & 0\end{bmatrix}$，并且 $A=B+C$，求矩阵 B 和 C.

解 由 $A=B+C$ 得

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 9 & -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_2\\ x_1 & 2 & x_3\\ x_2 & x_3 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & y_1 & y_2\\ -y_1 & 0 & y_3\\ -y_2 & -y_3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1+y_1 & x_2+y_2\\ x_1-y_1 & 2 & x_3+y_3\\ x_2-y_2 & x_3-y_3 & 3\end{bmatrix}.$$

根据矩阵相等的规定，可得下面三个方程组

$$\begin{cases}x_1+y_1=5,\\ x_1-y_1=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2+y_2=1,\\ x_2-y_2=9,\end{cases}\quad \begin{cases}x_3+y_3=-3,\\ x_3-y_3=-5.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=5,\\ y_2=-4;\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=-4,\\ y_3=1.\end{cases}$$

于是所求矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 2 & -4\\ 5 & -4 & 3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 2 & -4\\ -2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

案例 1【零配件供应】 正泰电器公司有甲、乙、丙三个配件厂，分别向Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四家装配车间供应零配件（单位：千件），若全年的供应情况用矩阵 A 表示，前三个季度的供应情况用矩阵 B 表示，即

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ} & \text{Ⅳ}\end{array}\\ \begin{bmatrix}30 & 25 & 17 & 45\\ 20 & 50 & 22 & 23\\ 60 & 20 & 20 & 30\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{甲}\\ \text{乙},\\ \text{丙}\end{array}\quad B=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ} & \text{Ⅳ}\end{array}\\ \begin{bmatrix}10 & 15 & 13 & 30\\ 0 & 40 & 16 & 17\\ 50 & 10 & 0 & 10\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{甲}\\ \text{乙},\\ \text{丙}\end{array}$$

求第四个季度的供应情况.

解 因为矩阵 A 与矩阵 B 的行数和列数分别相等，可以进行减法运算. 第四个季度的供应情况应是各种配件全年的供应量减去前三季度的供应量，即矩阵 A 减去矩阵 B，所以

$$\begin{aligned}A-B&=\begin{bmatrix}30 & 25 & 17 & 45\\ 20 & 50 & 22 & 23\\ 60 & 20 & 20 & 30\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 15 & 13 & 30\\ 0 & 40 & 16 & 17\\ 50 & 10 & 0 & 10\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}30-10 & 25-15 & 17-13 & 45-30\\ 20-0 & 50-40 & 22-16 & 23-17\\ 60-50 & 20-10 & 20-0 & 30-10\end{bmatrix}\\ &=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ} & \text{Ⅳ}\end{array}\\ \begin{bmatrix}20 & 10 & 4 & 15\\ 20 & 10 & 6 & 6\\ 10 & 10 & 20 & 20\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{甲}\\ \text{乙}.\\ \text{丙}\end{array}\end{aligned}$$

1.2.2 矩阵的数乘

引例 2【运输费用】 某钢铁公司从甲、乙、丙三个铁矿厂向Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个炼铁厂运送铁矿石，三个铁矿厂到四个炼铁厂之间的距离(单位:km)用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示如下：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ} & \text{Ⅳ} \end{array} \\ \boldsymbol{A}= & \begin{bmatrix} 120 & 170 & 80 & 90 \\ 80 & 140 & 40 & 60 \\ 130 & 190 & 90 & 100 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{乙}. \\ \text{丙} \end{array} \end{array}$$

若每吨铁矿石的运费为 2 元/千米，那么甲、乙、丙三地到四个炼铁厂之间每吨铁矿石的运费为

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{A} &= 2\begin{bmatrix} 120 & 170 & 80 & 90 \\ 80 & 140 & 40 & 60 \\ 130 & 190 & 90 & 100 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\times120 & 2\times170 & 2\times80 & 2\times90 \\ 2\times80 & 2\times140 & 2\times40 & 2\times60 \\ 2\times130 & 2\times190 & 2\times90 & 2\times100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 340 & 160 & 180 \\ 160 & 280 & 80 & 120 \\ 260 & 380 & 180 & 200 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这种运算是用数乘以矩阵的每一个元素，这就是我们要定义的数与矩阵相乘.

定义 2 设 k 是一个任意实数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，则称

$$k\boldsymbol{A}=[ka_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix},$$

为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘积**，或称之为**矩阵的数乘**.

容易验证，数与矩阵的乘法满足以下运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k,l 是实数)：

(1) 数对矩阵的分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(2) 矩阵对数的分配律：$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(3) 数与矩阵的结合律：$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

(4) 数 1 与矩阵满足：$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

例 2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

求 $2\boldsymbol{A}$.

解

$$2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2\times2 & 2\times4 & 2\times1 \\ 2\times3 & 2\times5 & 2\times(-2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 10 & -4 \end{bmatrix}.$$

案例 2【产品生产量】 利达电子公司下属甲、乙、丙三个工厂均生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四种大型电子产品，去年的生产量和今年上半年的生产量如表 1.5 所示(单位:台).

表 1.5

产量 \ 产品 / 工厂	去年				今年上半年			
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
甲	3	4	5	7	2	5	6	7
乙	4	3	8	5	3	2	7	3
丙	5	4	7	6	4	3	6	7

如果公司今年的目标生产量是去年生产量的 2 倍，试求公司今年下半年必须完成的生产量.

解 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是去年和今年上半年公司下属甲、乙、丙三个工厂生产四种产品的产量矩阵，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4&5&7\\4&3&8&5\\5&4&7&6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&5&6&7\\3&2&7&3\\4&3&6&7\end{bmatrix}.$$

若用 $\boldsymbol{X}$ 表示今年下半年的产量矩阵，则由题意可知

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A},$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\\&=2\begin{bmatrix}3&4&5&7\\4&3&8&5\\5&4&7&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&5&6&7\\3&2&7&3\\4&3&6&7\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}6&8&10&14\\8&6&16&10\\10&8&14&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&5&6&7\\3&2&7&3\\4&3&6&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&4&7\\5&4&9&7\\6&5&8&5\end{bmatrix},\end{aligned}$$

所以公司今年下半年必须完成的生产量可以列表如下：

表 1.6

产量 \ 产品 / 工厂	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
甲	4	3	4	7
乙	5	4	9	7
丙	6	5	8	5

1.2.3 矩阵的乘法

引例 3【电器销售】 某地区甲、乙、丙三家商场同时销售Ⅰ、Ⅱ两种品牌的家用电器，如果用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示各商场销售这两种家用电器的日平均销售量(单位：台)，用 $\boldsymbol{B}$ 表示两种家用电器的单位售价(单位：千元)和单位利润(单位：千元)，那么 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为

$$
A=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{I} & \text{II}\end{array}\\ \begin{bmatrix}20 & 10\\25 & 11\\18 & 9\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \text{甲}\\ \text{乙}\\ \text{丙}\end{array},\quad B=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{单价} & \text{利润}\end{array}\\ \begin{bmatrix}3.5 & 0.8\\5 & 1.2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \text{I}\\ \text{II}\end{array},
$$

若用矩阵$C=[c_{ij}]_{3\times 2}$表示这三家商场销售两种家用电器的每日总收入和总利润，那么C中的元素分别为

$$
\text{总收入}\begin{cases}c_{11}=20\times 3.5+10\times 5=120,\\ c_{21}=25\times 3.5+11\times 5=142.5,\\ c_{31}=18\times 3.5+9\times 5=108,\end{cases}
$$

$$
\text{总利润}\begin{cases}c_{12}=20\times 0.8+10\times 1.2=28,\\ c_{22}=25\times 0.8+11\times 1.2=33.2,\\ c_{32}=18\times 0.8+9\times 1.2=25.2,\end{cases}
$$

即

$$
C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\\c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\times 3.5+10\times 5 & 20\times 0.8+10\times 1.2\\25\times 3.5+11\times 5 & 25\times 0.8+11\times 1.2\\18\times 3.5+9\times 5 & 18\times 0.8+9\times 1.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}120 & 28\\142.5 & 33.2\\108 & 25.2\end{bmatrix},
$$

其中，矩阵C中的第i行第j列的元素是矩阵A第i行元素与矩阵B第j列对应元素的乘积之和.

定义 3 设A是一个$m\times s$矩阵，B是一个$s\times n$矩阵，即

$$
A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{bmatrix},
$$

则称$m\times n$矩阵$C=[c_{ij}]$为矩阵A与B的**乘积**，记作$C=AB$，其中

$$
c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{S}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),
$$

注意 （1）只有当左矩阵A的列数等于右矩阵B的行数时，A，B才能作乘法运算$C=AB$；

（2）两个矩阵的乘积$C=AB$亦是矩阵，它的行数等于左矩阵A的行数，它的列数等于右矩阵B的列数；

（3）乘积矩阵$C=AB$中的第i行第j列的元素等于A的第i行与B的第j列对应元素的乘积之和.

容易验证，矩阵乘法满足下列运算律：

（1）乘法结合律：$(AB)C=A(BC)$；

（2）左乘分配律：$A(B+C)=AB+AC$；

（3）右乘分配律：$(B+C)A=BA+CA$；