高中数学解题新思路

GZSXJTXSL

编　著
苏贤昌
赵远英　荣延俊

华中师范大学出版社

高中数学解题新思路

编　著　苏贤昌　赵远英　荣延俊
瞿兆君　谢银发　余晓敏

★ 传授创新思维诀窍
★ 例析精典颇有新招
★ 适应高考冲刺需要
★ 知识深化竞赛通道

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题新思路/苏贤昌 编著.
—武汉:华中师范大学出版社,2003.8
ISBN 7-5622-2771-3/G·1443

Ⅰ.数… Ⅱ.苏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 061499 号

高中数学解题新思路
© 苏贤昌 编著

华中师范大学出版社出版发行
(武昌桂子山 邮编:430079 电话:027-67861312)
新华书店湖北发行所经销 石首市印刷厂印刷

责任编辑:吴小岸 封面设计:新视点
责任校对:张 忠 督 印:方汉江

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:12.25 字数:300 千字
版次:2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷
印数:1-16000 定价:15.80 元

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

内 容 提 要

面对一个数学问题如何探索其解题思路？如何从迷离混沌中拨乱寻径找出最佳解法？本书以夹叙夹议的手法，通过丰富的实例分析、研究，总结了一套科学探求解题思路的方法．介绍了如何审题、如何寻求条件和结论之间的必然的逻辑关系、如何联想有关的定义和定理和发现一题多解．书中还对一些例题作了评注，以鉴别解法之优劣和繁简．为了便于读者自学，在每节之后还附有练习，并在书末都给出了解答．

本书对高中学生学习数学思想和方法，研究、探讨数学解题方法有较强的实用性和指导性，也可供数学教师阅读和参考．

前　言

注重考查学生的数学基本能力和综合应用数学能力是现行高考《考试说明》所强调的，这已日益引起人们的关注．由于能力是在知识的教学和技能的训练过程中，通过数学思想的形成和数学方法的掌握才能得到培养和发展．也就是说能力的培养最有效的办法是通过解题来实现的．解题是一种创造性的活动．

要提高学生综合应用数学知识解决问题的能力、培养学生创新意识，首先要夯实基础，掌握好常见的数学思想方法；其次要具备一些解题的基本技能技巧和寻求解题思路的方法．不然的话，在解题时是难以找到好的解题途径巧妙地将问题解决的．

然而，对一个具体的数学问题怎样寻求其解题思路呢？这是我们学习数学时首先面对的一个问题．有些学生不会审题，不熟悉解题的基本程序，在解题过程中常常出现偷换论题、循环论证等逻辑错误；有些学生对较为简单的题目尚能依样画瓢，一旦见到稍有知识综合性的命题就乱碰乱撞，解题无一定计划和方向；尤其是遇到像近几年高考试题中的压轴题更是束手无策．究其实：一是学生平常习惯于简单模仿，草率从事，往往是解一题，甩一题，忽视对解题经验的积累，对解题规律的总结．二是教师一般满足于详尽无遗地讲述解题过程，对于解题思路的探索，缺少精辟透彻的分析、研究．本人正因有这样的感受，才对如何深刻地理解题意，如何挖掘隐含条件，纵横联想，寻求解题思路这诸多问题有所重视和研究，从而产生了编写本书的念头．

本书以激发创新思维、突出素质教育、培养解题技能为宗旨，从

精心审题、纵横联想、变更命题、图形思维、数学计算、逆向思维、函数分析、向量分析、数学归纳法和综合例题选讲等十个方面，对如何寻求解题思路进行了深入细致的研究、探讨．总结了一套科学探求解题思路的方法．在编写时既注重了基础知识的学习，又注意到了综合应用数学能力和创新意识的培养．所选例题、习题精当，并选有一定数量的近几年来高考数学试题和竞赛题．对例题的学习，着重于解题思路的探索和对命题结构的分析、研究，切合学生的学习所需，促使学生学会从迷离混沌中拨乱寻径找出正确解题思路．所给出的解答新颖别致，思维方法独到，自成体系，突出了“知识转化为能力”的特色，体现出了研究性和创新性的特点．对于有些例题解答之后还作有评注，以求得对题目有更全面、更深刻的理解和创新，揭示其规律性的联系．从而收到解一题，带一片的效果，更好地发挥例题的普遍“迁移”的作用．

笔者花了近两年的时间编撰此书．当书稿完成之后，又征求了赵远英、荣延俊、瞿兆君、谢银发、余晓敏等同志的意见，并共同进行校对、补充编写．在此期间并听取了杨昆龙、袁全芳等同志的许多宝贵建议，特此谨致诚挚的感谢．限于笔者水平，错误及疏漏之处在所难免，恳切希望读者批评指正．

苏贤昌　荣延俊

2003 年 7 月

目　　录

第一章　研究解题思路的意义

我们每解一道题，事先总是要把题目看上几遍，考查题型是几何题还是代数题、是证明（求解）题还是探索型题；接着就是拟定解题的方案，确定解法；再就是如何实现这种方案，需用哪些概念和定理，哪种方案最优；最后是回顾验核，看看解题的思路是怎样发现的、所解的题能否推广和创新. 这就是解数学题的四个基本程序（或四个环节）——审题、探索、表述、回顾.

在解题的四个环节中，审题、探索和回顾是最重要的三个环节. 因为它们是分析问题、研究问题、探索解题思路的具体过程，是形成解题能力和探究能力的必要阶段. 每个数学命题的已知与未知相互之间本来就存在着必然的联系. 解答数学问题，就是根据命题中所提供的信息，结合已学过的数学知识与已有的经验进行分析、猜想，加工整理，不断地变更命题，最终发现这种联系. 并遵循数学思维的要求把这些联系条理化，完善化. 对一个数学问题进行研究、分析、猜测或变更其形式就是数学思维的具体表现形式，也是数学发展的主要动力. 正确的解题思路的形成，就是数学思维的结晶. 实践告诉我们，只有掌握了常见数学思想方法和常规的解题思路与技巧，才能提高解题的速度；才能保证解答的正确性；才能使解题的方法具有探索性、研究性、创见性. 美国数学教育家波利亚曾说过："掌握数学意味着什么呢？这就是说善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些独立思考、见解独到和有发明创新的题."他还指出："一个真正想把数学作为他终身事业的学生必须学会论证、推理，这是他的专业、也是这门学科的特殊标志. 然而，为了取得真正

的成就，他还必须学会合情推理，即数学猜想. 数学猜想是一种直觉的思维，利用它不仅可以预测解决现有问题的思路，而且还可以提出有价值的新问题."因此，学会数学思维，研究解题思路对促进创新思维的形成和发展，促进知识的理解和掌握，丰富一题多解的解题经验等几方面都有着非常重要的作用.

1. 研究解题思路可以促进创新思维的发展

研究数学解题思路，就是运用数学的思想方法探求命题的条件与结论之间的内在联系. 尤其是对一些貌似新奇的问题，抓住题目提供的某个信息进行研究，略施小技，可能马上会化归到熟悉的问题类中去，使我们较快地发现解题的途径. 有时甚至是奇离巧合，曲径通幽，见解独到而且具有创造性. 因此，注重解题思路的研究，不仅能锻炼我们解题的基本技能，而且还可以促进创新思维的形成和发展，提高全面分析问题和解决问题的能力. 同时还能培养学生对数学知识的兴趣和探求精神.

例 1 设椭圆 $E:3x^2+4y^2=48$ 的右焦点为 F，若点 M 在椭圆 E 上，$A(-2,\sqrt{3})$，且 $|AM|+2|FM|$ 取最小值时，则点 M 的坐标是______.

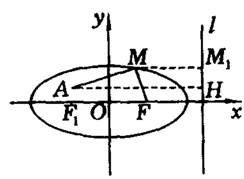

图 1-1

分析 1 对于这一解析几何最值问题的求解，开始我们总是考虑设点 M 的坐标为 (x, y)，如图 1-1.

则 $2|FM|+|AM|=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-\sqrt{3})^2}$

$\Rightarrow$? 此处，思维显然受阻. 因此，再也不想继续推演了.

分析 2 若从极坐标或参数方程的角度出发来考查呢？

如设 $x=4\cos\alpha$，$y=2\sqrt{3}\sin\alpha$，于是，有 $2|FM|+|AM|=$ $2\sqrt{(4\cos\alpha-2)^2+12\sin^2\alpha}+\sqrt{(4\cos\alpha+2)^2+(2\sqrt{3}\sin\alpha-\sqrt{3})^2}$. 此

时,仍然是难以计算下去.

分析 3 若注意到 $|AM|+2|FM|$ 这一式子中的有关数据 2 和字母 F,M,A 的特征,不难发现到 $|FM|$ 是椭圆的焦半径,而 2 是椭圆的离心率 e 的倒数,由此,我们的思维将会迁移到椭圆的第二定义上来.于是可发现解法.

解 设 $M_1M\perp$ 准线 l 于 M_1,则由 $\dfrac{|FM|}{|MM_1|}=e=\dfrac{1}{2}$ 得:

$2|FM|=|MM_1|$,故 $|AM|+2|FM_1|=|AM|+|MM_1|$.

又 $\because$ $|AM|+|MM_1|$ 的最小值为 A 点到准线的距离 $|AH|$,如图 1-1,此时点 M 的纵坐标为 $y=\sqrt{3}$,代入椭圆方程得,$x=2\sqrt{3}$.

即所求点 M 的坐标为 $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$.

点评 由此可见,认真审查有关数据和相关概念间的关系,最易产生创造思维的火花,如分析 3 就是通过推敲数据 2,联想到它是离心率的倒数,从而发现解法.可以这样说:解题思路的发现正是从这一联想所得到的.

例 2 已知 x,y 和常数 a,b,m,n 都是实数,设 $ax+by=0$,$m^2+n^2=a^2+b^2=1$,且 $am+bn\neq 0$,求多项式 $x^2+y^2-2mx-2ny+1$ 的最小值.

分析 本题所涉及到的字母较多,且相关条件盘根错节.从条件 a,b,m,n 都是实常数可预测到:多项式的最小值可能与这四个常数有关.当我们注意到条件 $am+bn\neq 0$,可知实数对 (m,n) 不满足方程 $ax+by=0$.且 $m^2+n^2=1$,故可考虑集项,将所求的多项式的最小值可转化成求函数:

$$f=x^2+y^2-2mx-2ny+1=(x-m)^2+(y-n)^2$$

的最小值.于是,我们的思维便迁移到联想求满足题设条件的动点 $M(x,y)$ 与定点 $N(m,n)$ 距离的平方的最小值.

当注意到 $l:ax+by=0$ 是过原点的定直线时,不难发现本问

题等价于：在直线 l 上求一点 $M(x,y)$，使它与定点 $N(m,n)$ 的连线最短.

又由于点 $N(m,n)$ 的坐标满足条件：$m^2+n^2=1$，即点 N 是单位圆上的一定点.

而 $\quad f=(x-m)^2+(y-n)^2 \qquad ㊍$

可视为以点 $N(m,n)$ 为圆心的圆系方程.

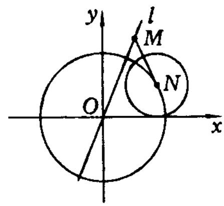

图 1-2

显然，当直线 l 与圆㊍相切时，点 N 到直线的距离最短.

故所求最小值就是：点 $N(m,n)$ 到直线 l 距离的平方.

由此，不难求得其最小值为 $(am+bn)^2$.

解　略.

点评　*从例 2 解法思路的探求过程可知，考查条件的统一，将命题变更、化归成几何问题来研究，发现了多项式可表示为以点 $N(m,n)$ 为圆心的圆系，且 f 是在直线 $ax+by=0$ 上找一点 $M(x,y)$，使它到定点 $N(m,n)$ 距离的平方最小的巧妙解法. 这种变更命题的思想是寻求解题思路时常用的一种基本方法.*

例 3　已知椭圆 $E:5x^2+9y^2=45$ 内一点 $A(1,1)$，F_1 是 E 的左焦点，P 是 E 上的一动点，则 $|PF_1|+|PA|$ 的最小值是(　　).

(A) $9-\sqrt{2}$　　(B) $6-\sqrt{2}$　　(C) $6+\sqrt{2}$　　(D) $3+\sqrt{3}$

分析 1　本题虽是个客观性的试题，但做起来确实不容易，因为入手时很易出错，而本题看上去与例 1 的题型相类似，但 $|PF_1|$ 的系数不是离心率 e 的倒数，无法借用例 1 的思想求解，故就此停步.

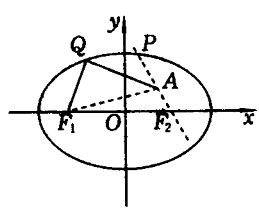

图 1-3

分析 2　若从椭圆的参数方程入

手.设 $P(3\cos\alpha,\sqrt{5}\sin\alpha)$,如图 1-3,又 $\because F_1(-2,0)$,$A(1,1)$,

$$\therefore\quad |PF_1|+|PA|$$
$$=\sqrt{(3\cos\alpha+2)^2+(\sqrt{5}\sin\alpha)^2}+\sqrt{(3\cos\alpha-1)^2+(\sqrt{5}\sin\alpha-1)^2}$$
$$=\sqrt{4\cos^2\alpha+12\cos\alpha+9}+\sqrt{4\cos^2\alpha-6\cos\alpha-2\sqrt{5}\sin\alpha+7}=?$$

显然这里再也不愿算下去了.因此,思维再次受阻.

分析 3 通过两次失败,我们只有再来看看条件,在例 1 中有 F 联想到相应的准线,其主要原因是发现了离心率 e,而这里无 e,还有哪些条件未想到呢?这样一来,迫使我们的思维迁移到第二个焦点 F_2,从图形中易发现$\triangle F_1F_2A$ 的三边长分别为$\sqrt{10}$,$\sqrt{2}$和 4.又因为 $2a=6$,结合四个备选支来看,解题方向大致有了点眉目.当观察到 6 与$\sqrt{2}$的几何意义,不难联想到:在直线上求一点 P,使它到两定点的距离之和最小的情形.因而,作对称点或延长线段的联想将会油然而生.由于这里有 $|F_2A|=\sqrt{2}$,故考虑延长线段 F_2A 是理所当然的,因而解题思路就此产生.

解 延长 F_2A 交椭圆于 P,则 P 点为所求的点,事实上,

$\because |PF_1|+|PF_2|=2a=6$,

$\therefore |PF_1|+|PA|+\sqrt{2}=6\Rightarrow|PF_1|+|PA|=6-\sqrt{2}$.

又设 Q 是椭圆上异于 P 的一点,则

$$|QF_1|+|QA|+|AF_2|>|QF_1|+|QF_2|=6,$$

从而 $|QF_1|+|QA|+\sqrt{2}>6$,

即 $|QF_1|+|QA|>|PF_1|+|PA|=6-\sqrt{2}$.

由此可得,选(B).

点评 本例实际上是椭圆的光学性质的一个应用.若学了椭圆的光学性质,本题的解将垂手可得.从解法中还可额外获得:$|F_2A|$的反向延长线与椭圆的交点是 $|PA|+|PF_1|$ 的最大值 $6+\sqrt{2}$的点.

例 4 设函数 $f(x)=\log_b\dfrac{x^2-2x+2}{1+2ax}$ $(b>0,b\neq 1)$.

(1) 求 $f(x)$的定义域;

(2) 当 $b>1$ 时,求使 $f(x)>0$ 的所有 x 的值.

解 (1) 由题意得$\dfrac{x^2-2x+2}{1+2ax}>0$,

$\because$ $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$, $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立,

$\therefore$ 应有 $1+2ax>0$,由此可得函数 $f(x)$的定义域为:

当 $a>0$ 时, $x\in\left\{x\,\middle|\,x>-\dfrac{1}{2a}\right\}$;

当 $a<0$ 时, $x\in\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{2a}\right\}$;

当 $a=0$ 时, $x\in\mathbf{R}$.

(2) $\because$ $b>1$,由 $f(x)>0$ 得,

$$x^2-2x+2>1+2ax,$$

令 $g(x)=x^2-2(1+a)x+1$.

则 $\Delta=4a(a+2)$. 于是有:

当 $\Delta<0$ 时,即 $-2<a<0$ 时, $-1<a+1<1$.

由此,不难得知:

此时函数 $f(x)$所对应的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{2a}\right\}$的子集.

而 $g(x)=x^2-2(1+a)x+1$ 在此区间上是一段抛物线弧,且 $g(x)=x^2-2(1+a)x+1>0$ 在此区间上恒成立.

$\therefore$ 当 $-2<a<0$ 时, x 的取值为$\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{2a}\right\}$.

当 $\Delta=0$ 时, $a=0$,或 $a=-2$,

当 $a=0$ 时,由 $f(x)>0$ 得

$$g(x)=(x-1)^2>0, \therefore\ x\neq 1.$$

又因此时函数所对应的定义域为 $x\in\mathbf{R}$,

所以,当 $a=0$ 时, x 的取值为$\{x\mid x\neq 1, x\in\mathbf{R}\}$.

当 $a=-2$ 时，由 $f(x)>0$ 得

$$g(x)=(x+1)^2>0 \Rightarrow x\neq -1,$$

又此时函数 $f(x)$ 所对应的定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x<-\frac{1}{2a}=\frac{1}{4}\right\}$.

所以当 $a=-2$ 时，x 的取值为 $\left\{x \,\middle|\, x\neq -1,\text{且 } x<\frac{1}{4}\right\}$.

当 $\Delta>0$ 时，即 $a<-2$ 或 $a>0$ 时，

方程 $x^2-2(1+a)x+1=0$ 有两个不等的实根 x_1,x_2.

$$x_1=1+a-\sqrt{a^2+2a},\quad x_2=1+a+\sqrt{a^2+2a},$$

如图 1-4，由此可得：

当 $a<-2$ 时，函数对应的定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x<-\frac{1}{2a}\right\}$,

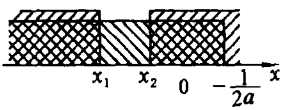

图 1-4

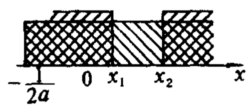

图 1-5

又∵ $x_2=1+a+\sqrt{a^2+2a}$

$$=\frac{1}{1+a-\sqrt{a^2+2a}}<0<-\frac{1}{2a},$$

∴ 当 $a<-2$ 时，x 的取值为：

$$\left\{x \,\middle|\, x<1+a-\sqrt{a^2+2a}\text{ 或 }1+a+\sqrt{a^2+2a}<x<-\frac{1}{2a}\right\}.$$

当 $a>0$ 时，函数对应的定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x>-\frac{1}{2a}\right\}$，如图 1-5.

又 ∵ $x_1=1+a-\sqrt{a^2+2a}$

$$=\frac{1}{1+a+\sqrt{a^2+2a}}>0>-\frac{1}{2a},$$

∴ 当 $a>0$ 时，x 的取值为：

$$\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2a}<x<1+a-\sqrt{a^2+2a}\text{ 或 }1+a+\sqrt{a^2+2a}<x\right\}.$$

综上可得，$f(x)>0$ 的解集为：

当 $-2<a<0$ 时，$x\in\left\{x\left|x<-\frac{1}{2a}\right.\right\}$；

当 $a>0$ 时，

$$x\in\left\{x\left|-\frac{1}{2a}<x<1+a-\sqrt{a^2+2a}\text{或}x>1+a+\sqrt{a^2+2a}\right.\right\};$$

当 $a=0$ 时，$x\in\{x\in\mathbf{R},x\neq1\}$；

当 $a<-2$ 时，

$$x\in\left\{x\left|x<1+a-\sqrt{a^2+2a}\text{或}1+a+\sqrt{a^2+2a}<x<-\frac{1}{2a}\right.\right\};$$

当 $a=-2$ 时，$x\in\left\{x\left|x<\frac{1}{4},\text{且 }x\neq-1\right.\right\}$.

点评 不难得知：对于第(2)问的求解，应时时注意定义域. 因为对于不同的 a，所对应的定义域不同，从而解集也不同. 另外，在写解集时，要重视用图作向导. 如当 $a<-2$ 时，为什么只需考虑大根就行了；在 $a>0$ 时，为什么只需考虑小根就行了. 所有这些，只有借助数轴来研究，才能很快地作出这种判断，否则是难以较快地获得正确的解答的.

2. 研究解题思路可以促进对知识的理解和探究

对于一般数学问题的求解，往往要先充分利用题设的条件及已掌握了的知识(性质、定理、法则)来研究、探讨、推出所要求的结果. 因此，在寻求解题思路的过程中，通过运用已有的数学知识、数学思想方法对问题进行审题、研究，不仅能加深我们对一些重要的性质、公式的进一步认识，而且还能促进我们的探究能力，促进我们对数学知识的理解、对数学思维方法的掌握，使我们的学习处处都充满着猜想性和探究性.

例 1 平面上任给五个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离的比记作 λ，求证：$\lambda\geqslant2\sin54^\circ$.

分析 1. 由于最短的距离总要比它们的平均值小，而最大距

离总要比它们的平均值大.当五点共线时,有

$$\lambda=\frac{AE}{\min\{AB,BC,CD,DE\}}\geqslant\frac{AE}{\frac{1}{4}AE}=4.$$

当只有三点共线时呢?对此,我们再回到五点共线时的情形中来考查.4从何来?当五点共线时,五点分线段 AE 成四段,从而得到4.当三点共线时,三点将线段 AC 分成两段.于是有

$$\lambda=\frac{AC}{\min\{AB,BC\}}\geqslant\frac{AC}{\frac{1}{2}AC}=2.$$

2. 反思,当有三点共线时,则 $\lambda\geqslant2$,对于这一点还有新的价值吗?若任意三点不共线呢?还能降低一点吗?……

3. 由此可见,只需对任三点不共线的情况再作讨论.

4. 当三点不共线时,还是不知道去向,无从下手.这样还需要进一步研究.由此我们只有再回到五点的情形中去考虑.

现对其特殊的情形即正五边形进行讨论,希望从中找出研究的突破口.由于线段长度是一无所知,但正五边形中每一内角都等于108°,因此,我们只有从角的关系上来研究、探索、寻求其突破口了.如图1-6.由正弦定理得

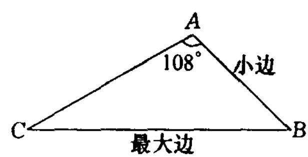

图 1-6

$$\lambda=\frac{BC}{AB}=\frac{\sin108^\circ}{\sin36^\circ}=\frac{2\sin54^\circ\cos54^\circ}{\cos54^\circ}=2\sin54^\circ.$$

这对证明来说,可算是有了点眉目.我们做的工作还有何价值?我们要求的 λ 总是希望要比它大一点为好.不难想象到当拉长 BC 或增大角 A,如图1-6,一旦出现的三角形中,有一个角大于108°时,则问题得证.

5. 猜想:若五点中有不共线的三点 A,B,C,使得