聂清香　李淑风　朱俊孔　编著

力学题解方法

Lixue tijie fangfa

吉林大学出版社

力学题解方法

聂清香　李淑风　朱俊孔　编著

吉林大学出版社

力学题解方法/聂清香主编．—长春：吉林大学出版社，2005.9

ISBN 7-5601-3321-5

Ⅰ．力…

Ⅱ．聂…

Ⅲ．力学—解题

Ⅳ．03—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 110254 号

力学题解方法

责任编辑、责任校对：张显吉　　封面设计：午云

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行

（长春市明德路 421 号）　　济南景升印业有限公司印刷

开本：850×1168 毫米　1/32　　2005 年 9 月第 1 版

印张：9.5　　2005 年 9 月第 1 次印刷

字数：226 千字

ISBN7－5601－3321－5　　定价：21.00 元

前　言

学过力学的学生都有一个共同的感觉：力学难学，题难解．的确，与其他学科相比，力学过程曲折复杂，题目千变万化，往往使初学者感到无章可循，无从下手．他们需要一本习题指导书．力学开设在大学低年级，这时正是学生的学习和思维方式由中学向大学开始转变的时期，一本合适的力学参考书对于他们独立自主的课后学习，对于他们尽早地完成这一转变是非常有益的．为此，我们编写了这本解题方法指导的书．

本书的一个重要特点是，博采众家之长．它几乎囊括了目前全国众多优秀力学教材和教学参考书中的精华，书中大量的习题都是从这些书中选取的．

本书的另一个特点是，注重层次教学．一部分习题是基本的，与各部分的基本概念和规律相配合；另一部分是比较综合的，旨在训练学生的综合运用能力．题目的顺序都是先易后难，学生可根据自己的情况选择．

本书的重点是阐述力学的基本方法，因不同的研究对象，如质点、质点组和刚体等，应用不同的解题方法；不同的运动形式，需解决不同的问题，因此，本书的章节按

研究对象和运动形式划分，而不是按力学规律. 全书每章都包括三大部分内容. 第一部分概括总结基本概念、基本规律，详细阐述所需解决的基本问题和解题的基本方法. 并配有一些综合性的例题. 第二部分是精析习题，全书157个，每章十几到二十几个不等，目的是进一步给学生做出解题示范. 第三部分是综合练习，全书列出170个练习题，书后附有答案及方法提示. 我们期望学生首先自己独立做第二部分习题，做完后对照本书解答找出差距，或发现自己更高明的解法；每章结束后，再通过综合练习进一步巩固提高. 因此，本书使用的基础，是建立在学生积极、主动、独立自主的学习愿望之上的.

作为一本教学参考书，本书不仅可用于密切配合大学物理专业的力学教学，而且对于自学自考、考研复习及中学教师进修提高等都会有所帮助.

书中大部分例题是作者自编或改编，习题则主要选自书后所列参考书目，个别题目有所改动. 在此，对于参考这些著作的作者表示感谢；对于给初稿提出修改意见的我的2004级学生表示感谢. 由于作者水平所限，错讹纰漏难免，诚恳希望专家和读者指正.

聂清香

2005年5月于山东师范大学

目　　录

第1章 质点运动学

1.1 内容概述

本章的主要知识点就是如何描述质点的运动.质点的运动描述包括如何描述质点的位置、位置的变化、运动的状态(快慢和方向)以及运动状态的变化等.为此,在质点运动学中引入了位置矢量、位移、速度和加速度等重要概念.本章的重点在于理解速度和加速度的定义,并学会在各种坐标系中计算速度和加速度.

本章的重要思想方法是"微积分",要学会由加速度求速度再求运动学方程的一般方法.

1.1.1 速度和加速度

1.定义

用 $\boldsymbol{r}$ 表示质点在任一时刻的位置矢量,则速度和加速度的定义为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1a}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1b}$$

注意:速度和加速度的定义式都是矢量式,应深刻理解其物理意义.矢量表示式虽然简洁明快,但具体计算时往往需要化为标量式,这就需要运用坐标系中速度和加速度的计算方法,下面介绍三种常用的坐标系,可视具体问题灵活选用.

2.计算

1)在直角坐标系中,因 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$,当坐标方向固定不变时,单位矢量 $\hat{\boldsymbol{i}},\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\boldsymbol{k}}$ 为常量,所以由(1.1)式得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.2a}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.2b}$$

其分量表示为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1.3a}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.3b}$$

只要知道了质点的运动学方程,即坐标与时间的关系

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1.4}$$

就可以通过求导数计算出各速度分量和加速度分量.

2)在自然坐标系中,用 $\hat{\boldsymbol{\tau}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{b}}(\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}})$表示沿切向、法向和副法线方向的单位矢量,由 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}s\hat{\boldsymbol{\tau}}$, $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{n}}$, $\mathrm{d}s = \rho\mathrm{d}\theta$ 可推出

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\tau}} = v_\tau\hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{1.5a}$$

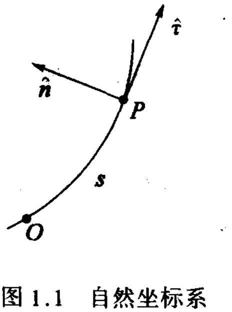

图 1.1 自然坐标系

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\tau}}+v_\tau\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\tau}}+\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{1.5b}$$

其分量表示为

$$v_\tau=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad v_n=0,\quad v_b=0 \tag{1.6a}$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2},\quad a_n=\frac{v^2}{\rho},\quad a_b=0 \tag{1.6b}$$

这里 $v=|v_\tau|$是表示速率，ρ 是轨道的曲率半径．对于已知质点运动轨道的情况下，采用自然坐标系（又称内禀坐标系）比较方便．只要知道用弧坐标表示的运动学方程

$$s=s(t) \tag{1.7}$$

就可以套用(1.6)式求出速度 v_τ，切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n．

3）在极坐标系中，令 $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ 分别表示沿径向和横向的单位矢量（见图 1.2），由 $\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{e}}_r$，$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{e}}_r=\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$，$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta=-\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{e}}_r$ 可证明

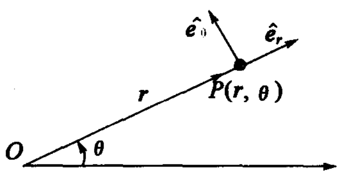

图 1.2　极坐标系

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{1.8a}$$

$$\boldsymbol{a}=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{\boldsymbol{e}}_r+\left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{1.8b}$$

用 $\dot{q}$ 和 $\ddot{q}$ 分别表示$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$，则(1.8)式的分量式可写为

$$v_r=\dot{r},\quad v_\theta=r\dot{\theta} \tag{1.9a}$$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} \tag{1.9b}$$

只要知道了极坐标中的运动学方程

$$r=r(t),\quad \theta=\theta(t) \tag{1.10}$$

就可以套用(1.9)式求出径向速度 v_r，横向速度 v_θ，径向加速度 a_r

和横向加速度 a_θ.

1.1.2 几种典型的运动

1. 匀加速直线运动

令直角坐标中的速度分量 $v_y=0$ 和 $v_z=0$,质点的运动就成为沿 x 方向的直线运动;令自然坐标中的曲率半径 $\rho\to\infty$,质点的运动也成为直线运动.同样,直线运动若用极坐标表示,可令 $\dot{\theta}=0$.为方便,我们习惯沿运动方向建立一维坐标 x,质点的位置、速度和加速度都不再用矢量表示,而是标量 x、v_x 和 a_x 表示,其方向由正负号来判断.

对于匀加速直线运动,由于 $a_x=$ 常数,积分可得到中学学过的三个运动学方程:

$$v_x=v_0+a_xt$$

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_xt^2$$

$${v_x}^2-{v_0}^2=2ax(x-x_0)$$

注意:这三个公式可以直接应用,但是只能在匀加速的条件下用,千万不能推广到一般问题,更不能当作运动学的基本方程.

2. 匀加速率曲线运动

由式(1.6)看出,当曲线运动中的切向加速度 $a_\tau=$ 常数时,积分可得到

$$v_\tau=v_0+a_\tau t$$

$$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}a_\tau t^2$$

$$v_\tau^2-v_0^2=2a_\tau(s-s_0)$$

这三个方程与匀加速直线运动的三个方程形式上完全相同,同样可以直接应用.

3. 抛体运动

抛体运动一般用直角坐标,其基本方程为

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y} - gt$$

$$x = v_{0x}t, \quad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

4.圆周运动

圆周运动一般采用自然坐标,除了可用上述的线量 s, v_τ, a_τ 和 a_n 描述外,还可以用角坐标 θ,角速度 $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 和角加速 $\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 描述.角量和线量间的关系为

$$\Delta s = R\Delta\theta \tag{1.11a}$$

$$v_\tau = R\omega \tag{1.11b}$$

$$a_\tau = R\alpha, \quad a_n = R\omega^2 \tag{1.11c}$$

1.1.3 运动学中的积分问题

运动学的习题主要包括两类问题:一类是由运动学方程求速度和加速度,这是微分问题,比较简单;另一类是由加速度求速度,再求运动学方程(或位移),这是积分问题,这类问题对于初学者来说是个难点,应该由易到难,循序渐进.下面以直线运动为例说明解决第二类问题的基本方法.

根据 $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$,由 a_x 求 v_x 过程实际上是解一个微分方程的过程.解这种简单的微分方程的重要方法是“分离变量法”,就是想办法将方程化为只含有两个变量的形式,然后将变量分离开,分别置于等号的两边,再对两边分别积分.同样由 $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 求运动学方程也是如此.下面是几种常见的情况.

1.加速度是时间的函数,即 $a_x = a_x(t)$.

例 1.1 已知质点沿 x 方向运动,其加速度 $a_x = bt$,且 $t = 0$

时，$v_x=v_0$，$x=A$，求任一时刻质点的速度和运动学方程.

解 由 $a_x=bt$ 和 $a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$得

$$bt=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

分离变量 t 和 v_x 并两边积分

$$\int_{v_0}^{v_x}\mathrm{d}v_x=\int_0^t bt\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

得到 v_x 与时间的关系为

$$v_x=v_0+\frac{1}{2}bt^2 \tag{3}$$

再由 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$得

$$v_0+\frac{1}{2}bt^2=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

分离变量 t 和 x，并积分

$$\int_A^x\mathrm{d}x=\int_0^t\left(v_0+\frac{1}{2}bt^2\right)\mathrm{d}t \tag{5}$$

得坐标与时间的关系，即运动学方程为

$$x=A+v_0t+\frac{1}{6}bt^3 \tag{6}$$

【说明】本例的关键在两点：1)运用加速度和速度的定义；2)分离变量积分，本例(1)式微分方程中仅含有变量 t 和 v_x，(4)式微分方程只含变量 t 和 x，因此本例分离变量的方法是最简单的.

2.加速度是速度的函数，即 $a_x=a_x(v_x)$.

例 1.2 已知质点沿 x 方向运动，其加速度 $a_x=-kv_x$，且 $t=0$ 时 $v_x=v_0$，$x=0$，求任一时刻的速度和运动学方程.

解 上例练习了定积分，本例试用不定积分.由

$$-kv_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

分离变量 t 和 v_x，并积分

$$\int \frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\int k\mathrm{d}t \tag{2}$$

得

$$\ln v_x = -kt + C_1 \tag{3}$$

由 $t=0$ 时，$v_x = v_0$ 得，积分常数 $C_1 = \ln v_0$，因此得

$$\ln \frac{v_x}{v_0} = -kt \tag{4}$$

即速度与时间关系为

$$v_x = v_0 \mathrm{e}^{-kt} \tag{5}$$

再将上式代入 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得

$$v_0 e^{-kt} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

分离变量 t 和 x，并积分

$$\int \mathrm{d}x = \int v_0 \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t \tag{7}$$

得

$$x = \frac{-v_0}{k}\mathrm{e}^{-kt} + C_2 \tag{8}$$

由 $t=0$ 时，$x=0$ 得 $C_2 = v_0/k$，代入上式得运动学方程为

$$x = \frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \tag{9}$$

【说明】本例有两点需特别注意：1）从（1）式到（2）式的分离变量与例1的不同；2）从（5）式到（4）式，和从（8）式到（9）式，都需由初始条件确定积分常数，且注意 $e^0=1$.

3.加速度是坐标的函数，即 $a_x = a_x(x)$.

例1.3　例2中若已知 $a_x = bx$，初始条件不变，求速度与坐标的关系.

解 由加速度的分量表示式得方程

$$bx = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

含有三个变量 t,v_x 和 x,需要利用物理量间的关系将它们化为两个变量,然后才能分离变量积分,根据题目所要求的,可以利用 $\mathrm{d}x = v_x\mathrm{d}t$ 消去变量 t 得

$$bx = v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

再分离变量 x 和 v_x,积分

$$\int_0^x bx\mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v_x} v_x\mathrm{d}v_x \tag{3}$$

得速度与坐标的关系为

$$v_x^2 - v_0^2 = bx^2 \tag{4}$$

【说明】本例的关键在(2)式的变换,因(1)式中含有 3 个变量 t,v_x 和 x,所以必须利用三者的关系化为只含有两个变量的微分方程,才能积分。

1.1.4 运动学方程的建立和极值问题

1.运动学方程的建立

质点运动学仅仅是描述一个几何点的运动.对于一个复杂的力学系统,我们可以选取其中的某一个点来研究,只要建立合适的坐标系,利用几何关系写出该点任一时刻的位置坐标,也就是建立起质点的运动学方程,就可以进一步研究其轨道、速度和加速度.这是求运动点的速度和加速度的一般方法.

例如图 1.3 要讨论物体 M 的运动,可以分析 A 点的运动.建立如图坐标系,A 点的位置可用坐标 x 描述,$x = \sqrt{l^2 - h^2}$,这里 l 是时间的函数,$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -v_0$,若设 $t = 0$ 时 $l = l_0$,则 l 与时间的关系

为 $l = l_0 - v_0 t$.因此 A 点的运动学方程为

$$x = \sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 - h^2}$$

对时间求导可得速度 v_x 和 a_x.

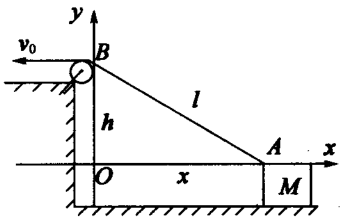

图 1.3　物体 M 的运动

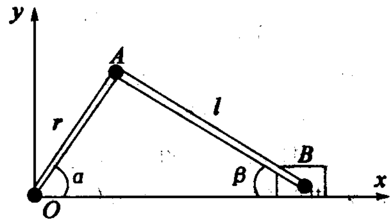

图 1.4　曲柄连杆机构

又例如图 1.4 的曲柄连杆机构,已知曲柄 OA 以匀角速 ω 绕定点 O 转动,滑块 B 只能沿直线 Ox 运动,要研究滑块的运动速度,可建立如图坐标系,滑块的位置坐标为

$$x = r\cos\alpha + l\cos\beta \tag{1}$$

α 和 β 之间有关系

$$r\sin\alpha = l\sin\beta \tag{2}$$

将(1)式和(2)式分别对时间求导可得

$$v_x = -r\sin\alpha \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - l\sin\beta \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

$$r\cos\alpha \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = l\cos\beta \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

其中已知$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega$,将(2)和(4)式代入(3)式,得滑块的速度与角 α 的函数关系

$$v_x = -r\omega\sin\alpha\left(1 + \frac{r\cos\alpha}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}}\right)$$

2.极值问题

在质点运动学中常常遇到求极值的问题,最一般的方法是利