

考研辅导丛书

电磁场与电磁波

第4版

教学指导书

杨显清 王 园 赵家升



高等教育出版社

考研辅导丛书

0441.4
1=3C

电磁场与电磁波

(第4版)

教学指导书

杨显清 王 园 赵家升

高等教育出版社

内容提要

《电磁场与电磁波》(第3版)自1999年出版以来,受到读者的欢迎,师生普遍认为这是一本非常适合教学的教材。随着电子通信技术的发展,电磁场与电磁波的教学需求随之产生变化,与此相应,编者在编写《电磁场与电磁波》(第4版)时,在教学内容和体系结构上做了较大调整,主要体现在:(1)以三大实验定律和两个基本假说为基础,归纳总结出麦克斯韦方程,然后讨论静态场、时变场以及电磁波的传播与辐射特性。既能与物理电磁学有机衔接,又避免简单重复。(2)减少静态场部分内容,加强电磁波内容,以满足电子信息类专业的需要。(3)精选例题和习题,类型多样化。

为便于师生使用第4版教材,编者编写了这本配套教学指导书,该书被列入高等教育百门精品课程教材建设计划。

与主教材一致,本书共分8章,具体内容为:矢量分析、电磁场的基本规律、静态电磁场及其边值问题的解、时变电磁场、均匀平面波在无界空间中的传播、均匀平面波的反射与透射、导行电磁波、电磁辐射。每章均由三部分组成:基本内容概述,教学基本要求及重点、难点讨论,习题解答。

本书可供普通高等学校电子信息、通信工程、信息工程等专业作为“电磁场与电磁波”课程的教学指导书使用,也可作为硕士研究生入学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波(第4版)教学指导书/杨显清,
王园,赵家升. —北京:高等教育出版社,2006.5
ISBN 7-04-018469-9

I. 电... II. ①杨... ②王... ③赵... III. ①电
磁场-高等学校-教学参考资料 ②电磁波-高等学
校-教学参考资料 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 025768 号

策划编辑 刘激扬 责任编辑 李葛平 封面设计 李卫青 责任绘图 朱 静
版式设计 胡志萍 责任校对 朱惠芳 责任印制 宋克学

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京人卫印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 16.5
字 数 300 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2006 年 5 月第 1 版
印 次 2006 年 5 月第 1 次印刷
定 价 20.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18469-00

前 言

本书是与“全国高等教育百门精品课程教材建设计划”的精品项目《电磁场与电磁波》(第4版)(谢处方教授和饶克谨教授编著,杨显清、王园、赵家升修订,高等教育出版社2006年1月出版)配套的教学指导书,希望能帮助使用该教材的教师理解和掌握各章的教学基本要求,处理好教学中的重点与难点。也希望能帮助学生正确理解和掌握“电磁场与电磁波”的基本概念、规律和方法,提高分析问题和解决问题的能力。

全书共分8章:矢量分析、电磁场的基本规律、静态电磁场及其边值问题的解、时变电磁场、均匀平面波在无界空间中的传播、均匀平面波的反射与透射、导行电磁波、电磁辐射。每章均由以下三部分组成:

一、基本内容概述

对每章的内容做简要归纳,给出重要的公式和结论。

二、教学基本要求及重点、难点讨论

根据课程教学大纲要求,提出每章应该理解和掌握的内容以及一般理解的内容,并对一些重点、难点进行分析讨论。

三、习题解答

“电磁场与电磁波”课程的特点是:物理概念抽象、数学推导繁复,历来被认为是一门教师难教、学生难学的课程。在学习过程中,解题是重要的环节之一,也是学习该课程的难点。通过解题,能巩固和加深对基本概念与基本规律的理解,掌握分析和计算方法,培养应用基本理论解决实际问题的能力。希望读者首先进行认真的分析思考,独立自主地解题,然后再参阅习题解答,以期获得应有的收效。

本书第1、4、5、6章由杨显清执笔,第2、3章由赵家升执笔,第7、8章由王园执笔。全书由杨显清审核并统稿。

本教学指导书总结了编者多年来从事“电磁场与电磁波”课程教学的体会,也吸取了电子科技大学“电磁场与波”课程组同仁的经验,还参阅了近年来国内外的相关教材和参考书,受到了不少启发。对为本书的编写和出版给予了支持和帮助的人士,编者在此一并致以衷心谢意。

本书中存在的错误和不足之处,敬请读者不吝指正。

编 者

2005年10月

于电子科技大学

目 录

第 1 章 矢量分析	1
1.1 基本内容概述	1
1.2 教学基本要求及重点、难点讨论	6
1.3 习题解答	8
第 2 章 电磁场的基本规律	23
2.1 基本内容概述	23
2.2 教学基本要求及重点、难点讨论	27
2.3 习题解答	33
第 3 章 静态电磁场及其边值问题的解	58
3.1 基本内容概述	58
3.2 教学基本要求及重点、难点讨论	65
3.3 习题解答	74
第 4 章 时变电磁场	107
4.1 基本内容概述	107
4.2 教学基本要求及重点、难点讨论	110
4.3 习题解答	113
第 5 章 均匀平面波在无界空间中的传播	130
5.1 基本内容概述	130
5.2 教学基本要求及重点、难点讨论	136
5.3 习题解答	139
第 6 章 均匀平面波的反射与透射	166
6.1 基本内容概述	166
6.2 教学基本要求及重点、难点讨论	170
6.3 习题解答	173
第 7 章 导行电磁波	203
7.1 基本内容概述	203
7.2 教学基本要求及重点、难点讨论	210
7.3 习题解答	211
第 8 章 电磁辐射	233
8.1 基本内容概述	233
8.2 教学基本要求及重点、难点讨论	237
8.3 习题解答	238



附录	251
附录 1 本科生自测试题	251
附录 2 硕士研究生入学试题	253
参考文献	257

第 1 章

矢量分析

1.1 基本内容概述

矢量分析是研究电磁场在空间分布和变化规律的基本数学工具之一。本章着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律。

1.1.1 矢量代数

两个矢量 A 与 B 的点积 $A \cdot B$ 是一个标量, 定义为

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (1.1)$$

两个矢量 A 与 B 的叉积 $A \times B$ 是一个矢量, 定义为

$$A \times B = e_n AB \sin \theta \quad (1.2)$$

矢量 A 与矢量 $B \times C$ 的点积 $A \cdot (B \times C)$ 称为标量三重积, 它具有如下运算性质

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (1.3)$$

矢量 A 与矢量 $B \times C$ 的叉积 $A \times (B \times C)$ 称为矢量三重积, 它具有如下运算性质:

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (1.4)$$

1.1.2 三种常用的正交坐标系

1. 直角坐标系 (x, y, z)

直角坐标系中的三个相互正交的坐标单位矢量为 e_x 、 e_y 和 e_z , 遵循右手螺旋法则:

$$e_x \times e_y = e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y \quad (1.5)$$

长度元

$$dl_x = dx, dl_y = dy, dl_z = dz \quad (1.6)$$



面积元

$$dS_x = dydz, dS_y = dx dz, dS_z = dx dy \quad (1.7)$$

体积元

$$dV = dx dy dz \quad (1.8)$$

2. 圆柱坐标系 (ρ, ϕ, z)

圆柱坐标系中的三个相互正交的坐标单位矢量为 $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ 和 $\mathbf{e}_z$ ，遵循右手螺旋法则：

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi \quad (1.9)$$

长度元

$$dl_\rho = d\rho, dl_\phi = \rho d\phi, dl_z = dz \quad (1.10)$$

面积元

$$dS_\rho = \rho d\phi dz, dS_\phi = \rho dz, dS_z = \rho d\rho d\phi \quad (1.11)$$

体积元

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.12)$$

3. 球坐标系 (r, θ, ϕ)

球坐标系中的三个相互正交的坐标单位矢量为 $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 和 $\mathbf{e}_\phi$ ，遵循右手螺旋法则：

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \quad (1.13)$$

长度元

$$dl_r = dr, dl_\theta = r d\theta, dl_\phi = r \sin \theta d\phi \quad (1.14)$$

面积元

$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi, dS_\theta = r \sin \theta dr d\phi, dS_\phi = r dr d\theta \quad (1.15)$$

体积元

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.16)$$

4. 坐标单位矢量之间的变换

$\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ 、 $\mathbf{e}_z$ 与 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 之间的变换关系见表 1.1。

表 1.1

	$\mathbf{e}_x$	$\mathbf{e}_y$	$\mathbf{e}_z$
$\mathbf{e}_\rho$	$\cos \phi$	$\sin \phi$	0
$\mathbf{e}_\phi$	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$\mathbf{e}_z$	0	0	1



e_r, e_θ, e_ϕ 与 e_ρ, e_ϕ, e_z 之间的变换关系见表 1.2。

表 1.2

	e_ρ	e_ϕ	e_z
e_r	$\sin \theta$	0	$\cos \theta$
e_θ	$\cos \theta$	0	$-\sin \theta$
e_ϕ	0	1	0

e_r, e_θ, e_ϕ 与 e_x, e_y, e_z 之间的变换关系见表 1.3。

表 1.3

	e_x	e_y	e_z
e_r	$\sin \theta \cos \phi$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta$
e_θ	$\cos \theta \cos \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$-\sin \theta$
e_ϕ	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0

1.1.3 标量场的梯度

1. 标量场的等值面

标量场可用一个标量函数来描述

$$u = u(\mathbf{r}) \quad (1.17)$$

标量场的等值面方程为

$$u(\mathbf{r}) = C \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1.18)$$

2. 标量场的方向导数

在直角坐标系中方向导数的计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.19)$$

式中, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是方向 l 的方向余弦。

3. 标量场的梯度

标量场的梯度 ∇u 是一个矢量, 在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla u = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.20)$$

$$\nabla u = e_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + e_\phi \frac{\partial u}{\rho \partial \phi} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.21)$$

$$\nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (1.22)$$

1.1.4 矢量场的散度

1. 矢量场的矢量线

矢量场可用一个矢量函数来描述

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x F_x(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y F_y(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z F_z(\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

矢量场的矢量线微分方程为

$$\frac{dx}{F_x(\mathbf{r})} = \frac{dy}{F_y(\mathbf{r})} = \frac{dz}{F_z(\mathbf{r})} \quad (1.24)$$

2. 矢量场的通量

矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 穿出闭合面 S 的通量为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_n dS \quad (1.25)$$

3. 矢量场的散度

矢量场的散度 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 是一个标量,在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (1.28)$$

4. 散度定理

矢量场的散度在体积 V 上的体积分等于矢量场在限定该体积的闭合曲面 S 上的面积分,即

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.29)$$

散度定理是矢量场中的体积分与闭合曲面积分之间的一个变换关系,在电磁理论中非常有用。

1.1.5 矢量场的旋度

1. 矢量场的环流

矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 沿闭合路径 C 的环流为

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.30)$$

2. 矢量场的旋度

矢量场的旋度 $\nabla \times \mathbf{F}$ 是一个矢量,在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} \quad (1.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

3. 斯托克斯定理

矢量场的旋度在曲面 S 上的面积分等于矢量场沿限定该曲面的闭合路径 C 的线积分,即

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.34)$$

斯托克斯定理是矢量场中的面积分与围线积分之间的一个变换关系,在电磁理论中也很有用。

1.1.6 无旋场与无散场

1. 无旋场

标量场的梯度有一个重要性质,就是它的旋度恒等于0,即

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0 \quad (1.35)$$

一个旋度处处为0的矢量场 $\mathbf{F}$ 称为无旋场,可以把它表示为一个标量场的梯度,即如果 $\nabla \times \mathbf{F} \equiv 0$,则存在标量函数 u ,使得

$$\mathbf{F} = -\nabla u \quad (1.36)$$



2. 无散场

矢量场的旋度有一个重要性质,就是旋度的散度恒等于0,即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.37)$$

一个散度处处为0的矢量场 $\mathbf{F}$ 称为无散场,可以把它表示为另一矢量场的旋度,即如果 $\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv 0$,则存在矢量函数 $\mathbf{A}$,使得

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.38)$$

1.1.7 拉普拉斯运算与格林定理

1. 拉普拉斯运算 $\nabla^2 u$

在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中, $\nabla^2 u$ 的表达式分别为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.39)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.40)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (1.41)$$

2. 格林定理

格林第一定理(格林第一恒等式)

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (1.42)$$

格林第二定理(格林第二恒等式)

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (1.43)$$

1.1.8 亥姆霍兹定理

矢量场的散度和旋度都是表示矢量场的性质的量度,一个矢量场所具有的性质可由它的散度和旋度来说明。可以证明:在有限的区域 V 内,任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件(即限定区域 V 的闭合面 S 上的矢量场的分布)惟一确定,且可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.44)$$

1.2

教学基本要求及重点、难点讨论

1.2.1 教学基本要求

理解标量场与矢量场的概念,了解标量场的等值面和矢量场的矢量线的



概念。

直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是三种常用的坐标系,应熟练掌握。

矢量场的散度和旋度、标量场的梯度是矢量分析中最基本的概念,应深刻理解,掌握散度、旋度和梯度的计算公式和方法。

散度定理和斯托克斯定理是矢量分析中的两个重要定理,应熟练掌握和应用。

理解亥姆霍兹定理的重要意义。

1.2.2 重点、难点讨论

(1) 矢量场的散度和旋度用于描述矢量场的不同性质,它们的主要区别在于:

① 一个矢量场的旋度是一个矢量函数,而一个矢量场的散度是一个标量函数;

② 旋度描述的是矢量场中各点的场量与涡旋源的关系,而散度描述的是矢量场中各点的场量与通量源的关系;

③ 如果矢量场所在的空间中 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$,则这种场中不可能存在旋涡源,因而称之为无旋场(或保守场);如果矢量场所在的空间中 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$,则这种场中不可能存在通量源,因而称之为无源场(或管形场);

④ 在旋度公式(1.31)中,矢量场 $\mathbf{F}$ 的场分量 F_x, F_y, F_z 分别只对与其垂直方向的坐标变量求偏导数,所以矢量场的旋度描述的是场分量在与其垂直的方向上的变化规律;而在散度公式(1.26)中,矢量场 $\mathbf{F}$ 的场分量 F_x, F_y, F_z 分别只对 x, y, z 求偏导数,所以矢量场的散度描述的是场分量沿着各自方向上的变化规律。

(2) 亥姆霍兹定理总结了矢量场的基本性质,矢量场由它的散度和旋度惟一地确定,矢量的散度和矢量的旋度各对应矢量场的一种源。所以,分析矢量场总是从研究它的散度和旋度着手,散度方程和旋度方程组成了矢量场的基本方程(微分形式)。也可以从矢量场沿闭合面的通量和沿闭合路径的环流着手,得到基本方程的积分形式。

(3) 一个标量场的性质可由它的梯度来描述,即 $u(\mathbf{r}) = \int \nabla u \cdot d\mathbf{l} + C$ 。标量场的梯度具有如下性质:

① 标量场 $u(\mathbf{r})$ 的梯度是一个矢量场,并且 $\nabla \times \nabla u = 0$;

② 标量场 $u(\mathbf{r})$ 中,在给定点沿任意方向 $\mathbf{e}_l$ 的方向导数等于梯度在该方向上的投影,即

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{e}_l \cdot \nabla u$$

③ 标量场 $u(\mathbf{r})$ 中每一点的梯度垂直于过该点的等值面, 且指向 $u(\mathbf{r})$ 增加的方向。

1.3 习题解答

1.1 给定三个矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 如下:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y 2 - \mathbf{e}_z 3$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_y 4 + \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{e}_x 5 - \mathbf{e}_z 2$$

求: (1) e_A ; (2) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$; (3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; (4) θ_{AB} ; (5) $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上的分量; (6) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$; (7) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 和 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$; (8) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 。

$$\text{解 (1) } e_A = \frac{A}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y 2 - \mathbf{e}_z 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{14}} + \mathbf{e}_y \frac{2}{\sqrt{14}} - \mathbf{e}_z \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |\mathbf{A} - \mathbf{B}| &= |(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y 2 - \mathbf{e}_z 3) - (-\mathbf{e}_y 4 + \mathbf{e}_z)| \\ &= |\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y 6 - \mathbf{e}_z 4| = \sqrt{53} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y 2 - \mathbf{e}_z 3) \cdot (-\mathbf{e}_y 4 + \mathbf{e}_z) = -11$$

$$(4) \quad \text{由 } \cos \theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{-11}{\sqrt{14} \times \sqrt{17}} = -\frac{11}{\sqrt{238}}, \text{ 得}$$

$$\theta_{AB} = \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{238}}\right) = 135.5^\circ$$

(5) $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上的分量

$$A_B = |\mathbf{A}| \cos \theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}$$

$$(6) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_y 13 - \mathbf{e}_z 10$$

$$(7) \quad \text{由于 } \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x 8 + \mathbf{e}_y 5 + \mathbf{e}_z 20$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x 10 - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z 4$$

所以 $A \cdot (B \times C) = (e_x + e_y - e_z) \cdot (e_x 8 + e_y 5 + e_z 20) = -42$

$$(A \times B) \cdot C = (-e_x 10 - e_y 1 - e_z 4) \cdot (e_x 5 - e_z 2) = -42$$

$$(8) (A \times B) \times C = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -10 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = e_x 2 - e_y 40 + e_z 5$$

$$A \times (B \times C) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 20 \end{vmatrix} = e_x 55 - e_y 44 - e_z 11$$

1.2 三角形的三个顶点为 $P_1(0, 1, -2)$ 、 $P_2(4, 1, -3)$ 和 $P_3(6, 2, 5)$ 。

(1) 判断 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 是否为一直角三角形；

(2) 求三角形的面积。

解 (1) 三个顶点 $P_1(0, 1, -2)$ 、 $P_2(4, 1, -3)$ 和 $P_3(6, 2, 5)$ 的位置矢量分别为

$$r_1 = e_y - e_z 2, \quad r_2 = e_x 4 + e_y - e_z 3, \quad r_3 = e_x 6 + e_y 2 + e_z 5$$

则 $R_{12} = r_2 - r_1 = e_x 4 - e_z, \quad R_{23} = r_3 - r_2 = e_x 2 + e_y + e_z 8,$

$$R_{31} = r_1 - r_3 = -e_x 6 - e_y - e_z 7$$

由此可见

$$R_{12} \cdot R_{23} = (e_x 4 - e_z) \cdot (e_x 2 + e_y + e_z 8) = 0$$

故 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 为一直角三角形。

(2) 三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} |R_{12} \times R_{23}| = \frac{1}{2} |R_{12}| \times |R_{23}| = \frac{1}{2} \sqrt{17} \times \sqrt{69} = 17.13$$

1.3 求 $P'(-3, 1, 4)$ 点到 $P(2, -2, 3)$ 点的距离矢量 R 及 R 的方向。

解 $r_{p'} = -e_x 3 + e_y + e_z 4, \quad r_p = e_x 2 - e_y 2 + e_z 3$

则 $R = R_{p'p} = r_p - r_{p'} = e_x 5 - e_y 3 - e_z$

且 $R_{p'p}$ 与 x, y, z 轴的夹角分别为

$$\phi_x = \arccos\left(\frac{e_x \cdot R_{p'p}}{|R_{p'p}|}\right) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right) = 32.31^\circ$$

$$\phi_y = \arccos\left(\frac{e_y \cdot R_{p'p}}{|R_{p'p}|}\right) = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}\right) = 120.47^\circ$$

$$\phi_z = \arccos\left(\frac{e_z \cdot R_{p'p}}{|R_{p'p}|}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{35}}\right) = 99.73^\circ$$

1.4 给定两矢量 $A = e_x 2 + e_y 3 - e_z 4$ 和 $B = e_x 4 - e_y 5 + e_z 6$, 求它们之间的夹角和 A 在 B 上的分量。

解 $|A| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$

$$|B| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{77}$$

$$A \cdot B = (e_x 2 + e_y 3 - e_z 4) \cdot (e_x 4 - e_y 5 + e_z 6) = -31$$

故 A 与 B 之间的夹角为

$$\theta_{AB} = \arccos\left(\frac{A \cdot B}{|A| |B|}\right) = \arccos\left(\frac{-31}{\sqrt{29} \times \sqrt{77}}\right) = 131^\circ$$

A 在 B 上的分量为

$$A_B = A \cdot \frac{B}{|B|} = \frac{-31}{\sqrt{77}} = -3.532$$

1.5 给定两矢量 $A = e_x 2 + e_y 3 - e_z 4$ 和 $B = -e_x 6 - e_y 4 + e_z$, 求 $A \times B$ 在 $C = e_x - e_y + e_z$ 上的分量。

解 $A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 2 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -e_x 13 + e_y 22 + e_z 10$

$$(A \times B) \cdot C = (-e_x 13 + e_y 22 + e_z 10) \cdot (e_x - e_y + e_z) = -25$$

$$|C| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

所以 $A \times B$ 在 C 上的分量为

$$(A \times B)_C = \frac{(A \times B) \cdot C}{|C|} = -\frac{25}{\sqrt{3}} = -14.43$$

1.6 证明: 如果 $A \cdot B = A \cdot C$ 和 $A \times B = A \times C$, 则 $B = C$ 。

证 由 $A \times B = A \times C$, 则有 $A \times (A \times B) = A \times (A \times C)$, 即

$$(A \cdot B)A - (A \cdot A)B = (A \cdot C)A - (A \cdot A)C$$

由于 $A \cdot B = A \cdot C$, 于是得到

$$(A \cdot A)B = (A \cdot A)C$$

故

$$B = C$$

1.7 如果给定一个未知矢量与一个已知矢量的标量积和矢量积, 那么便可以确定该未知矢量。设 A 为一已知矢量, $p = A \cdot X$ 而 $P = A \times X$, p 和 P 已知, 试求 X 。

解 由 $P = A \times X$, 有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{P} = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{X}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{X} = p\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{X}$$

故得

$$\mathbf{X} = \frac{p\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{P}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

1.8 在圆柱坐标系中,一点的位置由 $\left(4, \frac{2\pi}{3}, 3\right)$ 定出,求该点在:(1) 直角坐标系中的坐标;(2) 球坐标系中的坐标。

解 (1) 在直角坐标系中

$$x = 4\cos(2\pi/3) = -2, y = 4\sin(2\pi/3) = 2\sqrt{3}, z = 3$$

故该点的直角坐标为 $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$ 。

(2) 在球坐标系中

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \theta = \arctan(4/3) = 53.1^\circ, \phi = 2\pi/3 \text{ rad} = 120^\circ$$

故该点的球坐标为 $(5, 53.1^\circ, 120^\circ)$ 。

1.9 用球坐标表示的场 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{25}{r^2}$ 。

(1) 求在直角坐标系中 $(-3, 4, -5)$ 点处的 $|\mathbf{E}|$ 和 E_x ;

(2) 求在直角坐标系中 $(-3, 4, -5)$ 点处 $\mathbf{E}$ 与矢量 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x 2 - \mathbf{e}_y 2 + \mathbf{e}_z$ 构成的夹角。

解 (1) 在直角坐标系中 $(-3, 4, -5)$ 点处, $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$, 故

$$|\mathbf{E}| = \left| \mathbf{e}_r \frac{25}{r^2} \right| = \frac{1}{2}$$

又在直角坐标系中 $(-3, 4, -5)$ 点处, $\mathbf{r} = -\mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_y 4 - \mathbf{e}_z 5$, 所以

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{25}{r^2} = \frac{25}{r^3} \mathbf{r} = \frac{-\mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_y 4 - \mathbf{e}_z 5}{10\sqrt{2}}$$

故

$$E_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E} = \frac{-3}{10\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{20}$$

$$(2) \quad |\mathbf{B}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

在直角坐标系中 $(-3, 4, -5)$ 点处

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{-\mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_y 4 - \mathbf{e}_z 5}{10\sqrt{2}} \cdot (\mathbf{e}_x 2 - \mathbf{e}_y 2 + \mathbf{e}_z) = -\frac{19}{10\sqrt{2}}$$

故 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 构成的夹角为