ZHONGXUE
SHUXUE
FANGFA
ZHIDAO

赵振威 著

中学数学方法指导

科学出版社

·上册·

中学数学方法指导

上 册

赵振威 著

科学出版社

1988

内 容 简 介

数学方法是解决数学问题的钥匙。本书从中学数学教学实际出发，以初等数学为基本背景，适当联系高等数学知识，系统地介绍数学中的常用方法，从数学思想的总体上，揭示各种数学方法的纵横联系。在写法上以数学解题为线索，通过对各类典型实例的剖析，分析和比较了各种数学方法的原理、特点、适用范围、注意事项和有关的技能和技巧。各例题均附有思考方法，剖析发现解题思路的方法、技巧或思维过程。各章还安排有精选的富有思维的练习题。书末附有参考答案。

本书适应多层次读者的需要，可供高中学生、中学数学教师、师范院校数学系师生、自学青年参考。既可作为高中数学复习参考资料，也可作为师范院校数学方法论选修课教材。

中学数学方法指导

上 册

赵振威 著

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

（北京朝阳门内大街137号）

苏州师专印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经售

1988年9月第一版 开本：787×1092 1/32

1988年9月第一次印刷 印张：11.125

印数：1—10,000 字数：250,000

ISBN7-03-000778-6/G·18

定价：3.60元

序

数学曾被奉为科学的女王，也曾被说成科学的侍女。诺贝尔奖金中没有数学奖，但任何一门科学又都离不开数学，甚至把一个学科中运用了数学看作该学科成熟的标志。这些彼此似乎矛盾的看法盖源于数学本身的特点：数学是一门服务性学科。它不依赖于任何一种具体的运动形态，它源于科学，高于科学，又服务于科学。

数学之被人们所重视。可归因于数学是任何人考察任何事物时都要用的一种方法，一种放之四海而皆准的方法。有了数学，人会变得聪明，掌握了数学，手中多了一把解剖刀。即使不用数学公式，数学方法的逻辑力量，也会将一团乱麻理出一个头绪来。因此，可以说数学的价值在于它是一种最普遍最有效的方法。

就中学数学方法而论，国内多注重于微观解题，将数学方法局限于练习题求解。在这方面，中国也许称得上解题方法研究之最。不过，这种解题方法往往限于经验归纳，并未从一般的方法论角度加以系统总结。赵振威先生这本书作了有益的探讨。我期望本书及其它同类书作为一个好的开端，使我们的解题经验上升为解题理论。

我较为注重的是数学的宏观方法。把数学放到各门学科之中来认识，要比就数学论数学深刻得多。数学模型是本书的第二章，它就越出了数学内部的圈子。我国中学生了解的数学模型太少了，数学视野太窄了，我想这是我们的一个隐患。计算利息，分期付款、纳税保险等等，即使干个体户也

得懂得一些。数学原型与其数学模型相结合将会转化为巨大的物质力量。大而言之，微积分是运动过程的模型，概率统计学是随机现象的模型。小而言之，鸡兔同笼可作为二元一次方程组的模型，上学走路和乘车可做为函数图象的模型。因此，赵振威先生将数学模型放在全书之首，颇有见地。

现代数学正在一日千里地发展（大多数数学家未去理会数学基础中存在的危机），新的数学方法层出不穷。计算机更使数学方法推陈出新，例如近年来在分形、分维和混沌的研究使人大开眼界，世界上形成了一股热潮。中学数学方法看来也会受到计算机的影响，新的数学方法也会不断出现。即使是计算器的使用，也会对速算法和近似方法提出新课题。

总之，我期待数学方法研究的深入。振威先生研究有素，嘱我写点什么，遂有此序，以就教于方家。

张奠宙

1988年5月于华东师大

前　言

做任何事情都要讲究方法．方法对头，事半功倍；方法不当，事倍功半．因此，古往今来人们十分重视方法论的研究，力图运用正确的方法来认识世界和改造世界．学习和研究数学，要想少走弯路，多出成果，关键在于掌握数学方法论的基本原理．

数学方法论是研究和讨论数学的发展规律，数学的思想方法，以及数学的发现、发明与创新等法则的一门学问．数学方法论有宏观与微观之分，前者主要研究数学发展的外部动力，探索数学发展的普遍规律，数学应用的广阔前景，数学人才的成长规律等问题；后者只就数学内部的特定矛盾进行研究，探讨、总结数学发现的原理和法则，数学创造的方法和技巧，以及数学各个分支的发展模式等问题．

不少学者认为，问题是数学的心脏，数学的真正组成部分是问题和解；解决问题最困难的部分之一是提出正确的问题．从这个意义上说，在数学的本原上，系统研究解答数学问题的各种方法和技巧，有助于深刻理解数学本质，自觉掌握数学规律，全面提高数学的发现、创造能力．正如法国著名数学家阿达玛（Hadamard，1865—1963）在其名著《数学领域的发明心理学》中所指出的：一个学生解决某一代数或几何问题的过程，与数学家发现或创造的过程具有相同的性质，而至多只有程度上的差异．

基于上述认识，本书试图面向中学数学教学实际，以初

等数学为基本背景，适当联系高等数学知识，从微观数学方法论的角度，在数学解题的理论和实践的结合上，对中学数学方法进行比较系统的研究。全书共十五章，包括四部分内容：第一章、第二章和第十五章，主要介绍数学研究的基本方法；第三章至第六章，重点考察数学中的逻辑方法；第七章至第十二章，全面分析数学解题的思维方法；第十三、十四两章，侧重研究数学证明的几种重要方法。所论的这些方法中，前面几种方法，常用于提炼数学问题，建立数学理论；后面一些方法，多用于解答数学问题，给出数学证明。在实际展开时，上述四部分内容以数学解题为线索，互相穿插，交错进行，组成一个有机的整体。

为了便于读者阅读和思考，全书在例题的安排上，力求体现一条斜线，由浅入深，由简单到复杂，由初等数学到高等数学，组成一个结构紧密的网络。各个例题一般都附有思考方法，剖析发现解题思路的方法、技巧或思维过程。各章还安排了一定数量富有思维的练习题，供读者练习思考。

数学方法论是一门新兴的学问，本书通过解答数学问题，介绍数学发现的思想方法，是一种新的尝试，缺点、错误在所难免，恳请广大读者批评指正。本书如果能在指导读者改进中学数学的教学方法和学习方法，增强数学的发现、创新能力，拓宽知识视野，提高中学数学教学质量等方面有所裨益，则将为之感到欣慰。

著　者

1987年1月于虞山

目　　录

（上册）

（下册）

第一章　数学抽象方法

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。它有三个显著的特点：一是极度的抽象性；二是严密的逻辑性；三是广泛的应用性。这几个特点是互相联系的。数学的极度抽象性，决定了它的严密的逻辑性，保证了它的广泛的应用性。因此，学习和研究数学，必须理解并掌握数学抽象方法。

一、什么是数学抽象

从字面上作解释，“抽象”一词，来自拉丁文 abstractio，它的原意是排除、抽出。在中文里，“抽”即古“擂”字，作“引”讲；“象”作“对象”解，指思维或思考的客体。“抽”与“象”连用，表示在思维过程中，通过“抽”的活动反映对象。

在自然语言中，不少人把所有不能为人们的感觉器官直接把握的东西，也就是通常所说的“看不见、摸不着”的东西，叫做“抽象”；也有人把晦涩难懂、贫泛空洞的思想内容，说成是抽象的；还有人把“抽象”作为孤立、片面的同义词。这些都不是抽象的本意，而只是它的引伸或转义。

就认识论和方法论上来分析，任何事物都有它的现象和本质。现象是指事物的外部形态、外部联系；本质是指事物内部的矛盾运动、内部联系。本质常常隐于现象的背后，不易为人们直接感知。抽象，就是透过事物的现象，深入事物的里层，把事物的本质抽取出来的过程和方法，通过抽象分

析，人们才能就事物的内部联系，对现象作出统一的科学的说明。对此，列宁有一段精辟的论述："物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象等等，一句话，那一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。"（《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》）

数学抽象，是抽象分析方法在数学中的具体运用。也就是利用抽象的分析方法，把大量生动的关于现实世界空间形式和数量关系的直观背景材料，进行去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的加工和制作，提炼数学概念，构造数学模型，建立数学理论。

数学抽象的基本过程，大体是从所考察的问题出发，通过对各种经验事实（或已有基本概念、基本理论）的观察、分析、综合和比较，排除事物现象的、外部的、偶然的东西，抽出事物本质的、内在的、必然的东西，揭示客观对象的本质和规律。

进行数学抽象，一般应注意以下几点：首先，要分辨事物的真象和假象，避免为假象所迷惑；其次，要撇开与所考察的问题无关的内容，排除那些模糊的基本过程、掩盖普遍规律的干扰因素，在纯粹的状态下考察事物；第三，要区分基础的东西与派生的东西，深入事物的内部，发掘决定事物性质的基础内容；第四，要从基础的东西出发，把事物的各种属性和关系综合起来，把事物的本质作为一个完整的体系抽象出来。

例 1　关于点的概念。几何学中点的概念，是从现实世界中抽象出来的。日常生活中经常遇到的水点、雨点、万米长跑的起点、河流的交会点、某学校的所在地点等，都可以作为"点"的现实原型。这些例子中的点的物理性质各不相同，大小也不一样，但它们有一个共同的特征，即各自占据

着一定的位置。几何学中的点，舍弃了事物的物理性质，更无大小可言，仅仅表示位置，也就是纯属观念性的东西。点是几何学中的基本元素，除了表示位置，还有其他作用。比如，点的集合可以构成直线、曲线，也可以构成平面、曲面，甚至还可以构成整个空间，这些都是数学家观念上的需要。

例 2　关于自然数的概念。自然数的概念是在具体的计数过程中经过数学抽象得来的.早在原始社会的时候,人类以狩猎、捕鱼和采集果实为生。当时，人们关心的问题，是野兽、鱼、果实的有和无。这样，就逐渐产生了数量的观念。开始，人们用“板指头”的办法，一个一个地数集合中的物体。以后发展到用一只手表示五，整个人表示二十等等。那时的“五”被简单地理解为物体的个数“就象手上的指头那样多”；同样，“二十”被理解为“就象一个人身上所有的手指头和脚趾头那样多”。

在相当长的历史时期里，人们的数量观念都是和事物的具体内容联系在一起的，一头野兽，一条鱼，或者其他一个什么具体事物。随着实践活动的发展，人们又发现了量的共同特征。比如，一头野兽和一条鱼是完全不同的两个量，可是它们有一个共同的地方，即都是一个东西。一头野兽添上一头野兽是两头野兽，一条鱼添上一条鱼是两条鱼。也就是说，一个东西添上一个同类的东西总是两个同样的东西。这样一来，把一头野兽、两条鱼、三个矛头等等的具体内容抛开，就抽象为看不到摸不着的数。这些一、二、三等等的数，在不同的场合，就可以表示各类量的多少。引进了数字符号后，就变成 1、2、3、……等等数的系统，形成了作为集合标志的自然数的概念。

例 3　哥尼斯堡（Konigsberg）七桥问题。十八世纪东

普鲁士哥尼斯堡有条普莱格尔河，这条河有两个支流，在城中心汇成大河，中间是岛区。河上有七座桥，如图1—1所示。

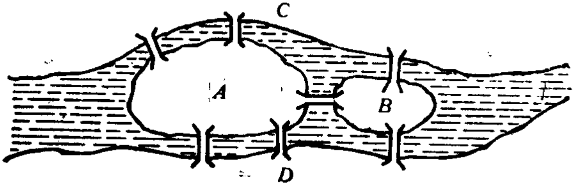

图1—1

问能否从某地出发，经过每一座桥一次且仅一次，然后返回出发地？

思考方法 数学中的图论，最早就开始于哥尼斯堡七桥问题。这个问题很长一段时间没有得到解决，后来在1736年瑞士数学家欧拉（Euler，1707—1783）利用数学抽象方法，成功地作出了解答。具体地说，欧拉敏锐地看到，整个问题与所走路程的长度无关；而且，整个岛区与河岸无非就是桥梁的连接地点。因此，欧拉把两个岛和河两岸抽象为四个点，把七座桥抽象为七条线。这样，七桥问题便等价于一笔画出图1—2的问题。

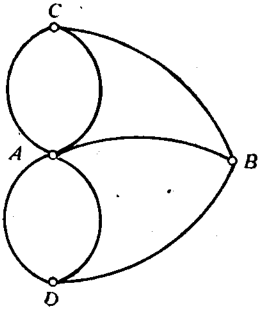

图1—2

欧拉在此基础上考察了一笔画的结构特征，认识到一笔画有个起点和终点（特别地，当起点与终点重合时，便为自封图形）。除起点与终点外，一笔画中出现的交点处曲线总是一进一出，即通过交点的曲线总是偶数条。换句话说，一笔画中至多只有两个点（起点

与终点）有可能通过奇数条曲线。容易看出，图 1—2 中 的 A、B、C、D 四点，都通过了奇数条曲线。所以，图1—2 不是一笔能够画出的图形。从而，例 3 的回答是否定的。

例 4 关于线性空间的概念。线性空间作为高等代数中的一个重要概念，是在一系列已有数学知识的基础上，经过较高层次的抽象提炼出来的。它的容观背景，是数域 P 上的 n 维向量空间P^n、数域 P 上的一元多项式环 $P[x]$、元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵集合 $P^{m\times n}$ 等众多的数学对象。

我们知道，在 P^n 中有加法和数量乘法两种运算：

向量

$$\gamma=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots,\ a_n+b_n)$$

称为向量

$$\alpha=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n),\ \beta=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$$

的和，记为

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

设 k 为数域 P 中的数，向量

$$(ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n)$$

称为向量

$$\alpha=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

与数 k 的数量乘积，记为 $k\alpha$。

向量空间 P^n 中的加法和数量乘法满足下列八条基本运算规则：

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2° $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

3° $\alpha+0=\alpha$;

4° $\alpha+(-\alpha)=0$;

5° $1\alpha=\alpha$;

6° $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

7° $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

8° $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

其中，k，$l\in P$，α，β，$\gamma\in P^n$.

对于 $P[x]$和$P^{m\times n}$，尽管其对象完全不同，有关运算的定义也不相同，但它们都有加法和数量乘法两种运算；并且，这两种运算也都满足相当于 P^n 中的八条规则. 有兴趣的读者，可以对此一一进行考察.

分析上面这些不同的数学对象，可以看到它们的共同特征，这就是在 P^n、$P[x]$或 $P^{m\times n}$ 中，都有称为加法和数量乘法的两种运算；这两种运算又都满足形式相同的八条规则. 由此，经过数学抽象，可以得到用以刻划更广泛的一类数学对象的线性空间的下列定义：

设 V 是一个非空集合，P 是一个数域. 在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算，叫做加法；这就是说，给出了一个法则，对于 V 中任意两个元素α与β，在 V 中都有唯一的一个元素 γ 与它们对应，称为 α与β 的和，记为 $\gamma=\alpha+\beta$. 在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法；这就是说，对于数域 P 中任一数 k 与 V 中任一元素 α，在 V 中都有唯一的一个元素 δ 与它们相对应，称为 k 与 α 的数量乘积，记为 $\delta=k\alpha$. 如果加法与数量乘法满足下述规则，那么 V 称为数域 P上的线性空间.

加法满足以下四条规则：

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2° $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

3° 在 V 中有一个元素0，对于 V 中任一元素 α 都有

$$\alpha+0=\alpha$$

（具有这个性质的元素 0 称为 V 的零元素）；

4° 对于 V 中每一个元素α，都有 V 中的元素β，使得

$$\alpha+\beta=0$$

（β称为α的负元素）；

数量乘法满足下面两条规则：

5° $1\alpha=\alpha$；

6° $k(l\alpha)=(kl)\alpha$。

数量乘法与加法满足下面两条规则：

7° $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

8° $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$。

在以上规则中，k，l 等表示数域 P 中的任意数；α，β，γ 等表示集合 V 中任意元素。

从上面几个例子可以看出，数学抽象具有三个显著的特征：

（1）数学抽象有着明确的目标，都是撇开对象的具体内容，仅仅保留空间形式或数量关系。

（2）数学抽象适用范围广泛，既有以提炼数学概念为基本目的的表征性抽象，又有旨在探索数学理论的原理性抽象。

（3）数学抽象有着丰富的层次，不仅表现为直接从现实世界中抽象出相应的空间形式和数量关系，而且还表现为在已有数学知识的基础上，抽象新概念，建立新理论。

二、数学抽象的常用方法

数学抽象有多种具体方法，常用的有理想化抽象、等价