众创精品

2006年最新成人高考丛书系列

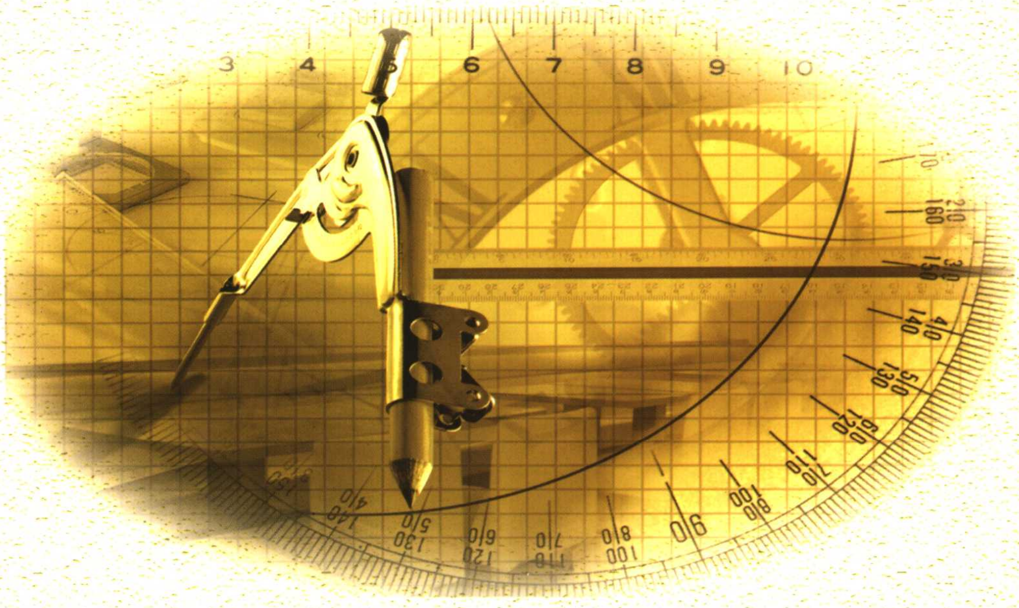
全国各类成人高等学校招生考试统考教材

数学 理科

SHU XUE

中国人民大学成人教育学院 编

裘兴华 主编



北京邮电大学出版社

http://www.buptpress.com

全国各类成人高等学校招生统考教材

高中起点升本、专科

数　学

（理科）

裘兴华　门淑慧　裘小强　主编

北京邮电大学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高等学校招生统考教材. 理工类. 数学/裘兴华,门淑慧,裘小强编.

—北京:北京邮电大学出版社,2002

ISBN 7-5635-0620-9

Ⅰ.数... Ⅱ.①裘...②门...③裘... Ⅲ.数学课—成人教育:高等教育

—入学考试—教材 Ⅳ.G723.46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053195 号

书　　名　数学(理科)

主　　编　裘兴华　门淑慧　裘小强

责任编辑　陈露晓　邓　艳

版式设计　陈露晓

出版发行　北京邮电大学出版社

社　　址　北京市海淀区西土城路 10 号　邮编 100876

经　　销　各地新华书店

印　　刷　北京市彩虹印刷有限责任公司

开　　本　850 mm×1 168 mm　1/16

印　　张　16.5

字　　数　491 千字

版　　次　2006 年 2 月修订　2006 年 2 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 7-5635-0620-9/G·84

定　　价　26.00 元

如有印刷问题请与北京邮电大学出版社联系　　**电话:**(010)62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn　　Http://www.buptpress.com

出 版 说 明

为了使学生在复习备考过程中能全面、系统、高效地复习各门课程，我们再次组织了中国人民大学成人教育学院的原班人马认真地修订了《全国各类成人高等学校招生考试统考教材》。

本套教材包括《语文》、《数学》（文科）、《数学》（理科）、《英语》、《历史地理综合》、《物理化学综合》等。在本套教材的修订过程中侧重体现以下几个显著特点：

【紧扣大纲】本书严格按照最新《全国各类高等学校招生复习考试大纲——高中起点升本、专科》修订，并结合编者在中国人民大学成教院举办的成人高考辅导班授课和在北京评卷的经验，以及对历年全国统考试题的分析、研究，总结出了成人高考命题的思路、方法和原则，从而充分体现了成人高考命题的新动态。

【体例新颖】在内容的选择和编排方面，根据知识的内在联系和考生的认知规律，按从简单到复杂，由浅入深、循序渐进等原则安排本套教材的结构，教材的编写目的是为了帮助老师教学和培养学生的应试能力。

【针对性强】本系列丛书针对成人考生学习的特点和要求，注重基础知识复习和能力训练，以提高考生综合运用知识的能力和应试水平，能帮助考生在短期内取得良好的复习备考的效果。

由于本套丛书结构科学、合理，内容覆盖面广，安排灵活，因此是参加全国各类成人高考高中起点升本、专科（含高职）考生的理想教材。

希望广大师生在使用本套丛书时能提出宝贵的意见和建议，以便进一步的修改，使之日趋完善，在此对关心本套丛书并付出辛勤劳动的同志表示衷心的感谢。

编　者

目　　录

第一部分　代数

第二部分　三角

第三部分 平面解析几何

第四部分 立体几何

第五部分 概率与统计初步

附录部分

第一部分　代数

第一章　预备知识

数、式、方程和方程组

§1　实数

§1.1　实数系

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{有限小数}\\\text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}
$$

1. **有理数**　整数、分数统称为有理数，或可以化成分数的数称为有理数.
2. **无理数**　无限不循环小数称为无理数.

例 1. 判断下面各数中，哪些是有理数，哪些是无理数

$\frac{1}{3}$, 0.34, 1.333…, -5, 0, $\pi-5$, $2.\dot{7}\dot{5}$, $-\sqrt{2}$, $-\pi$

解　有理数为：$\frac{1}{3}$, 0.34, 1.333…, -5, 0, $2.\dot{7}\dot{5}$;

　　无理数为：$\pi-5$, $-\sqrt{2}$, $-\pi$.

§1.2　实数的有关概念

1. 数轴

规定了原点、正方向、单位长度的直线称为数轴，它是用来表示实数的直线，也就是数轴上的点和实数一一对应.

数轴上的任意两点，右边点对应的实数大于左边点对应的实数.

2. 绝对值

正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值还是零.

实数 a 的绝对值表示为 $|a|$. 即

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\0 & (a=0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

例 2. 判断下列各题的正误,并说明正误的理由

(1) $+a$ 的绝对值是 a

(2) 若 a,b 为实数,且 $|a|>|b|$,那么 $a>b$

(3) 若 m 是实数,则 $\left||m|+1\right|=|m|+1$

(4) 若 $|x|=|-7|$,则 $x=\pm7$

解 (1) 错　因为不知 a 是正数还是负数所以不能判断 $+a$ 的符号,如果 a 是正数,此题才正确.

(2) 错　因为只知 $|a|>|b|$,并不知道 a,b 的符号,若 $a=-5,b=2$. 虽然 $|-5|>|2|$ 但 -5 不大于 2.

(3) 对　因为不论 m 为任何实数. $|m|\geqslant0$,所以 $\left||m|+1\right|=|m|+1$(正数的绝对值是它本身).

(4) 对　因为 $|-7|=|7|=7$. 所以 $|x|=7$　所以 $x=\pm7$.

3. 相反数

绝对值相同而符号相反的两个数,互称为相反数,零的相反数还是零.

若 a、b 互为相反数,则可以表示为:$a+b=0$.

例 3. (1) $3-x$ 的相反数是________.

(2) x^2+5x 的相反数是________.

(3) x 与 $2y$ 互为相反数,若 $x=-3$,则 $y=$________.

(4) 若 $\alpha=\dfrac{1-a}{3a}$,则 α 的相反数 $\beta=$________.

解 (1) $x-3$.　　(2) $-(x^2+5x)$ 即 $-x^2-5x$.

(3) 因为 x 与 $2y$ 互为相反数,所以 $x+2y=0$,又因为 $x=-3$,所以 $2y=3$,所以 $y=\dfrac{3}{2}$.

(4) 因为 α 与 β 互为相反数. 所以 $\alpha+\beta=0$ 又因为 $\alpha=\dfrac{1-a}{3a}$ 所以 $\beta=0-\alpha=-\dfrac{1-a}{3a}=\dfrac{a-1}{3a}$.

4. 倒数

两个数的乘积为 1,则这两个数互为倒数. 即 a 的倒数为 $\dfrac{1}{a}$ $(a\neq0)$.

例 4. 一个数的相反数的倒数是 $2\dfrac{2}{3}$,那么这个数是________.

解 设这个数为 x,依题意,它的相反数为: $-x$. $-x$ 的倒数为: $-\dfrac{1}{x}$

则 $-\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{3}$,解出 $x=-\dfrac{3}{8}$

5. 平方根

若一个数 b 的平方等于 a. 即 $b^2=a$,则 b 叫 a 的平方根或两次方根. 一个正数 a 有两个平方根. 它们是一对相反数,这两个平方根中的正的平方根,叫它的算术平方根,记作:$\sqrt{a}$. 另一平方根记作: $-\sqrt{a}$,即 a 的平方根是 $\pm\sqrt{a}$.

如,9 的平方根是 ±3,记作 $\pm\sqrt{9}=\pm3$,其中 $+3$ 是 9 的算术平方根.

零的平方根还是零. 负数没有平方根.

例 5. 求下列各式的值.

(1) $\sqrt{16}$　　(2) $\sqrt{(3-\pi)^2}$　　(3) $\sqrt{(4\frac{3}{4}-5)^2}$

解 因为本题求的是算术根,所以各题答案都应为正数.

(1)4;(2) $\sqrt{(3-\pi)^2}=\sqrt{(\pi-3)^2}=\pi-3$;(3) $\sqrt{(4\frac{3}{4}-5)^2}=\sqrt{(-\frac{1}{4})^2}=\sqrt{(\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{4}$.

§1.3　实数的运算

1. 实数的运算律

若 a、b、c 为实数,则实数满足

(1) $a+b=b+a$　(交换律)

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$　(结合律)

(3) $a\cdot(b+c)=ab+ac$　(乘法对加法的分配律)

2. 实数的运算顺序

先乘方再乘除再加减

3. 实数的加法、减法、乘法、除法、乘方的法则:略

练习一

1. 写出绝对值小于 π 的所有整数.
2. 如果 $|a|>b>0$,用"<"把 a、b、$-a$、$-b$ 连接起来.
3. (1) 当 $a=$ ________时,$(a-3)^2+20$ 的值最小,这个最小值是多少?

　(2) 当 $a=$ ________时,$45-|a+2|$ 的值最大,这个最大值是多少?

参考答案

1. -3、-2、-1、0、1、2、3
2. $-a<-b<b<a$　或 $a<-b<b<-a$
3. (1) 当 $a=3$ 时 $(a-3)^2+20$ 的值最小,这个最小值为 20.

(2) 当 $a=-2$ 时,$45-|a+2|$ 的值最大且这个最大值为 45.

§2　代数式

§2.1　代数式的概念

1. 代数式的意义

用运算符号,如加、减、乘、除、乘方、开方把数字或表示数的字母连结起来的式子叫代数式.

2. 代数式分类.

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

3. **代数式的值**

当字母取定一个数值时，用这个数值代替代数式中的这个字母，就能计算出一个与这个数值相对应的值，这个值就叫代数式的值.

例 1. (1) 已知 $5a-4=0$，求代数式 $(5a+2)^2-5a$ 的值.

(2) 已知 $3a-2b=7$，求代数式 $(3a-2b)^2-6a+4b+1$ 的值.

(3) 已知 $|a-1|+(b-3)^2=0$，求代数式 $a^2+2ab+b^2$ 的值.

(4) 已知 $|2x-4|=0$，$\frac{1}{2}|y+3|x=2+x$. 求 $y-x$ 的值.

解 (1) 因为 $5a-4=0$，$a=\frac{4}{5}$，所以 $(5a+2)^2-5a=(5\times\frac{4}{5}+2)^2-5\times\frac{4}{5}=32$

(2) $(3a-2b)^2-6a+4b+1=(3a-2b)^2-2(3a-2b)+1=(7)^2-2\times7+1=36$

(3) 因为 $|a-1|+(b-3)^2=0$，$|a-1|=0$，$a=1$，$(b-3)^2=0$，$b=3$，

所以 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(1+3)^2=16$

(4) 因为 $|2x-4|=0$，$x=2$，又因为 $\frac{1}{2}|y+3|x=2+x$，$\frac{1}{2}|y+3|\cdot2=2+2$，

$|y+3|=4$，所以 $y+3=\pm4$，则 $y=1$ 或 $y=-7$，所以 $y-x=1-2=-1$ 或 $y-x=-7-2=-9$

§2.2 整式

1. **单项式**

用数字与字母的积组成的代数式叫单项式，单独一个数字或单独一个字母也叫单项式，如，5、-3.2、$-a$、0.25、$-4xy^5$、$3ab^2$ 单项式中数字因素，叫做这个单项式的系数，如，单项式 $-3a^2bc^3$ 的系数为 -3，a^2b 的系数为 1.

2. **多项式**

单项式的代数和叫多项式，所以我们把多项式中的每一个单项式叫做多项式的项，其中不含字母的项叫做常数项. 在多项式中，所有单项式中次数最高的项的次数，叫做多项式的次数.

如，多项式 $x^3-2x^2+3xy+1$ 中，字母最高次数为 3 次且共有四项，所以叫做关于 xy 的三次四项式. 再如，多项式 $5x^2-4x+1$ 叫做关于 x 的二次三项式.

3. **整式的运算**

(1) 整式的加减运算

① 同类项的意义：在一个多项式里，所有字母相同，并且相同字母的指数也相同的项叫做同类项. 如，同一多项式中的两项：$-3x^2y$ 与 $2x^2y$ 叫做同类项. 任何两个常数项都可以当作同类项.

② 整式加减法运算：把多项式中所有同类项合并成一项，这一项的系数是各项的系数和，字母和字母指数不变.

例 2. 合并下列各多项式的同类项

(1) $-2x^2y+3x^2y-6x^2y$　　(2) $5a^2+a-2a^2+\frac{1}{2}a+2$

解 (1) $-5x^2y$　　(2) $3a^2+\frac{3}{2}a+2$

(2) 整式的乘法运算

① 幂的运算法则

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\qquad a^m\div a^n=a^{m-n}$$

$(a^m)^n = a^{mn}$　　　　$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(\frac{b}{a})^n = \frac{b^n}{a^n} (a \neq 0)$

② 单项式乘单项式

单项式相乘,把它们的系数、相同字母分别相乘,对于只在一个单项式里含有的字母,则连同它的指数作为积的一个因式.

如,$-\frac{7}{4}a^2bc \cdot \frac{4}{7}ab^2c^2 \cdot (-\frac{49}{16}a^3d) = \frac{49}{16}a^6b^3c^3d.$

③ 多项式乘单项式

用单项式乘以多项式的每一项,再把所得的积相加. 如,$a(b+c+d) = ab+ac+ad.$

④ 多项式乘以多项式

先用一个多项式的每一个项乘以另一个多项式的每一项,再把所得的积相加.

如,$(a+b) \cdot (c+d) = ac+ad+bc+bd.$

⑤ 乘法公式

平方差公式　$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$　　　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

立方和公式　$(a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

立方差公式　$(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

完全立方公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(3) 整式的除法运算(合在分式内容中)

(4) 多项式的因式分解

① 因式分解的意义:把多项式写成连乘积的形式叫做多项式因式分解.

② 因式分解的方法:提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法等,其中十字相乘法在二次三项式中才可能实施.

§2.3　分式

1. 分式基本性质

分式的分子分母同乘(除)同一个不等于零的整式,分式的值不变.

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times m}{B \times m}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div m}{B \div m} \quad (m \neq 0)$$

2. 分式的运算

加减运算　$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$

乘除运算　$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$,　$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$

§2.4　二次根式

1. 式子$\sqrt{a}(a \geqslant 0)$ 叫做二次根式

2. **二次根式的基本性质**

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \qquad (\sqrt{a})^2 = a(a \geqslant 0)$$

3. **最简二次根式**

(1) 被开方数的指数小于2.

(2) 被开方数不含分母.

4. **二次根式的加减运算**

(1) 同类二次根式:几个最简二次根式的被开方数相同,这几个二次根式就叫同类二次根式.

(2) 二次根式的加减运算:先把各个二次根式化成最简二次根式,再把同类二次根式分别合并. 合并同类二次根式与合并同类项方法相同.

5. **二次根式的乘除运算**

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}\ (a \geqslant 0, b \geqslant 0), \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\quad (a \geqslant 0, b > 0).$$

6. **分母有理化**

(1) 化去分母的根号,叫分母有理化.

(2) 分母有理化的方法

两个含有二次根式的代数式相乘,如果它们的积不含有二次根式,这两个代数式互为有理化因式.

如,$\sqrt{a}$ 与$\sqrt{a}$,$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 与$\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

把分母有理化时,一般是把分子分母都乘以分母的有理化因式

例3. 把下列各式的分母有理化

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}$　(3) $\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$　(4) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

解 (1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3\times 2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{10}}{3\times 2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3\times 2\times 10} = \dfrac{\sqrt{5}}{30}$

(3) $\dfrac{4}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{4(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \dfrac{4(2+\sqrt{3})}{4-3} = 8+4\sqrt{3}$

(4) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$

练习二

1. 若 $-\dfrac{1}{2}x^3y^{n-1}$ 与 $3x^my^m$ 是同类项,则 $n=$ ________

2. 计算下列各题

①$5(3a-2b)^2-2(2a+3b)^2-3(2b-3a)^2+4(3b+2a)^2$

②$x^m - \frac{1}{2}x^{m+1} - \frac{1}{5}x^m + x^{m+1} - 2x^{m+1}$.

③$(a - \frac{1}{2})^2(a^2 + \frac{1}{4})^2(a + \frac{1}{2})^2$

④$(-\frac{3}{4}x^6y^3 + \frac{6}{5}x^3y^4 - \frac{9}{10}xy^5) \div \frac{3}{5}xy^3$

3. 已知 $y = ax^5 + bx^3 + cx - 2$，当 $x = -3$ 时，$y = 4$，那么当 $x = 3$ 时，求 y 的值.

4. 若 $a : b : c = 1 : 2 : 3$ 且 $a + b + c = 2$，则 $(a + b)^2$ 等于多少?

5. 已知$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$，则$\frac{x + y + z}{x + y} =$ ________.

参考答案

1. 因为这两个单项式是同类项，所以相同字母的指数相同. 所以 $m = 3, n - 1 = m$，所以 $n = 4$.

2. ①$26a^2 + 26b^2$　②$\frac{4}{5}x^m - \frac{3}{2}x^{m+1}$

③ 原式 $= [(a - \frac{1}{2})(a + \frac{1}{2})(a^2 + \frac{1}{4})]^2 = [(a^2 - \frac{1}{4})(a^2 + \frac{1}{4})]^2 = (a^4 - \frac{1}{16})^2$

$= a^8 - \frac{1}{8}a^4 + \frac{1}{256}$

④ 多项式除以单项式，是多项式的各项分别除以单项式，所以原式 $= -\frac{5}{4}x^5 + 2x^2y - \frac{3}{2}y^2$.

3. 当 $x = -3$ 时，$y = a(-3)^5 + b(-3)^3 + c(-3) - 2 = 4$　即 $3^5a + 3^3b + 3c = -6$
所以当 $x = 3$ 时 $y = 3^5a + 3^3b + 3c - 2 = -6 - 2 = -8$.

4. 因为 $a : b : c = 1 : 2 : 3$，设 $a = x, b = 2x, c = 3x$ 又 $a + b + c = 2$
所以 $x + 2x + 3x = 2, x = \frac{1}{3}$　所以 $a = \frac{1}{3}$，$b = \frac{2}{3}$，$(a + b)^2 = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3})^2 = 1$.

5. 设$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$，则 $x = 2k, y = 3k, z = 4k$，所以$\frac{x + y + z}{x + y} = \frac{2k + 3k + 4k}{2k + 3k} = \frac{9}{5}$.

§3　方程和方程组

§3.1 方程

1. 方程的有关概念

(1) 方程的意义：含有未知数的等式叫做方程.

(2) 方程解的意义：使方程两端相等的未知数的值叫做方程的解. 求方程解的过程叫解方程.

(3) 同解方程：在两个方程中，如果第一个方程的解都是第二个方程的解，并且第二个方程的解也都是第一个方程的解，我们就说这两个方程的解相同，这两个方程叫同解方程.

2. 一元一次方程

(1) 含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 1 的方程，叫一元一次方程.
如，$ax = b\ (a \neq 0)$

(2) 一元一次方程的解法步骤：去分母，去括号、移项合并同类项，两边同除以未知数的系数.

例 1. 解方程$\frac{1 - 0.5x}{0.3} - \frac{2x - 1}{3} = \frac{0.3x}{0.02}$

解 先整理方程,原方程化为:$\frac{10-5x}{3}-\frac{2x-1}{3}=15x$

去分母 $(10-5x)-(2x-1)=45x$. 移项合并为:$52x=11$

两边除以未知数系数:$x=\frac{11}{52}$. 所以原方程的解为:$x=\frac{11}{52}$.

3. 一元二次方程

一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

(1) 解法:直接开平方法,因式分解法(提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法),求根公式法 $\left(x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$.

例2. 解下列方程

(1)$(3x+2)^2=4$,

解 两边开平方:$3x+2=\pm2$,所以 $x_1=0,x_2=-\frac{4}{3}$

(2)$5x^2-2x=0$,

解 提取公因式:$x(5x-2)=0$ 所以 $x_1=0,x_2=\frac{2}{5}$

(3)$3x^2-16x+5=0$,

解 十字相乘法:$(3x-1)(x-5)=0$ 所以 $x_1=\frac{1}{3},x_2=5$

(4)$2x^2-4x-1=0$,

解 用求根公式:$x=\frac{4\pm\sqrt{24}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$ 所以 $x_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2},x_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

(2) 一元二次方程根的判别式:在求根公式中根号下的式子 b^2-4ac 称为一元二次方程根的判别式,用 Δ 表示,即 $\Delta=b^2-4ac$

若 $\Delta=b^2-4ac>0$

则一元二次方程有两个不相等实根 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

反之亦成立.

若 $\Delta=b^2-4ac=0$

则一元二次方程有两个相等的实根,$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$. 反之亦成立.

若 $\Delta=b^2-4ac<0$

即 $\sqrt{b^2-4ac}$ 无意义. 所以一元二次方程无实根.

例3. 不解方程,判断方程 $2x^2-4x+3=0$ 根的个数.

解 $\Delta=b^2-4ac=16-4\times2\times3<0$ 所以原方程无实根.

例4. 关于 x 的方程 $2x^2+3(m-1)x+m^2-4m-7=0$,求证:此方程有两不等实根.

证明 $\Delta=b^2-4ac=9(m-1)^2-4\times2(m^2-4m-7)$ 整理后 $\Delta=m^2+14m+65=(m+7)^2+16$. 因为 $(m+7)^2\geq0$,所以 $\Delta=(m+7)^2+16>0$,所以原方程有两不等实根.

(3) 根与系数关系:若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两根分别为 x_1,x_2 则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

例5. 某一元二次方程的两根和等于 $-\frac{2}{3}$，两根积等于 -3，则此一元二次方程为________.

解 因为 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{3}$ $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-3$

所以此方程为 $x^2+\frac{2}{3}x-3=0$，即 $3x^2+2x-9=0$

例6. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+4=0$ 的两个实根的和与这两个实根的积相等，若它的一个根为 $\frac{1}{4}$，则 a 的值为________

解 因为方程一个根为 $\frac{1}{4}$，设另一根为 x_2，根据已知可得 $\frac{1}{4}+x_2=\frac{1}{4}x_2$，则 $x_2=-\frac{1}{3}$

因为两根积为 $\frac{4}{a}$，所以 $\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{a}$ 得 $a=-48$

4. 可化为一元二次方程的方程

例7. 解方程 $x^4-3x^2+2=0$，此方程不是一元二次方程，但它可通过换元法化为一元二次方程，再按一元二次方程来解.

具体解法：设 $x^2=y$ 代入原方程可化为 $y^2-3y+2=0$

解得 $y_1=2, y_2=1$，当 $x^2=2$ 时，则 $x=\pm\sqrt{2}$；当 $x^2=1$ 时，则 $x=\pm1$，所以原方程的解为 $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$，$x_{3,4}=\pm1$.

5. 分式方程

分母中含有未知数的方程叫分式方程.

分式方程的解法：去分母、去括号、移项合并同类项. 此时的方程若是一元一次方程，则按一元一次方程来解；此时的方程若是一元二次方程，则按一元二次方程的解法来解. 但要注意在去分母时两边同乘的含有未知数的式子，是否为零，事先是不能判断出来的，所以分式方程解完以后，一定要验根. 也就是把解得的未知数的值代入方程两边同乘的式子中，若式子不为零，则此未知数的值是原方程的解，若代入两边同乘的式子后，式子为零，则此时的未知数的值不是原方程的解，而是增根，应该舍掉.

例8. 解方程 $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

解 原方程化为 $\frac{2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$，

方程两边同乘以 $x(x+2)(x-2)$，得 $2x+(x-4)(x-2)=x+2$

整理得 $x^2-5x+6=0$ 所以 $x_1=2$， $x_2=3$

将 $x_1=2$ 代入 $x(x+2)(x-2)$ 中其值为零，所以不是原方程的根，而是增根，应舍掉；将 $x_2=3$ 代入 $x(x+2)(x-2)$ 中其值不为零，所以 $x=3$ 是原方程的解.

6. 无理方程

根号下含有未知数的方程，叫做无理方程. 如，$\sqrt{3x+2}=2$，$x-\sqrt{x-1}=1$.

无理方程的解法：通过方程两边平方，化去方程的根号，即化为有理方程再解，解出的解必须代入原方程进行检验，如果适合原方程就是原方程的解，如果不适合原方程，就是增根.

例9. 解方程 $\sqrt{2x^2+7x}=x+2$

解 方程两边平方得：$2x^2+7x=(x+2)^2$

整理得 $x^2+3x-4=0$ 解得 $x_1=1$， $x_2=-4$