新课程 新考纲

2007

GAOKAO BEIKAO ZHINAN

高考备考指南

数学（理科）

系统复习用书习题解答

广州市教育局教学研究室 编

华南理工大学出版社

前 言

新一轮高考改革的重点是考试内容的改革，这是我们在复习备考中应该首先关注的。因此，学生复习资料的编写和使用，就成为备考复习的重要环节之一。

本书的前身是《高考备考丛书》，初版于1994年，是根据当时广州市有关领导的指示，为提高广州地区学生系统复习备考的效率，由广州市教育局教研室组织广州市一百多名特级教师和骨干高级教师编写的。1997年更名为《高考备考指南》，由华南理工大学出版社出版。出版以来，为适应新的情况，吸收新的经验，每年更新内容，修订改版。多年打造，广受欢迎，成为广州市连续十多年使用的高考备考主流资料。

“应试”和“素质”并不是完全对立的矛盾。目前高三教学还存在诸多弊端，正需要我们通过教学研究和教学改革去克服和解决。广州市从上个世纪80年代开始组建了全市性的高考备考研究队伍，依循现代教学理念，着眼于学生，着眼于效率，探索和研究高考备考的教学规律。通过探索和努力，积累和形成了丰富的具有广州特色的高考备考经验体系，凭着这些凝聚了广州市20多年来一批又一批优秀高三教师心血结晶的经验，广州的高考已经连续多年在全省显现出高位稳定。《高考备考指南》，就是广州多年高考备考研究的成果之一，它全面体现了广州备考理念和备考经验。

《高考备考指南》是为广东学生参加广东高考而编写的，所以，一方面，在内容上紧靠广东高考的考试大纲，力求让师生明确考试大纲规定考点的要求，明确考点对应的课本内容，明确考点对应的试题题目，成为当年考试大纲的“解读”。另一方面，在体例上充分考虑了我省学生的学习基础、学习习惯和心理特点，力求精练，强调实用。所以，重视基础，舍弃繁难，反对题海，针对性强，简明扼要，让学生以最少的时间获得最好的复习效果，是本书编写思路的鲜明特点。

由于高考改革的逐年深入，本丛书出版以来，每年都根据高考命题趋势，对内容范围和难度要求进行修改、补充和调整。为适应我省“3+X”高考改革，2000年的第四版，新增了生物和地理，2001年又增加了《文理综合》，科目增加到十科。2007年将是新课程实施后的首次高考，根据2007年新高考方案的变化，《高考备考指南》（第十版）由全市十多所名校一百多名教学骨干，根据新课程高考要求重新编写，全书的结构、内容、题例和练习都全新改版，以求尽力体现目前能广泛收集到的我省2007年高考考试信息。

《高考备考指南》（第十版）包括语文、数学（分文科数学和理科数学）、英语、文科基础/理科基础、政治、历史、地理、物理、化学、生物10个学科，每个学科分为《系统复习用书》和《专题训练用书》。《系统复习用书》包括学科各必修模块和列进考试范围的选修模块的基础知识的系统梳理和题型示例，既保留了新教材的改革亮点，又根据新考纲初稿的要求，加强了知识的系统性，每单元（或章节）附有供学生思考与训练的题目（数学另有配套的《习题解答》）。《专题训练用书》提供与系统复习配套使用的单元（或专题）训练和综合训练，可以按照需要随堂测试或课外使用。

《高考备考指南》丛书编写委员会由广州市教育局教研室组建。第十版由麦曦、黄宪任主编，张经纬任副主编。华南理工大学出版社大力协助并促成本丛书出版，在此谨表谢意。

编　者

2006年6月于广州

说 明

《高考备考指南·数学(理科)》包括系统复习用书、专题训练用书和习题解答共三册书，三册书相互配套，构成了一个特别适合数学高考复习特点的内容体系。

其中，系统复习用书包含了高中数学课程标准中必修课程和选修系列 2 的全部内容。在充分考虑高中数学课程标准各种不同版本的实验教科书的基础上，根据 2007 年新课程标准高考数学考试大纲和历年来高考数学命题的特点，系统复习用书将高中数学课程标准中的必修内容和选修内容进行了有机的整合，使得知识之间的内在联系更加紧凑、连贯。为方便使用，系统复习用书按课时编写，而且将每课时的配套练习分为基础训练和综合提高两个部分。系统复习用书可供考生作为数学高考第一轮复习使用。

专题训练用书配合系统复习用书，为每章提供了一套测试卷，既可作为班级单元测试用，也可作为考生自行检测用。

习题解答一书给出了系统复习用书中全部习题的详尽解答，以方便考生解题时及时查对答案，比较解法的优劣。

《高考备考指南·数学(理科)》由广州市教育局教研室高中数学教研员谭国华、陈镇民担任主编。参加编写的人员分别是：许建中(第一章、第八章)，杨仁宽(第二章)，伍晓焰(第三章)，罗华(第四章)，陈镇民、谭国华(第五章)，周伟锋(第六章)，曾辛金(第七章)，翁之英(第九章)，肖凌戆(第十章)，肖勇钢(第十一章)，彭雨茂(第十二章)，谭曙光(第十三章、第十六章)，赵霞(第十四章)，严运华(第十五章)。参加编写的这些人员均为广州市重点中学的数学骨干教师，他们有着丰富的数学高考复习的实践经验，同时又都是高中数学课程标准实验的亲身参与者。

为了保证书稿的质量，《高考备考指南·数学(理科)》还邀请了一批无论在数学专业上、还是在课堂教学上都具有较高造诣的广州市高中数学青年教师参与审校工作。他们是：康元胜(第一章、第十三章、第十六章)，刘德远、郑勇(第二章)，温效良、沈秋怡(第三章)，宋洁云(第四章)，陈镇民、邓军民(第五章)，刘殿、吴慧华(第六章)，赖青松、慎先锋(第七章)，罗晓斌(第八章、第十一章)，李菊(第九章)，闵长江(第十章)，邹传庆、张蜀青、徐全德(第十二章、第十五章)，庞新军(第十四章)。

感谢华南理工大学出版社的编辑和校对人员，正是由于他们的帮助，才使本书得以顺利出版。

尽管参与本书编写、编辑和校对的人员均抱着非常严肃认真的态度从事着本书的编写与出版工作，但由于水平有限，或偶有疏忽，本书必定还存在一些不足之处，恳请广大教师和学生提出批评、建议，以便再版时修订。

编　者

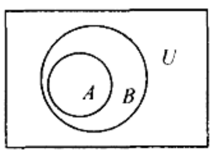
2006 年 6 月

目　录

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合

1. (D). $\complement_U B=\{1,3,4\}$, $A\cap(\complement_U B)=\{1,3\}$，故选(D).
2. (C). $A=\{x|x<-2$ 或 $x>1\}$, $B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$, $A\cap B=\{x|-3\leqslant x<-2$ 或 $1<x\leqslant 2\}$.



3. (B). 如图，可知(B)错误.
4. (C). 由图可知，阴影部分是 M 与 P 的公共部分，且又在 S 的外部，再与选择支对照，故应选(C).
5. $P\cap\complement_U Q$. 因为 $Q=\{x|g(x)\geqslant 0\}$，故 $\complement_U Q=\{x|g(x)<0\}$，不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集为 $\left\{x\middle|\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}\right\}=\{x|f(x)<0\}\cap\{x|g(x)<0\}=P\cap(\complement_U Q)$.
6. $\{1,2,5\}$. 因 $A\cap B=\{2\}$，则有 $\log_2(a+3)=2$，故 $a=1$，在 $B=\{a,b\}$ 中，必有 $b=2$，故 $A=\{5,2\}$，$B=\{1,2\}$，由此 $A\cup B=\{1,2,5\}$.
7. 解：因 $A\cap B=\{-3\}$，故 $-3\in B$，由已知因 $a^2+1\neq -3$，且 $a^2+1\neq a^2$，故 $\begin{cases}a-3=-3\\a^2\neq 2a-1\\a+1\neq a^2+1\end{cases}$ 或

$\begin{cases}2a-1=-3\\a^2\neq a-3\\a+1\neq a^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\a\neq 1\\a\neq 0\text{ 且 }a\neq 1\end{cases}$

或 $\begin{cases}a=-1\\a\neq 0\text{ 且 }a\neq 1\end{cases}\Rightarrow a=-1$.

8. (1)因 $B=\{1,2\}$，而 $A\cup B=B$，故 $A\subseteq B$. 故 A 可能有下列四种情形：

①$A=\{1,2\}$；②$A=\{1\}$；③$A=\{2\}$；④$A=\varnothing$.

①当 $A=\{1,2\}$ 时，$p=-3,q=2$；

②当 $A=\{1\}$ 时，$p=-2,q=1$；

③当 $A=\{2\}$ 时，$p=-4,q=4$；

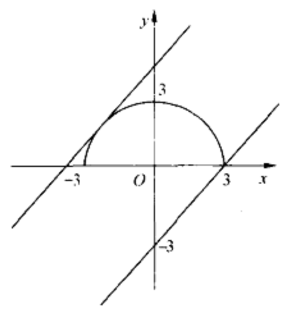
④当 $A=\varnothing$ 时，p,q 满足 $p^2<4q$.

(2)解法1：由 $A\cap R^+=\varnothing$ 可知①$A=\varnothing$，②$A\neq\varnothing$，但 $A\subseteq\{x|x\leqslant 0\}$，①当 $A=\varnothing$ 时，则 $\Delta<0$，即：$(2+p)^2-4<0$：得 $-4<p<0$；②当 $A\neq\varnothing$ 时，因 $x^2+(2+p)x+1=0$ 不可能有0根，且两根必同号，即 $A\subseteq R^-$. 故必有 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\x_1+x_2<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}p^2+4p\geqslant 0\\2+p>0\end{cases}$，得 $\begin{cases}p\leqslant -4\text{ 或 }p\geqslant 0\\p>-2\end{cases}$，故 $p\geqslant 0$. 综合①、②可知：p 的取值范围是 $\{p|p>-4\}$.

解法2：由于方程 $x^2+(2+p)x+1=0$ 不可能有根为0，且两根必同号.

所以当 $A\cap R^+\neq\varnothing$ 时的条件是 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\x_1+x_2>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}p^2+4p\geqslant 0\\2+p<0\end{cases}$，故 $p\leqslant -4$. 故满足 $A\cap R^+=\varnothing$ 条件的 p 的取值范围是 $p>-4$.

9. (D). 如图 M 是以原点为圆心，3为半径的上半圆，M 与 N 有 $M\cap N=\varnothing$，表明直线 l: $y=x+b$ 与半圆没有公共点，所以 b 的取值范围只能是 $(-\infty,-3)\cup(3\sqrt{2},\infty)$



10. $[-3,-1)\cup(1,+\infty)$.

原式 $=\{x|4x^2-4>0\}\cap\{y|y\geqslant -3\}=\{x|x>1$ 或 $x<-1\}\cap\{y|y\geqslant -3\}=[-3,-1)\cup(1,+\infty)$.

11. $(\frac{2}{3},1]\cup[-\frac{1}{3},0)$. 因 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,\pi]$ 消去参数得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1\quad(0\leqslant y\leqslant 1)$，把 $y=kx+k+1$ 代入得 $(\frac{1}{4}+k^2)x^2+(2k^2+2k)x+k^2+2k=0$，由 $\Delta=3k^2-2k=0$ 得 $k=0$ 或 $k=\frac{2}{3}$，又直线 $y=$

$kx+k+1$ 恒过点$(-1,1)$,其与$(-2,0)$连线的斜率为1,与$(2,0)$连线的斜率为$-\frac{1}{3}$,由数形结合可得.

12. 解:(1)当 $a=4$ 时,原不等式可化为$\frac{4x-5}{x^2-4}<0$,解得 $x<-2$ 或$\frac{5}{4}<x<2$, 故 $M=(-\infty,-2)\cup(\frac{5}{4},2)$

(2)由 $3\in M$,得$\frac{3a-5}{3^2-a}<0$ 且 $5\notin M$,得$\frac{5a-5}{5^2-a}\geqslant 0$,

解之得 $a\in[1,\frac{5}{3})\cup(9,25)$.

13. 解:由$\begin{cases}x^2+mx-y+2=0\\x-y+1=0\end{cases}$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$

得 $x^2+(m-1)x+1=0$,$f(x)=x^2+(m-1)x+1$.

因 $A\cap B\neq\varnothing$,故$f(x)$在$[0,2]$上至少与 x 轴有一个交点,即等价于

$$f(0)f(2)\leqslant 0 \text{ 或} \begin{cases}\Delta\geqslant 0\\f(0)\geqslant 0\\f(2)\geqslant 0\\0\leqslant -\frac{m-1}{2}\leqslant 2\end{cases},$$

$$\text{即 } 2m+3\leqslant 0 \text{ 或} \begin{cases}m^2-2m-3\geqslant 0\\2m+3\geqslant 0\\-4\leqslant m-1>0\end{cases},$$

解得 $m\leqslant-\frac{3}{2}$或$-\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant -1$,故 m 的取值范围为$(-\infty,-1]$.

14. 解:(1)$a_n=2\cdot(-1)^n$,所以 $a_1=-2,a_2=2,a_3=-2,\cdots$,即集合 S 中必有 2 和 -2,$2\in S\Rightarrow\frac{1}{1-2}\in S\Rightarrow -1\in S\Rightarrow\frac{1}{1-(-1)}\in S\Rightarrow\frac{1}{2}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\in S\Rightarrow 2\in S$,所以 S 中至少含有元素 $2,-1,\frac{1}{2}$. 同理,由 $-2\in S$ 可得$\frac{1}{3}\in S$ 和$\frac{3}{2}\in S$,所以 S 中至少含有元素 $-2,\frac{1}{3},\frac{3}{2}$,即 S 中所含元素个数最少的集合为 $S^*=\{2,-1,\frac{1}{2},-2,\frac{1}{3},\frac{3}{2}\}$.

(2)因$2\times(-1)\times\frac{1}{2}=-1,(-2)\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=-1$,

故 $P=\frac{2}{C_6^3}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

(3)略.

1.2　充分条件与必要条件

1. (B). $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0\nRightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,而 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,则甲是乙的必要不充分条件.

2. (A). 由选择支观察,先判断命题①的正确性,其逆命题是:"$x>1\Rightarrow\sqrt{x^2}=x$"为真命题,故①为真,因而排除了(B)、(D),而对(A)、(C)中只需判断命题④或⑤,显然⑤易判断,其否命题是:"$ab\neq 0\Rightarrow a=0$ 且 $b\neq 0$",显然是假命题.

3. (C). 方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$有一个正根和一个负根的充要条件是 $x_1\cdot x_2=\frac{1}{a}<0$,即 $a<0$.

4. (B). 当 $c=0,a,b$ 不为 0 时,$ac=bc\nRightarrow a=b$,所以①是假命题;当 $a=2,b=-3$ 时,$a>b\nRightarrow a^2<b^2$,所以③是假命题. ②、④显然正确.

5. $ab>0$ 是$\frac{a}{b}>0$ 的充要条件;而 $ab\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant 0\\b\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}a\leqslant 0\\b\leqslant 0\end{cases}$,$\frac{a}{b}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant 0\\b>0\end{cases}$或$\begin{cases}a\leqslant 0\\b<0\end{cases}$,因此 $ab\geqslant 0$ 是$\frac{a}{b}\geqslant 0$的必要但不充分条件.

6. $[0,\frac{1}{2}]$. 解:$|4x-3|\leqslant 1$,得$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$,解 q 得 $a\leqslant x\leqslant a+1$, 由题设条件得 q 是 p 的必要不充分条件,即 $p\Rightarrow q,q\nRightarrow p$,故$[\frac{1}{2},1]\subsetneqq[a,a+1]$.

所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$且 $a+1\geqslant 1$ 得 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

7. 逆命题:"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a+c>b+d$,则 $a>b$ 且 $c>d$"是假命题.

否命题:"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a\leqslant b$ 或 $c\leqslant d$,则 $a+c\leqslant b+d$"是假命题(因逆、否命题同真假).

逆否命题:"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a+c\leqslant b+d$,则 $a\leqslant b$ 或 $c\leqslant d$"是真命题(因原命题为真).

8. 解:(1)原命题为真. 逆命题为:若 $x,y\in\mathbf{R}$ 且 x,y 不全为0,则 $x^2+y^2\neq 0$,真命题. 否命题为:若 $x,y\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+y^2=0$,则 x,y 全为0,真命题.

逆否命题为:若 $x,y\in\mathbf{R}$ 且 x,y 全为0,则 $x^2+y^2=0$,真命题.

(2)原命题为假. 逆命题:若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有公共点,则 $b^2-4ac<0$,假命题. 否命题:若在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中,$b^2-4ac\geqslant 0$,则该二次函数图象与 x 轴没有公共点,假命题. 逆否命题:若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴没有公共点,则 $b^2-4ac\geqslant 0$,假命题.

9. (D). 对(A),因为 c 的正负未知,因而 a 与 b 的大小不定,所以(A)假;对(B),逆命题是"若 $b^2=9$,

则 $b=3$"，它未必成立，因为 b 可能等于 -3，所以(B)假；对(C)，否命题为"当 $x\neq 2$ 时，$x^2-3x+2\neq 0$"为假，因为 $x\neq 2$，但可以为 1，使 $x^2-3x+2=0$ 成立；对(D)，其逆否命题为"两个三角形的对应角不相等，则这两个三角形不相似"，为真，因为原命题为等价命题. 原命题为真.

10. (A). 由 $A\subsetneqq B$ 利用韦恩图得 $(\complement_U A)\cup B=U$，故 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的充分条件，而 $A=B$ 时，$(\complement_U A)\cup B=U$，故 $A\subsetneqq B$ 不是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的必要条件.

11. (D). D 中，因 $b/\!/\beta,\alpha\cap\beta=a$，故 a 与 b 无交点，若 $a/\!/b$，由 $b\perp\alpha$，得 $a\perp\alpha$，由题设有 $a\subseteq\alpha$，故 a 与 b 不可能平行，a 与 b 又无交点，故 a,b 是异面直线.

12. $1\leqslant m<2$. 因 $|x|+|x-1|>m$ 解集为 $\mathbf{R}$，故 $m<(|x|+|x-1|)_{\min}$，$|x|+|x-1|\geqslant|x-(x-1)|=1$，故 $m<1$，由已知 $(5-2m)^x$ 为增函数，故 $5-2x>1$，$m<2$，由 p,q 中一真一假，

故 $\begin{cases}m\geqslant 1\\ m<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<1\\ m\geqslant 2\end{cases}$，即 $1\leqslant m<2$.

13. 证明：原命题的逆否命题为"已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，$a,b\in R$，若 $a+b<0$，则 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$"，

若 $a+b<0$，则 $a<-b,b<-a$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，即 $f(a)<f(-b)$，$f(b)<f(-a)$，$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$ 即逆否命题为真命题，故原命题为真.

14. 必要性. 因线段 AB 的方程为 $y=-x+3\ (0\leqslant x\leqslant 3)$，

由 $\begin{cases}y=-x^2+mx-1\\ y=-x+3\end{cases}$，$0\leqslant x\leqslant 3$，得 $-x^2+(m+1)x-4=0\quad(0\leqslant x\leqslant 3)$，令 $f(x)=x^2-(m+1)x+4\quad(0\leqslant x\leqslant 3)$，则抛物线 C 与线段 AB 有两个不同交点等价于 $f(x)$ 与 x 轴在 $[0,3]$ 内有两个交点，即等价于

$$\begin{cases}\Delta>0\\ f(0)\geqslant 0\\ f(3)\geqslant 0\\ 0\leqslant -\dfrac{b}{2a}\leqslant 3\end{cases}，即\begin{cases}m^2+2m-15>0\\ 10-3m\geqslant 0\\ 0\leqslant m+1\leqslant 6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}m<-5 \text{ 或 } m>3\\ m\leqslant\dfrac{10}{3}\\ -1\leqslant m\leqslant 5\end{cases},$$

所以 $3<m\leqslant\dfrac{10}{3}$，从而必要性得证.

充分性. 因 $m\in(3,\dfrac{10}{3}]$，

故 $x_1=\dfrac{1+m-\sqrt{(1+m)^2-16}}{2}>\dfrac{1+m-\sqrt{(1+m)^2}}{2}=0$，

$x_2=\dfrac{1+m+\sqrt{(1+m)^2-16}}{2}\leqslant\dfrac{1+\frac{10}{3}+\sqrt{(1+\frac{10}{3})^2-16}}{2}=3$，

所以方程 $x^2-(1+m)x+4=0$ 有两个不同实数根，且两根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2\leqslant 3$，即方程组 $\begin{cases}y=-x^2+mx-1\\ y=-x+3\end{cases}(0\leqslant x\leqslant 3)$ 有两组不同的实数解.

所以，抛物线 $y=-x^2+mx-1$ 和线段 AB 有两个不同交点的充要条件是 $3<m\leqslant\dfrac{10}{3}$.

1.3　常用逻辑用语

1. (B). 显然 p 真 q 假，只有 $p\vee q$ 为真命题.

2. (D). 因 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，故 $|a+b|>1\Rightarrow|a|+|b|>1$，而 $|a|+|b|>1$ 并不一定能推出 $|a+b|>1$，所以 p 是假命题，而 q：由 $|x-1|-2\geqslant 0$，得 $|x-1|\geqslant 2$，所以 $x-1\leqslant -2$ 或 $x-1\geqslant 2$，即 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$，故 q 命题为真，所以选(D).

3. (C). 因为 $p\vee q$ 为真，则 p,q 中至少有一个真；$p\wedge q$ 为假，则 p,q 中至少有一个假；从而，p,q 中必有一真一假，即 p,q 中有且只有一个为真.

4. (D). 因为(A)的否定是 $\exists x\in\mathbf{R},x^2+3x+4\leqslant 0$，假命题；

(B)的否定是 $\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x-3>0$，假命题；

(C)的否定是所有三角形不是锐角三角形，假命题；

(D)的否定是有些一元二次方程不定有实数解，真命题.

5. $\{-1,0,1,2\}$. 因为 $\neg q$ 为假，故 q 为真，又因 $p\wedge q$ 假，故 p 必假，

故 $\begin{cases}|x^2-x|<6\\ x\in\mathbf{Z}\end{cases}$，即 $\begin{cases}-6<x^2-x<6\\ x\in\mathbf{Z}\end{cases}$，$\begin{cases}-2<x<3\\ x\in\mathbf{Z}\end{cases}$

所以 $x=-1,0,1,2$

6. $[1,2)$. 因为 p 中，$|x|+|x-1|\geqslant 1$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以要使不等式 $|x|+|x-1|>m$ 恒成立，只需 $m<1$ 即可. 在 q 中，因 $f(x)$ 是减函数，故 $g(x)=(5-2m)^x$ 是增函数，即 $5-2m>1$，故 $m<2$. $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假. 故 p 与 q 有且只有一个真.

(1)若 p 真 q 假,则$\begin{cases}m<1\\m\geqslant2\end{cases}$,解集为$\varnothing$,

(2)若 q 真 p 假,则$\begin{cases}m\geqslant1\\m<2\end{cases}$,故 $1\leqslant m<2$.

7. 解:(1)因 $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$. 故命题为真命题;
(2)真命题;
(3)因 $\alpha=\beta=0$ 时,$\sin(\alpha+\beta)=0,\sin\alpha=\sin\beta=0$.
故 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$. 命题为真命题;
(4)因 $x=y=10$ 时,$3x-2y=10$,故命题为真命题;
(5)因 $a=0,b=1$ 时,$ax+b=1\neq0$,
故 $a=0,b=1,ax+b=0$ 无解,命题为假命题.

8. 解:(1)命题的否定:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $3x-5\neq0$,故 $x=3$ 时,$3\times3-5=4\neq0$,命题的否定为真;
(2)命题的否定:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2\leqslant0$,因 $x=0,0^2=0$,故命题的否定为真;
(3)命题的否定:$\forall x\in\mathbf{R},x^2\neq1$,因 $x=1$ 时,$x^2=1$,故命题的否定是假;
(4)命题的否定:$\forall x\in\mathbf{R}$,x 不是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根,故 $x=1$ 时,$x^2-3x+2=0$ 成立,命题的否定为假.

9. (C). "$\neg$ (p 或 q)"为假命题,则"p 或 q"为真命题,也即 p,q 中至少有一个为真命题.

10. (C). ①的否定是:有些实数的平方不是正数,因 $x=0$ 时,$x^2=0$ 不是正数,因而命题为真命题;②的否定是:有些实数 x 不都是方程 $5x-12=0$ 的根,因 $x=1$,而 $5\times1-12\neq0$,所以命题为真命题;③的否定是:有些数被 8 整除但不能被 4 整除,假;④的否定是:$\exists$ 四边形,若它是正方形,则它的四条边中,至少有两条边不相等,这个命题是假命题.

11. 解:逆命题:若 $a=0$ 或 $b=0$,则 $ab=0$,逆命题为真命题;
否命题:若 $ab\neq0$,则 $a\neq0$ 且 $b\neq0$,否命题为真命题;
逆否命题:若 $a\neq0$ 且 $b\neq0$,则 $ab\neq0$,逆否命题为真命题.

12. 解:(1)p 且 q,p:梯形的中位线平行于两底,q:梯形的中位线等于两底和的一半;
(2)$\neg\ p$,p:$\sqrt{3}<2$;
(3)p 或 q,p:方程 $x^2-16=0$ 的一个解是 $x=4$,
q:方程 $x^2-16=0$ 的一个解是 $x=-4$.

13. 解:(1)任意一个有理数都能写成分数形式;
(2)一切 n 边形的内角和都等于$(n-2)\times180°$;
(3)任意两个有理数之间,都有一个有理数;
(4)存在一个实数,它乘以任意一个实数都等于 0.

14. (1)命题的否定:某些正方形不都是菱形,假命题;
(2)命题的否定:$\forall x\in\mathbf{R},4x-3\leqslant x$,因 $x=2$ 时,$4\times2-3=6>2$,故"$\forall x\in\mathbf{R},4x-3\leqslant x$"是假命题;
(3)命题的否定:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x+1\neq2x$,因 $x=2$ 时,$x+1=2+1=3\neq2\times2$,故"$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x+1\neq2x$"是真命题;
(4)命题的否定:集合 A 既不是集合 $A\cap B$ 的子集,也不是集合 $A\cup B$ 的子集,是假命题.

习题一

1. (D). 方法 1:因集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\},A=\{2,5,8\},B=\{1,3,5,7\}$.
故$\complement_U A=\{1,3,4,6,7\}$,故$(\complement_U A)\cap B=\{1,3,7\}$,故选(D).
方法 2:由选择支,得(B).(C)必被排除,因$(\complement_U A)\cap B$ 中的元素必是 B 的元素,从选择支(A)可知 5 只能是 A 的元素,并不是$(\complement_U A)$中的元素,故排除(A). 选(D)

2. (A). 方法 1:因$\frac{x-1}{x-2}\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x-1}{x-2}-\frac{1}{2}\leqslant0\Leftrightarrow\frac{x}{x-2}\leqslant0\Leftrightarrow0\leqslant x<2$,故 $M=\{x|0\leqslant x<2\}$,因 $x^2+2x-3<0\Leftrightarrow-3<x<1$,故 $N=\{x|-3<x<1\}$,$M\cap N=\{x|0\leqslant x<1\}$,故选(A).
方法 2:由选择支,只需先验证 $x=1$ 时是不是两个不等式都成立.
显然 $x^2+2x-3<0$ 不成立. 故选(A).

3. (D). 当 $k=2n\ (n\in\mathbf{Z})$时,$Q=\{y|y=\frac{n}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi,n\in\mathbf{Z}\}$;当 $k=2n-1$ 时. $Q=\{y|y=\frac{n}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi,n\in\mathbf{Z}\}$. 故 $P\subsetneqq Q$,选(D).

4. (C). 因 $a+b<0$,故 $b<-a$. 不等式$\frac{a+x}{b-x}<0\Leftrightarrow(x+a)(x-b)>0$,故 $x>-a$ 或 $x<b$. 选(C).

5. (A). 因$|x|=x\Leftrightarrow x\geqslant0$,而 $x^2\geqslant-x\Leftrightarrow x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant0$,故 $p\Rightarrow q$,但 $q\nRightarrow p$,故 p 是 q 的充分不必要条件. 选(A).

6. (D). a,b,c 不全为零,即 a,b,c 中至少有一个不为零. 故选(D).

7. (A). 因 $a>b$ 与$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$同时成立$\Leftrightarrow\begin{cases}ab>0\\a>b\end{cases}\Leftrightarrow a>b$

>0 或 $b<a<0$. 故选(A).

8. (C). ①是真命题,③是真命题,其余均为假命题. 故选(C).

9. (C). 对于(A)的否定是:$\exists x\in\mathbf{R},x^2-x+1<0$,故 $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$,为假命题;

对于(B)的否定是:有些四边形内角和不等于 $360°$,为假命题;

对于(D)的否定是:至少存在一个分数不是有理数,为假命题;

而对于(C)的否定是:$\forall x\in\mathbf{R},\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$,为真命题. 故选(C)

10. (C). 方法1:因方程 $ax^2+2x+1=0$ 没有实根或有两个正根的条件是 $\Delta<0$ 或 $\begin{cases}-2a>0\\a>0\end{cases}$,即 $4-4a<0$ 或 $a\in\varnothing$. 故 $a>1$. 由此方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的条件是 $a\leqslant1$. 故选(C).

方法2:方程 $ax^2+2x+1=0$ 有且只有一个负根的条件是 $a\leqslant0$. 方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个负根的条件是 $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\\frac{1}{a}>0\end{cases}$,即 $\begin{cases}a\leqslant1\\a>0\end{cases}$,故 $0<a\leqslant1$,从而方程至少有一个负根的充要条件是 $a\leqslant1$.

11. 因 $A=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant0\}$,$B=\{y|y=2-|x|,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\leqslant2\}$,故 $A\cap B=\{y|0\leqslant y\leqslant2\}$. 因 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{y|y>2\}$,故 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\{y|y>2\}$.

12. 因 $P\subsetneqq Q\subsetneqq U$,故 $P\cap\complement_U Q=\varnothing$.

13. $B=\{(x,y)|\frac{y-1}{x-2}=\frac{1}{2},x,y\in\mathbf{R}\}=\{(x,y)|x-2y=0$ 且 $x\neq2,y\neq1$,且 $x,y\in\mathbf{R}\}$.

故 $\complement_U B=\{(x,y)|x-2y\neq0$ 或 $x=2$ 或 $y=1$ 且 $x,y\in\mathbf{R}\}$.

故 $A\cap(\complement_U B)=\{(x,y)|x=2$ 且 $y=1\}=\{(2,1)\}$.

14. 否命题是:若 $(x-1)(y+2)=0$,则 $x=1$ 或 $y=-2$.

逆否命题是:若 $x=1$ 或 $y=-2$,则 $(x-1)(y+2)=0$.

15. 此命题的逆命题:两个三角形全等,两个三角形面积相等且两边对应相等. 是真命题. 但原命题假,如在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,$AB=A'B'$,$AC=A'C'$,但 $\angle BAC=60°$,而 $\angle B'A'C'=120°$. 显然 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'C'}$,但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等,

故是必要不充分条件.

16. 由 $|x-a|<2$,得 $a-2<x<a+2$,故 $A=\{x|a-2<x<a+2\}$. 由 $\frac{2x-1}{x+2}<1$. 得 $\frac{x-3}{x+2}<0$,即 $-2<x<3$,故 $B=\{x|-2<x<3\}$. 因 $A\subseteq B$,

故 $\begin{cases}a-2\geqslant-2\\a+2\leqslant3\end{cases}$,得 $0\leqslant a\leqslant1$,故 a 的取值范围是 $[0,1]$.

17. **解:由 $a(x-2)+1>0,a>2$,得 $x>2-\frac{1}{a}$,由 $(x-1)^2>a(x-2)+1$,得 $(x-a)(x-2)>0$,因 $a>2$,故解得 $x<2$ 或 $x>a$. 由 $a>2$. 故 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{2},-\frac{1}{2}<-\frac{1}{a}<0$,即 $\frac{3}{2}<2-\frac{1}{a}<2$.**

因使 p,q 都成立的条件是 $2-\frac{1}{a}<x<2$ 或 $x>a$,

故使得 p,q 都成立的 x 集合为 $\{x|2-\frac{1}{a}<x<2$ 或 $x>a\}$.

18. 证明:反证法. 假设两个方程都没有实数根,则 $\Delta_1<0$ 且 $\Delta_2<0$,从而 $\Delta_1+\Delta_2<0\cdots$①. 又因 $\Delta_1+\Delta_2=(p_1^2-4q_1)+(p_2^2-4q_2)=p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)$. 因 $2(q_1+q_2)=p_1p_2$,故 $\Delta_1+\Delta_2=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2=(p_1-p_2)^2\geqslant0$. 这与①相矛盾,所以所给两方程中至少有一个方程有实根.

19. 解:因 p 条件可化为 $3a<x<a\ (a<0)$,

q 条件可化为 $-2\leqslant x\leqslant3$ 或 $x<-4$ 或 $x>2$.

即 $p:(3a,a)\quad(a<0)$,$q:(-\infty,-4)\cup[-2,+\infty)$,因 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,故 p 是 q 的充分不必要条件,故 $(3a,a)\subsetneqq(-\infty,-4)\cup[-2,\infty)$,即 $a\leqslant-4$ 或 $\begin{cases}3a\geqslant-2\\a<0\end{cases}$,

故 $a\leqslant-4$ 或 $-\frac{2}{3}\leqslant a<0$,故 a 的取值范围是 $(-\infty,-4]\cup[-\frac{2}{3},0)$.

20. 解:(1)设此方程的两实根为 x_1,x_2,则有两个正根的充要条件是

$$\begin{cases}1-a\neq0\\\Delta\geqslant0\\x_1+x_2>0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\a\leqslant2\text{ 或 }a\geqslant10\\\frac{a+2}{a-1}>0\\\frac{4}{a-1}>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a\neq1\\a\leqslant2\text{ 或 }a\geqslant10\\a<-2\text{ 或 }a>1\\a>1\end{cases}\Leftrightarrow1<a\leqslant2\text{ 或 }a\geqslant10,$$

故 $1<a\leqslant2$ 或 $a\geqslant10$ 是方程有两个正根的充要

条件.

(2)从(1)可知 $1<a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 10$ 时方程有两个正根. 当 $a=1$ 时,方程可化为 $3x-4=0$,有一正根 $x=\frac{4}{3}$. 又方程有一正根一负根时,充要条件是 $x_1x_2<0$,即 $\frac{4}{a-1}<0$, 得 $a<1$.

综上所述,方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$ 至少有一正根的充要条件是:$a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 10$.

第二章　函数概念与幂函数、指数函数、对数函数

2.1　函数及其表示

第一课时

1. (C). 由 $20=2^4+4=2^n+n$ 可知.
2. (B). 由函数的表达式可知，当 $x=3>1$ 时，$f(3)=2\times3-1=5$.
3. (C). 由 $-2\leqslant x^2-1\leqslant2$，$0\leqslant x^2\leqslant3$，于是 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$.
4. (D). 易知(A)满足③，(B)满足①，(C)满足②，(D)不满足任何等式.
5. 设 $t=\sqrt{x+1}$，由 $y=f(\sqrt{x+1})$ 中 $0\leqslant x\leqslant3$，知 $1\leqslant t\leqslant2$，从而 $f(t)$ 的定义域是 $[1,2]$，即 $f(x)$ 的定义域是 $[1,2]$.
6. 依题意，当 $0<s\leqslant3$ 时，$Q=7$；当 $s>3$ 时，$Q=7+2.6(s-3)$，故 $Q=\begin{cases}7, & 0<s\leqslant3\\ 7+2.6(s-3), & s>3\end{cases}$.
7. 依题意，不等式 $-x^2+ax+b\geqslant0$ 的解集是 $[1,2]$，所以方程 $-x^2+ax+b=0$ 的根是 1 与 2，从而 $a=3$，$b=-2$，$a+b=1$.
8. 由映射 $f:x\rightarrow y=3x+1$，知 $f(1)=4$，$f(2)=7$，$f(3)=10\in\mathbf{R}$，由 $a\in\mathbf{N}$，知 $10\neq a^4$，从而 $10=a^2+3a$，解得 $a=2$ 或 $a=-5$(舍去)，
   于是 $f(k)=3k+1=a^4=16$，$k=5$，即 $a=2$，$k=5$ 为所求.
9. (B). 原函数的定义域是 $\mathbf{R}$，即 $x^2+(k+3)x+\frac{9}{4}>0$ 对一切实数 x 恒成立，只需 $\Delta=(k+3)^2-9<0$，解得 $-6<k<0$.
10. (C). 因 $-9=-10+1<0$，$\frac{1}{2}\pi>0$，故 $f(\frac{1}{2}\pi+1)\times f(-9)=f(\frac{1}{2}\pi+1)\times f(-10+1)=\sin\frac{\pi}{2}\times\lg10=1$.
11. 当 $a<0$ 时，由 $2^{-a}-1>1$，得 $a<-1$；当 $a>0$ 时，由 $\sqrt{a}>1$，得 $a>1$. 故 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.
12. 假设存在正自然数 a，b 满足已知条件，则由 $f(b)=b$，得 $2=b(a-1)$，由于 $a,b\in\mathbf{N}^*$，从而 $\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$，当 $\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{3x-2}$，由 $-b=-1$，$f(-b)=f(-1)=-\frac{1}{5}>-1=-\frac{1}{b}$(舍去)；当 $\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2x-2}$，由 $-b=-2$，$f(-2)=-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}=-\frac{1}{b}$，符合条件②，故存在正自然数 $a=b=2$，符合题中的条件.

第二课时

1. (A). 由 $y=3^x>0$，$y=x^2-1\geqslant-1$ 可知.
2. (B). 由于 $y=3^{x-1}=\frac{1}{3}x^x>0$，其他各函数的值域均不是 $\mathbf{R}^*$.
3. 由 $x=0,1,2,3$，可知原函数的值域是 $\{0,4\}$.
4. 由 $a^x=\frac{1+y}{1-y}>0$，得 $\frac{1+y}{1-y}>0$，即 $(1-y)(1+y)>0$，解得 $-1<y<1$，即函数的值域是 $(-1,1)$.
5. 设长为 x(m)，则宽为 $\frac{4-2x}{3}$(m)，窗户的面积 $S=x\cdot\frac{4-2x}{3}=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}\leqslant\frac{2}{3}$，当 $x=1$ 时，窗户的面积 S 有最大值. 故当长为 1m，宽为 $\frac{2}{3}$m时，窗户透过的光线最多.
6. (1) 由 $f(x)=2^{x-5}$ 和 $g(x)=\log_3\sqrt{x-1}$ 在区间 $[2,10]$ 上均为增函数，而原函数在已知区间上也是增函数，从而可求得值域是 $[\frac{1}{8},33]$.

   (2) 由已知得 $\sqrt{x}=\frac{2y+1}{2-y}\geqslant0$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant y<2$，$[-\frac{1}{2},2)$ 为所求值域.

   (3) 由于 $\sin x=\frac{2(1-y)}{1+y}$，由 $|\sin x|\leqslant1$，得 $2|1-y|\leqslant|1+y|$，解得 $y\in[\frac{1}{3},3]$.

   另解：由 $y=-1+\frac{4}{\sin x+2}$ 和 $1\leqslant\sin x+2\leqslant3$，也可求得原函数的值域.
7. (1) 当 $0<x\leqslant2$ 时，$y=\frac{1}{2}|AB|\times|BM|=x$；当 $2<x\leqslant4$时，$y=\frac{1}{2}|AB|\times|BC|=2$；

当$4<x<6$时，$y=\frac{1}{2}|AB|\times|AM|=\frac{1}{2}\times2(6-x)=6-x$，

所以，$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant2\\2, & 2<x\leqslant4.\\6-x, & 4<x<6\end{cases}$

(2)此函数的定义域是$(0,6)$，值域是$(0,2]\cup\{2\}\cup(0,2)=(0,2]$.

8. (A). 在同一坐标系中作出两函数的图象，可知$F(x)=\begin{cases}2-x^2, & x<-2\text{ 或 }x>1\\x, & -2\leqslant x\leqslant1\end{cases}$，于是$F(x)$的最大值是$F(1)=1$，故应选(A).

9. 易知$f(x)$的最大与最小值之和是$f(0)+f(1)=1+a+\log_a2=a$，于是$a=\frac{1}{2}$.

10. $f(x)$在区间$[n,n+1]$上是增函数，此函数的值域是$[f(n),f(n+1)]$，由$f(n+1)-f(n)=2n+2$可知，在值域中共有$2n+2$个整数.

11. 由$3+2x-x^2>0$，得$M=(-1,3)$，设$t=2^x$，则$t\in(\frac{1}{2},8)$，从而$f(x)=g(t)=4t-3t^2$，由二次函数的图象及其性质可知$g(8)<g(t)\leqslant g(\frac{2}{3})$，当且仅当$2^x=\frac{2}{3}$，即当$x=\log_2\frac{2}{3}=1-\log_23$时，$f(x)$取得最大值是$\frac{4}{3}$，没有最小值.

所以$f(x)$的值域是$(-\infty,\frac{4}{3}]$.

2.2　函数的基本性质

第一课时

1. (A). $-g(x)$是增函数，则$f(x)+(-g(x))$为增函数.
2. (B). 可用排除法.
3. (D). 由函数的性质有$f(x)$为增函数，则$-f(x)$为减函数.
4. $(-4,-1]$. 求出$u=-x^2-2x+8$的单调增区间，结合原函数的定义域可得.
5. $[-16,+\infty)$. 依题意，对称轴$-\frac{a}{16}\leqslant1$.
6. $(\frac{1}{2},+\infty)$. 原函数化成$f(x)=a+\frac{1-2a}{x+2}$，任取x_1,x_2，且$-2<x_1<x_2$，则由不等式$f(x_1)-f(x_2)<0$可解出a的范围.
7. 由$f(-x^2+x-2)>f(-kx)$，得$-x^2+x-2<-kx$，即$x^2-(k+1)x+2>0$对于一切实数x恒成立，于是$8-(k+1)^2>0$，解得$-2\sqrt{2}-1<k<2\sqrt{2}-1$.
8. 任取x_1,x_2，且$0<x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\cdot(1-x_1x_2)$，其中$\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$，则当$0<x_1<x_2\leqslant1$时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，即$x\in(0,1]$，$f(x)$为单调递减；当$1<x_1<x_2$时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$x\in[1,+\infty)$，$f(x)$为单调递增.
9. (B). 依题意$f(x)$为增函数，由$f(x^2)<f(-x)$，得$x^2<-x$，解此可得.
10. $b>a>c$. $x=1$为对称轴，则$0,\log_24^{-1},\lg\frac{\pi}{3}$中离1距离越远的函数值越大.
11. 由对数函数的单调性，分类讨论可得x的集合为$(0,\frac{2}{3})\cup(1,+\infty)$.
12. $f(4)=f(2)+f(2)=2$，则$f(8)=3$，原不等式$\Leftrightarrow f(x(x-2))<f(8)$，则有$x(x-2)<8$，且$x\in(2,+\infty)$，解得$x\in(2,4)$.

第二课时

1. (D). 设$x<0$，则$-x>0$，$f(-x)=-x(1+\sqrt[3]{-x})=-x(1-\sqrt[3]{x})$，由$f(x)$是奇函数，得$f(x)=-f(-x)=x(1-\sqrt[3]{x})$.
2. (D). 设$f(x)=y=\frac{1-3^x}{1+3^x}$，则$f(-x)=\frac{1-3^{-x}}{1+3^{-x}}=\frac{3^x-1}{1+3^x}=-f(x)$，原函数是奇函数. (A)、(B)、(C)、(D)四个函数中，只有(D)$f(-x)=\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}=-f(x)$是奇函数.
3. (B). 由$f(x)=f(x+4)$，得$f(7.5)=f(8-0.5)=f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$.
4. (A). 由$y=f(x+2)$的对称轴是$x=0$，得$y=f(x)$的对称轴是$x=2$，由$f(x)$在$(-\infty,2)$上是增函数，得$f(-1)<f(1)=f(3)$.
5. 由$f(x)=x^2+a\sin x+x+8\Rightarrow f(-2)=2^2-a\sin x-2+8=10$，得$f(2)=2^2+a\sin x+2+8=14$.
6. 由$g(x)$与$f(x)$关于直线$x=1$对称，$x\in[-1,0]$，$f(x)=g(2-x)=-x+4x^3$，得$f(x)=\begin{cases}-x+4x^3, & x\in[-1,0]\\x-4x^3, & x\in(0,1]\end{cases}$.
7. 易知$f(x)$是偶函数，且$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$，于是原

式 $=1+1+1+f(-1)=\frac{7}{2}$.

8. 因 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，且在区间 $[0,1)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是递增的. 由 $f(1-a)+f(1-a^2)<0\Rightarrow f(1-a)<-f(1-a^2)=f(a^2-1)$，得

$$\begin{cases}-1<1-a<1\\-1<a^2-1<1\\1-a<a^2-1\end{cases}$$ ，解得 $1<a<\sqrt{2}$.

9. (B). 由偶函数的性质，得 $|1-m|>|m|$，结合定义域 $|1-m|\leqslant 2$，解得 $m\in[-1,\frac{1}{2})$.

10. (C). $f(10)=f(4+6)=f(4+1)=f(5)=f(-1+6)=f(-1+1)=f(0)=0$, $f(4)=f(-1+5)=f(-1)=-f(1)=-2$, $f(10)+f(4)=-2$.

11. 由图象关于 $x=2$ 对称，得 $f(x)=f(4-x)$, $f(4+x)=f(-x)=f(x)$，4 是原函数的周期. 于是 $x\in[-6,-2]$ 时，$x+4\in[-2,2]$, $f(x)=f(x+4)=-(x+4)^2+1=-x^2-8x-15$.

12. 依题意 $f(-x)=-f(x)\Rightarrow\frac{ax^2+1}{-bx+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}\Rightarrow -bx+c=-bx-c\Rightarrow c=0$，又 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}=\frac{ax}{b}+\frac{1}{bx}\geqslant 2\sqrt{\frac{ax}{b}\times\frac{1}{bx}}=2\sqrt{\frac{a}{b^2}}\geqslant 2\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b^2}}=1\Rightarrow a=b^2$, $f(x)=\frac{b^2x+1}{bx}\Rightarrow f(1)=\frac{b^2+1}{b}=b+\frac{1}{b}<\frac{5}{2}$, $b\in\mathbf{N}^*\Rightarrow b=a=1$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

2.3　幂函数、指数函数、对数函数

第一课时

1. (C). 原方程为 $5^{4x-1}=1$，从而 $4x-1=0$，得 $x=\frac{1}{4}$.
2. (C). 由题意 $y-x>0>x-y$, $x-1>0>1-y$，由指数函数的单调性可知.
3. (B). 由 $\lg a+\lg b=0$，得 $ab=1$, $G(x)=\log_b x=-\log_a x$.
4. 由题意有 $x^2-8<2x$，解此得 $-2<x<4$.
5. $-x^2+6x-17=-(x-3)^2-8\leqslant -8$，值域为 $(0,2^{-8}]$，递增区间是 $(-\infty,3]$.
6. 由幂函数的定义，知 $m^2-3m+3=1$，解得 $m=1$ 或 $m=2$，函数为 $y=x$ 或 $y=x^{-1}$.
7. 由 $y=2^x$ 的反函数为 $y=\log_2 x$, $f(4x-x^2)=\log_2(4x-x^2)$ 中，由 $4x-x^2>0$ 得 $0<x<4$，而 $t=4x-x^2$ 的对称轴是 $x=2$，于是 $[2,4)$ 为所求.
8. 当 $a>1$ 时，原式为 $\frac{x+1}{1-x}>1$，解得 $0<x<1$；当 $0<a<1$ 时，原式为 $0<\frac{x+1}{1-x}<1$，解得 $-1<x<0$. 所以 x 的取值范围，当 $a>1$ 时是 $0<x<1$；当 $0<a<1$ 时是 $-1<x<0$.
9. (D). $y=2^x$ 向下平移 1 个单位，得 $y=2^x-1$，再作关于直线 $y=x$ 对称图，得 $y=\log_2(x+1)$ 的图象.
10. (C). 由 $0<a<1$，得 $\log_b(x-3)>0$；由 $0<b<1$，得 $0<x-3<1$，即 $3<x<4$.
11. 由于 $f(x)=(2^x-a)^2+(b-a^2)$，依题意，得 $2^x=4$ 时，$f(x)=10$，所以有 $4-a=0$, $b-a^2=10$，从而 $a=4$, $b=26$, $a+b=30$.
12. 由题意，得 $\Delta=(t-3)^2-4(t^2+24)\geqslant 0$，解得 $-7\leqslant t\leqslant 5$.

(1) 由 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-t^2-6t+57$，得 $f(t)=\log_a(-t^2-6t+57)$，其定义域是 $[-7,5]$；

(2) 由(1)知 $f(t)=\log_a[-(t+3)^2+66]$，当 $a>1$ 时，$f(t)$ 在 $[-7,-3]$ 上递增，在 $[-3,5]$ 上递减. 当 $0<a<1$ 时，$f(t)$ 在 $[-7,-3]$ 上递减，在 $[-3,5]$ 上递增.

(3) 当 $a=2$ 时，由(2)可知，$f(t)$ 的最大值是 $f(-3)=\log_2 66$，最小值是 $f(5)=1$.

第二课时

1. (D). 由判别式非负，得 $a\geqslant 4$, $b\geqslant 2$.
2. (C). 由底数大于 1，得 $m^2+3m+3>1$，解得 $m>-1$ 或 $m<-2$.
3. (A). 由 $x,y>0$ 得 $4=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$, $xy\leqslant 4$, $\log_2 x+\log_2 y=\log_2(xy)\leqslant\log_2 4$.
4. 由对数函数的单调性，结合分类讨论，得 $(0,1)\cup(3,+\infty)$.
5. 由 $|2x-1|\geqslant 0$，得 $f(x)\geqslant 3^0=1$，值域是 $[1,+\infty)$.
6. 当 $x\leqslant 1$ 时，由 $2^{-x}=2$，得 $x=-1$；当 $x>1$ 时，由 $\log_3 x=2$，得 $x=9$.
7. 设天数为 x 时，则第一种投资的回报函数为 $y=40x$，第二投资的回报函数是 $y=10+20+30+\cdots+10x=10(1+2+3+\cdots+x)=5x^2+5x$，第三种投资的回报函数是 $y=0.4(1+2+4+\cdots+2^{x-1})=\frac{2}{5}(2^x-1)$，由于指数函数的增长要比一次函数和二次函数的增长要快，所以随着投资时间的增加，应选择第三种方案投资，回报效益最好.
8. (本题有多种证法，现给出一种如下) 由 $f(a)>f(b)$，得 $|f(a)|>|f(b)|$，所以 $|f(a)|^2>|f(b)|^2$,

即$(\lg a+\lg b)(\lg a-\lg b)>0$,所以$\lg(ab)\times\lg\frac{a}{b}>0$,由$0<a<b$,得$0<\frac{a}{b}<1$,$\lg\frac{a}{b}<0$,于是$\lg(ab)<0$,所以$ab<1$.

9. (C). 因$b<0<a<\log_{0.7}0.7=1=1.1^0<1.1^{0.9}$

10. (D). 易知$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$,令$t=2x-x^2>0$,则$0<x<2$,由于$t=2x-x^2$的顶点是$(1,1)$,所以$f(2x-x^2)$的增区间是$[1,2)$.

11. 由$f(x)$是奇函数,得$a=1$,$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

(1)利用定义域可以证明$f(x)$在实数集上是增函数;

(2)由$2^x=\frac{1+y}{1-y}>0$,得$(1+y)(1-y)>0$,所以$-1<y<1$;

(3)由$2^x=\frac{1+y}{1-y}$,得原函数的反函数是$g(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$,原不等式化为$\frac{1+x}{1-x}>\frac{1+x}{k}>0\cdots$①,注意到$k>0$,$1\pm x>0$,解不等式①,得$\begin{cases}k>1-x\\1>x>-1\end{cases}$,当$0<k<2$时,$1-k<x<1$;当$k\geqslant2$时,$-1<x<1$.

2.4　函数的图象

1. (A). 依题意,$f(x)=\lg\left(\frac{3-x}{x+3}\right)$,则$f(-x)=\lg\left(\frac{3+x}{3-x}\right)=-\lg\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=-f(x)$.

2. (D). 由$g(x)=2^x$得$g(a)\times g(b)=16$为$2^{a+b}=16$,$a+b=4$,$f(4)=\log_2 4=2$.

3. (C). 由直线的纵截距和对数函数的单调性可知.

4. 在同一坐标系中画出$y=\lg x$与$y=2-x$的图象,可知原方程的实根个数为1.

5. 依题意$-a^2=-(2a+3)$得$a=-1$或$a=3$,但$f(x)=3x+8$不是奇函数,故$a=-1$.

6. (1)、(2)、(3)、(4)小题的图象依次如图2-11、图2-12、图2-13、图2-14所示.

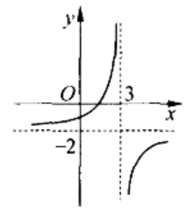


图 2-11

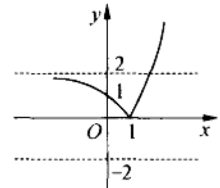


图 2-12

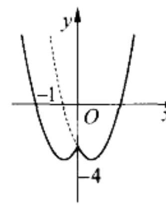


图 2-13

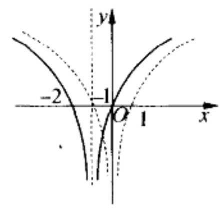


图 2-14

7. (A). 由复合函数单调性得函数$y=a^x$为增函数,即$a>1$,当$x\in(-\infty,1]$时,$a^x<a$,又$2-a>0$,故$1<a<2$.

8. (D). 由特例函数$y=2^{x-1}$与$y=2^{1-x}$的图象可知.

9. 函数$f(2x+1)$是偶函数,图象关于y轴对称,函数$f(2x)=f\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\right]$,其图象由$f(2x+1)$的图象向右平移$\frac{1}{2}$个单位而得,故对称轴是$x=\frac{1}{2}$.

10. 设函数$f(x)$过(x_0,y_0),则$y_0=f(x_0)=f[a-(a-x_0)]=-f[a+(a-x_0)]=-f(2a-x_0)$,即函数必过$(2a-x_0,-y_0)$,点$(x_0,y_0)$与点$(2a-x_0,-y_0)$关于点$(a,0)$成中心对称,故函数$f(x)$的图象关于点$(a,0)$成中心对称图形.

2.5　抽象函数

1. (B). 利用函数的奇偶性和单调性,作出简图可得.

2. (A). 由题意作出简图可知x与$f(x)$在$(-2,0)$与$(0,2)$上是异号的.

3. 令$x=1$,$y=2$,得$f(1)+f(2)=f(2)$,即$f(1)=0$,而$f(4)=f(2\times2)=f(2)+f(2)=1+1=2$.

4. $y=\lg x$(答案不惟一). 对任意$0<x_1<x_2$,有$f(x_1)<f(x_2)$,得$f(x)$为增函数. 又$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1x_2)$,满足对数函数的形式.

5. 由题意可知$f(x)=f(x+5)$,且$f(-x)=-f(x)$,得$f(4)+f(5)=f(-1+5)+f(0+5)=f(-1)+f(0)=-(-2007)+0=2007$.

6. 由$x\in[0,1]$知,$2^x\in[1,2]$,所以由$\lg x\in[1,2]$,得$x\in[10,100]$为所求定义域.

7. (1)令$x=y=0$,得$f(0)=0\cdot f(0)+0\cdot f(0)$,即$f(0)=0$. 取$x=y=1$,得$f(1)=f(1)+f(1)=2f(1)$,$f(1)=0$. 所以$f(0)=1$,$f(1)=0$.

(2)由$f(1)=f(-1)(-1)=-f(-1)+(-1)f(-1)=0$,知$f(-1)=0$,在已知等式中,取$y=-1$,可得$f(-x)=-f(x)$,$f(x)$是奇函数.

8. (B). 由题意$f(x)=f(x+2008)$,令$1004+x=t$,即$x=t-1004$,则有$f(t)=f(1004-t+1004)=$